ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ Ι

Κεφάλαιο 4

Τεχνικές ανάλυσης κυκλωμάτων

Μέρος Γ

Μετασχηματισμοί πηγών

Ισοδύναμα κυκλώματα Thevenin και Norton

Μέγιστη μεταφορά ισχύος

Επαλληλία

Μετασχηματισμοί πηγών

(Source Transformation)

- Πραγματική πηγή τάσης και ρεύματος
- Μετασχηματισμός πηγής τάσης σε πηγή ρεύματος (και αντίστροφα)

Η πραγματική πηγή τάσης

- Έχει μη μηδενική εσωτερική αντίσταση R_S

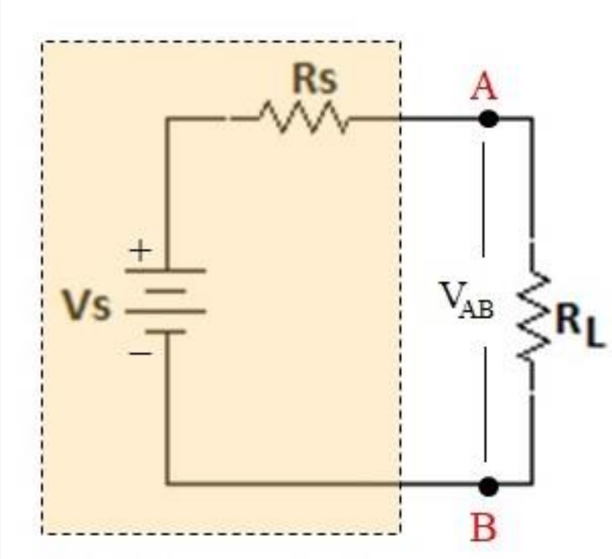
  (Η εσωτερική αντίσταση σε σειρά προς την πηγή τάσης)

- Αποτέλεσμα;

  Η τάση εξόδου V_{AB} μιας πραγματικής πηγής τάσης είναι μικρότερη από την ονομαστική της τιμή V_S

  Από τη σχέση του διαιρέτη τάσης, βρίσκουμε

$$V_{AB} = \left(\frac{R_L}{R_S + R_L}\right) V_S$$



Η πραγματική πηγή ρεύματος

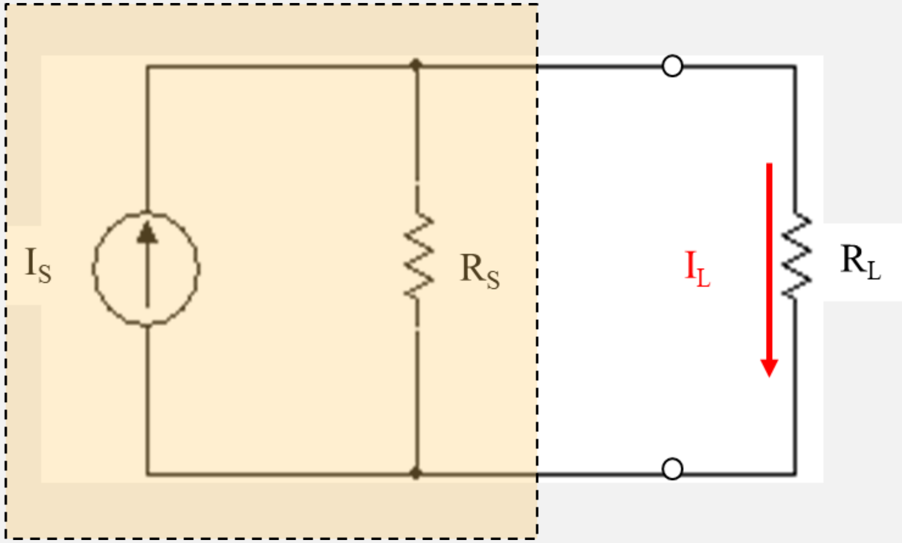
- Έχει μη μηδενική εσωτερική αντίσταση R_S

- Η εσωτερική αντίσταση είναι παράλληλα προς την πηγή ρεύματος (σημειώστε τη διαφορά από την πηγή τάσης)

- Αποτέλεσμα;

  Το ρεύμα I_L μιας πραγματικής πηγής ρεύματος είναι μικρότερο από την ονομαστική της τιμή I_S.

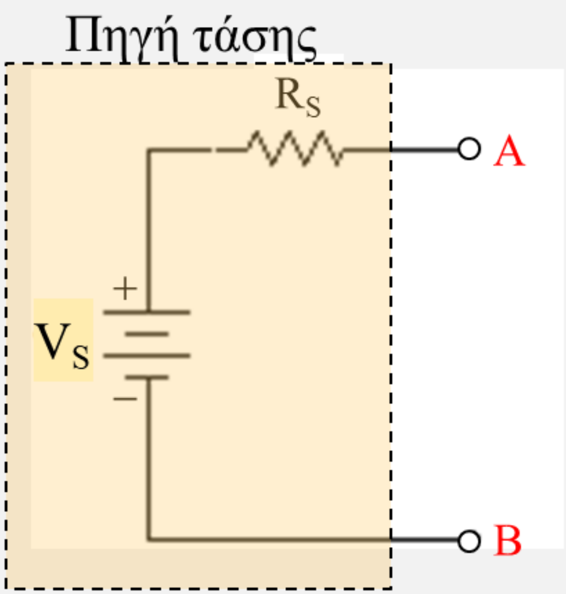
  Από τη σχέση του διαιρέτη ρεύματος, βρίσκουμε



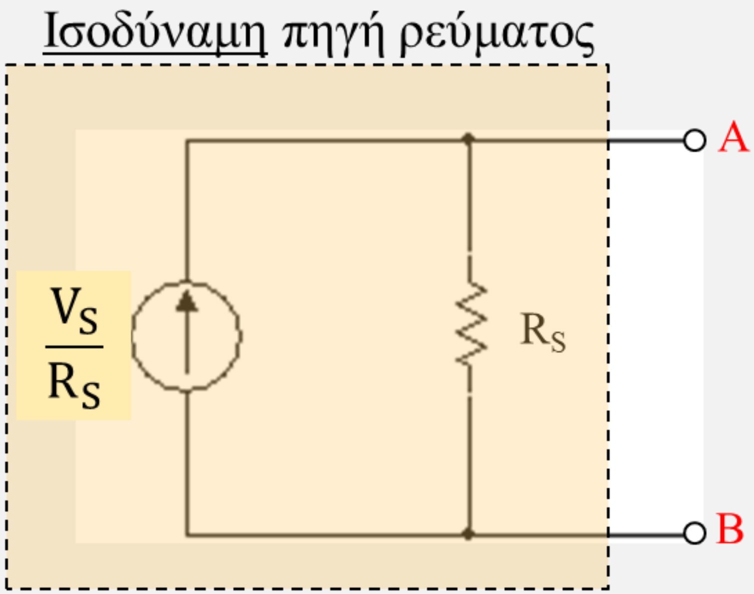
$$I_L = \left(\frac{R_S}{R_S + R_L}\right) I_S$$

Μετατροπή πηγής τάσης σε ισοδύναμη πηγή ρεύματος

Ισοδύναμες ονομάζονται δύο πηγές όταν παράγουν την ίδια τάση και το ίδιο ρεύμα σε ένα οποιοδήποτε φορτίο R_L συνδεμένο στην έξοδό τους.



⟺



Μια πηγή τάσης V_S και εσωτερικής αντίστασης R_S έχει ισοδύναμη πηγή ρεύματος τιμής

$$I_S = \frac{V_S}{R_S}$$

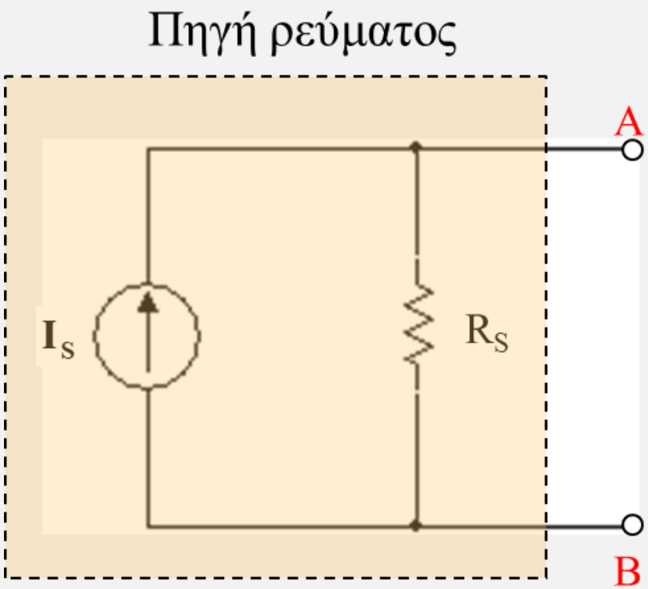
εσωτερικής αντίστασης R_S

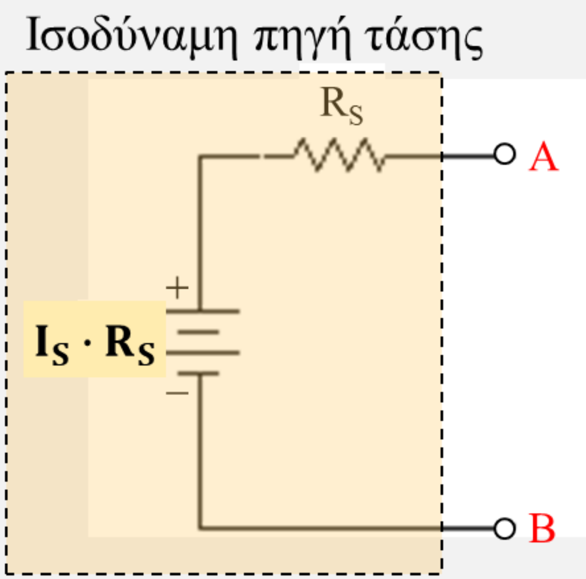
Μετατροπή πηγής ρεύματος σε ισοδύναμη πηγή τάσης

Μια πηγή ρεύματος I_S και εσωτερικής αντίστασης R_S έχει ισοδύναμη πηγή τάσης τιμής

$$V_S = I_S \cdot R_S$$

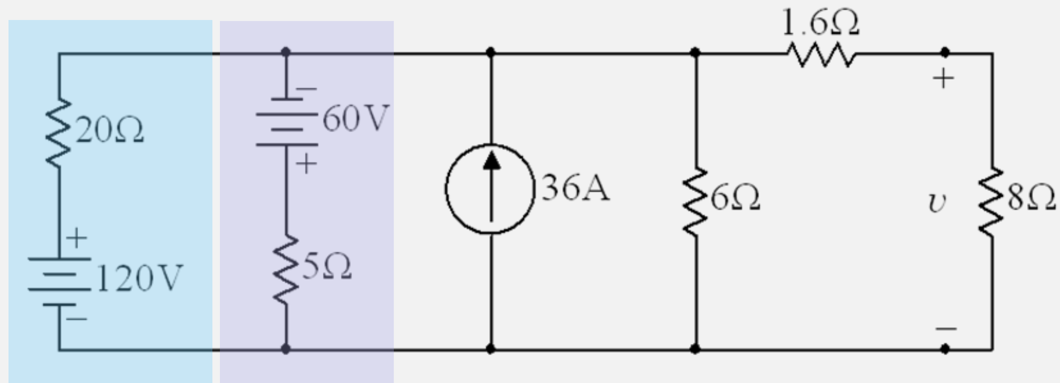
και εσωτερικής αντίστασης R_S





Παράδειγμα 4.19

(α) Χρησιμοποιήστε αλλεπάλληλους μετασχηματισμούς πηγών για να βρείτε την v της εικόνας (α).



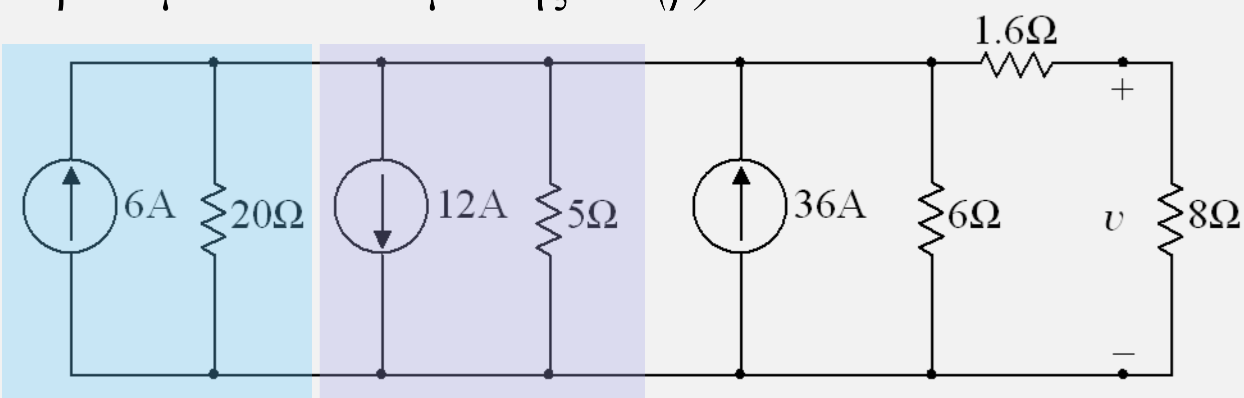
(α)

Λύση

(α) Μπορούμε να μετασχηματίσουμε την πηγή τάσης 120 V σε σειρά με την αντίσταση 20Ω σε ισοδύναμη πηγή ρεύματος 6 A παράλληλα με αντίσταση 20Ω.

Επίσης, την πηγή τάσης 60 V σε σειρά με την αντίσταση 5 Ω σε ισοδύναμη πηγή ρεύματος 12 A παράλληλα με αντίσταση 5 Ω.

Παίρνουμε το κύκλωμα της *εικ (β)*

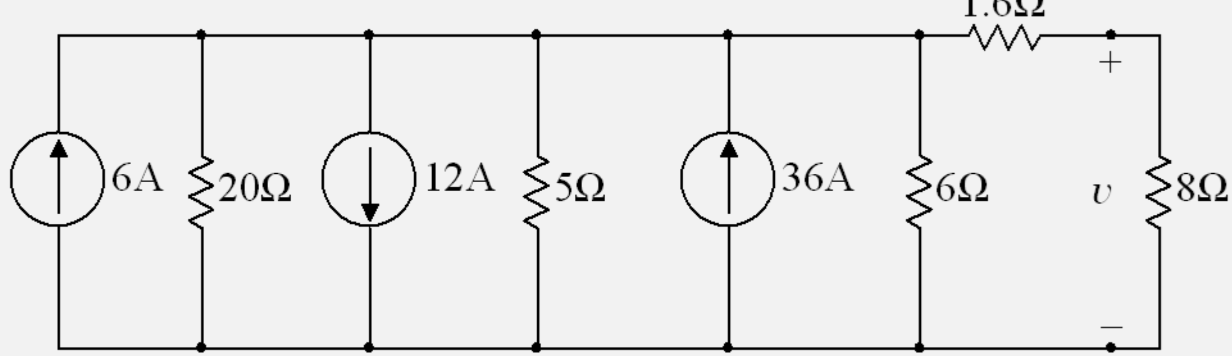


(β)

(*συνεχίζεται*)

Λύση (*… συνέχεια*)

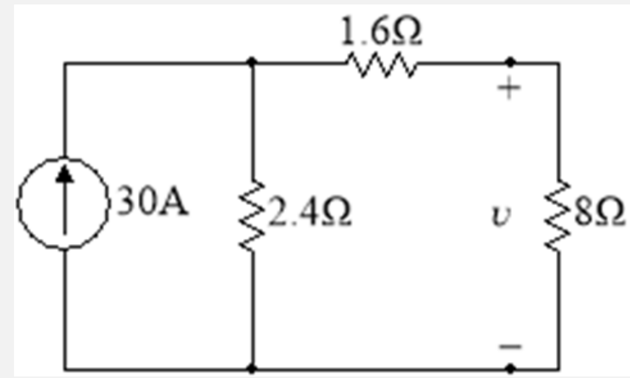
Χρησιμοποιώντας το νόμο ρευμάτων του Kirchhoff, μπορούμε να συνδυάσουμε τις πηγές ρεύματος σε μια πηγή 30 A



(β)

και να αντικαταστήσουμε τις τρεις παράλληλες αντιστάσεις 20Ω, 5Ω και 6Ω με μια αντίσταση 2.4 Ω.

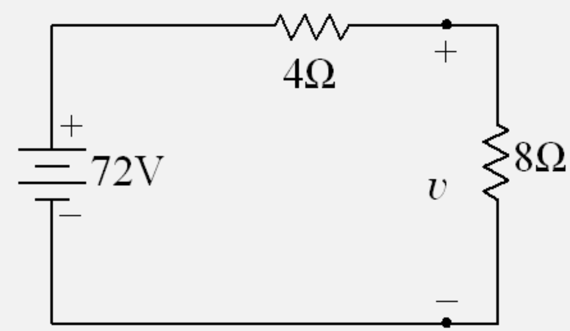
Παίρνουμε το κύκλωμα της *εικ (γ)*.



(γ)

Μετασχηματίζουμε την πηγή ρεύματος 30 A με την παράλληλη αντίσταση 2.4 Ω σε πηγή τάσης 30×2.4 = 72 V σε σειρά με αντίσταση 2.4 Ω η οποία προστίθεται στην 1.6 Ω σε μια ολική αντίσταση 4 Ω.

Έχουμε κύκλωμα της *εικ. (δ)*.



(δ)

Από το κύκλωμα της *εικ. (δ)*, με σχέση διαιρέτη τάσης βρίσκουμε

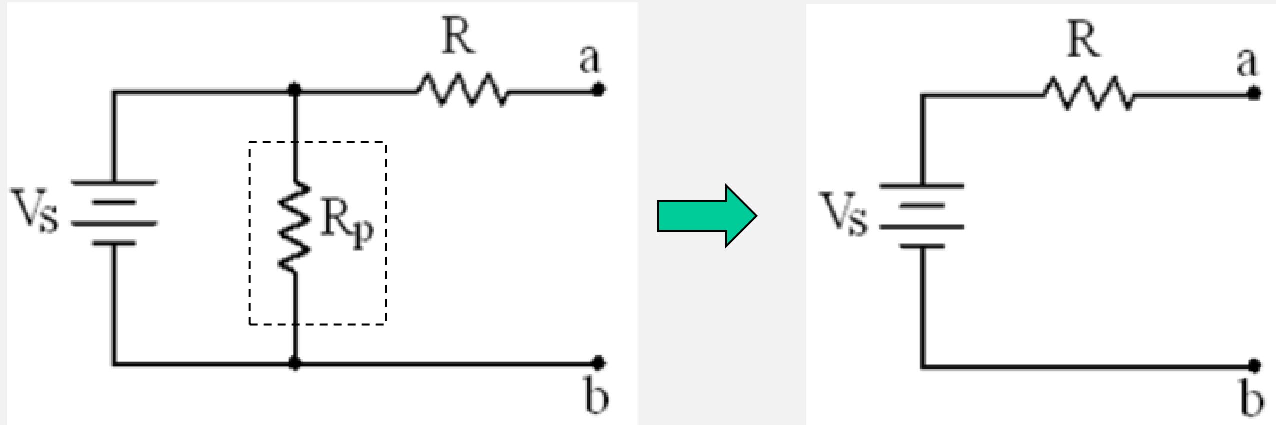
$$v = \frac{8}{4+8} 72\text{V} = \mathbf{48\ V}$$

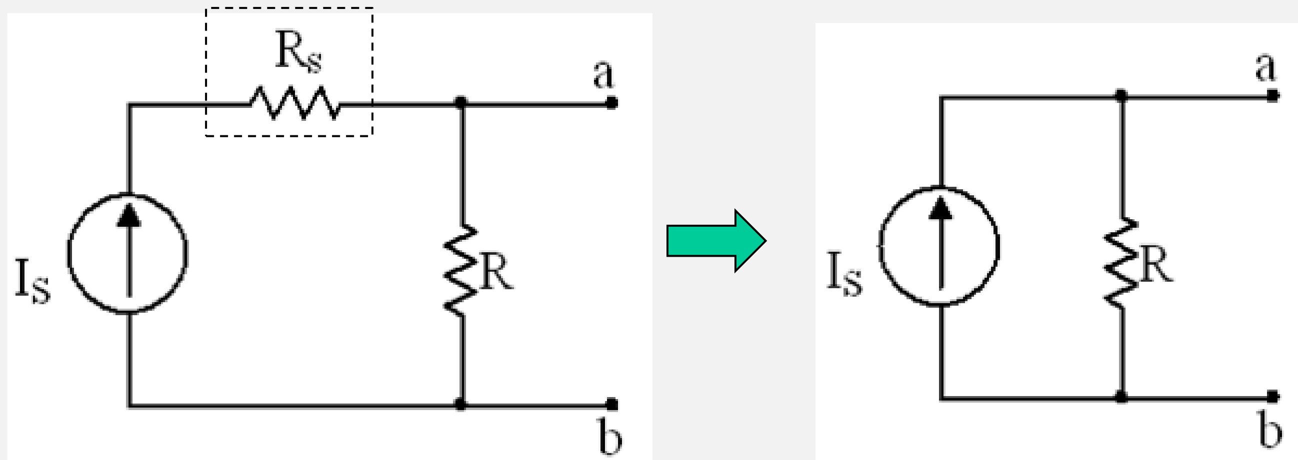
(*συνεχίζεται*)

Τι συμβαίνει αν υπάρχει αντίσταση παράλληλα στην πηγή τάσης ή αντίσταση σε σειρά με την πηγή ρεύματος;

- Και στις δύο περιπτώσεις, η αντίσταση (σε σειρά στην πηγή τάσης ή παράλληλα στην πηγή ρεύματος) δεν έχει καμία επίδραση στο ισοδύναμο κύκλωμα

- Υπολογίζουμε την ισοδύναμη πηγή αγνοώντας την αντίσταση αυτή.

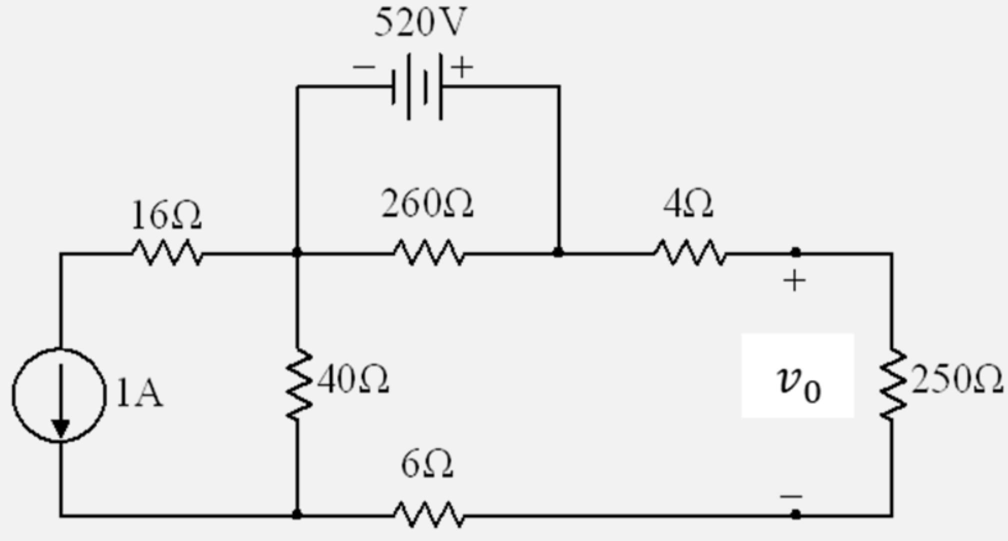




Παράδειγμα 4.20

(α) Χρησιμοποιείστε μετασχηματισμούς πηγών για να βρείτε την v_0 στο κύκλωμα της *εικ. (α)*.

(β) Βρείτε την ισχύ που παράγεται από την πηγή των 520 V.

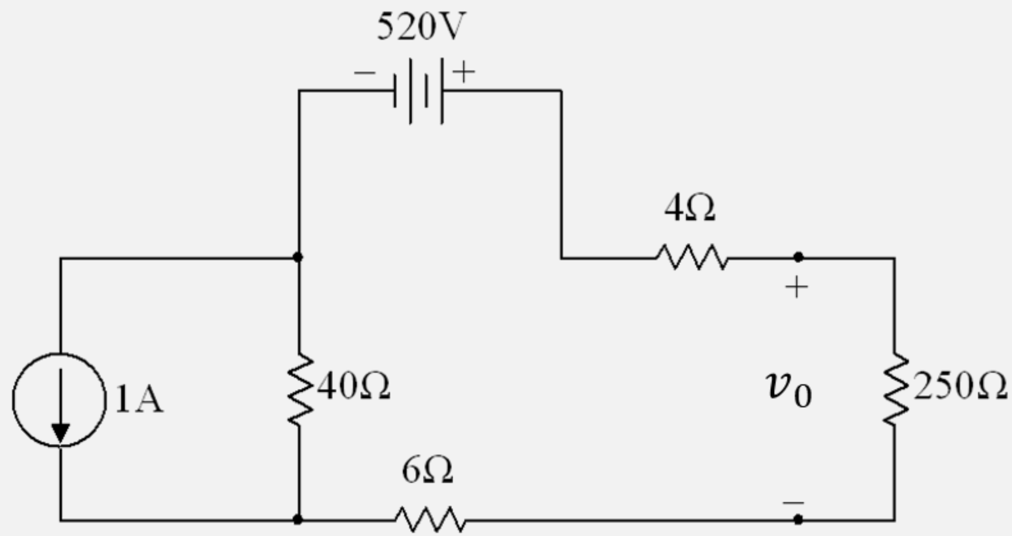


(α)

Λύση

(α) Αφαιρούμε την αντίσταση 16 Ω καθώς είναι σε σειρά με την πηγή ρεύματος και την αντίσταση 260 Ω που είναι παράλληλα στην πηγή τάσης.

Το κύκλωμα γίνεται όπως στην *εικ. (β)*



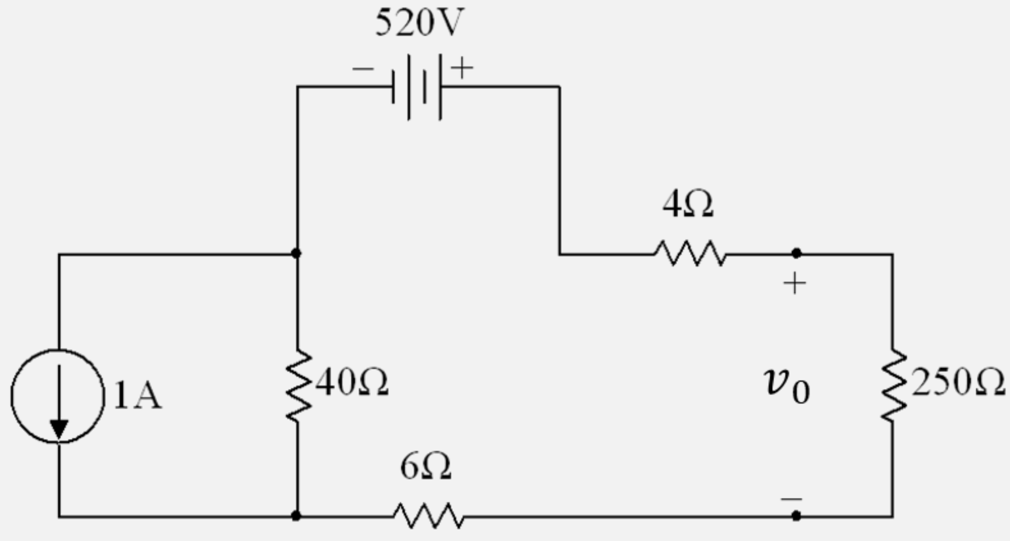
(β)

(συνεχίζεται)

Λύση (*… συνέχεια*)

Στο κύκλωμα της *εικ. (β)* μετασχηματίζουμε την πηγή ρεύματος 1 A με την αντίσταση 40 Ω στην ισοδύναμη πηγή τάσης (1 A)(40 Ω) = 40 V και αντίσταση 40 Ω.

Παίρνουμε το κύκλωμα της εικ. (γ).

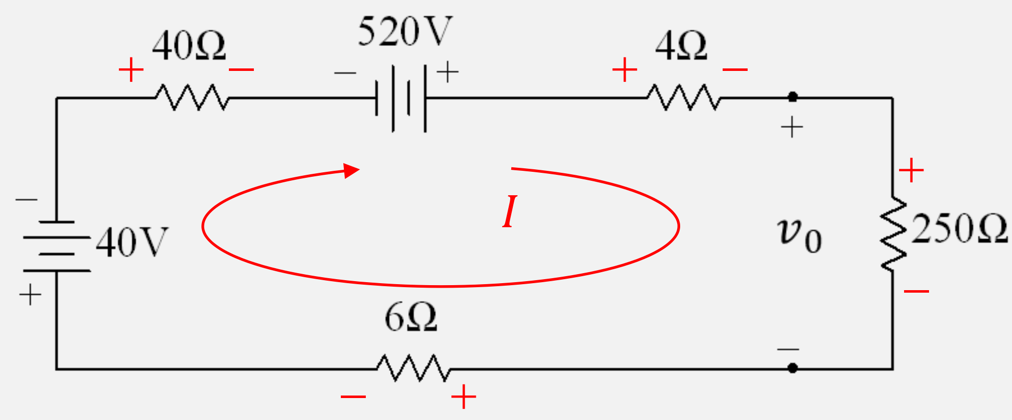


(β)

Εφαρμόζοντας το νόμο των τάσεων του Kirchhoff στον απλό βρόχο του κυκλώματος της εικ. (γ) (θεωρήστε ένα ρεύμα CW), υπολογίζουμε το ρεύμα I

$$-40 - 40I + 520 - 4I - 250I - 6I = 0$$

$$I = 1.6 \text{ A}$$



(γ)

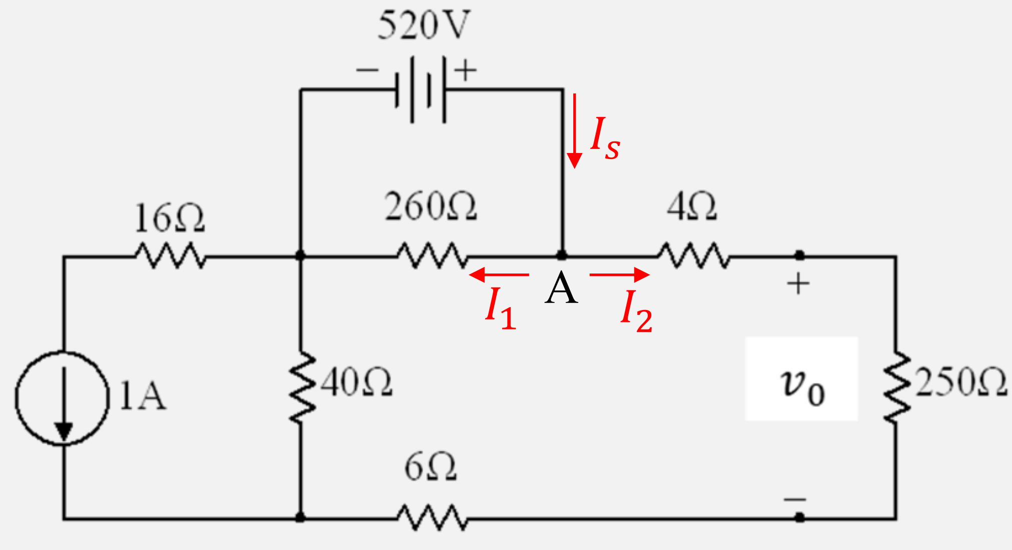
και από το νόμο του Ohm τη ζητούμενη τάση v_0

$$v_0 = 250I = \mathbf{400\ V}$$

Άσκηση: Μπορείτε να βρείτε τη v_0 στην *εικ. (γ)* χρησιμοποιώντας τη σχέση διαιρέτη τάσης;

Λύση (… *συνέχεια*)

(β) Για να βρούμε την ισχύ στην πηγή 520 V, πρέπει να επανέλθουμε στο αρχικό κύκλωμα, *εικ. (α)*, και να υπολογίσουμε το ρεύμα (έστω I_s) που τη διαρρέει.



(α)

Εφαρμόζοντας το νόμο των ρευμάτων του Kirchoff, π.χ. στον κόμβο A, έχουμε (ας υποθέσουμε I_1 και I_2 τα άλλα ρεύματα στον κόμβο)

$$I_s = I_1 + I_2$$

που από το νόμο του Ohm στις αντιστάσεις 260Ω και 250Ω γίνεται

$$I_s = \frac{520}{260} + \frac{v_0}{250}$$

$$I_s = \frac{520}{260} + \frac{400}{250} = 3.6\ A$$

Επομένως, η ισχύς που παράγει η πήγή τάσης είναι $P_{520V} = (520V)(3.6A) =$ $\mathbf{1872\ W}$

Ισοδύναμα κυκλώματα Thevenin και Norton

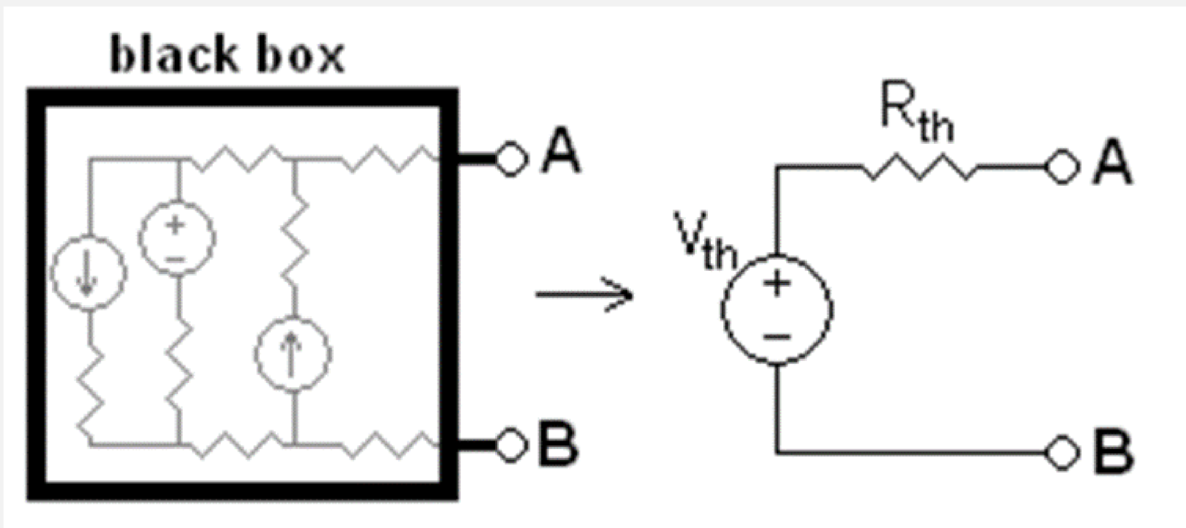
(Thevenin and Norton equivalents)

- Τι είναι και πως βρίσκουμε το ισοδύναμο Thevenin ενός κυκλώματος.
- Ισοδύναμο Norton κυκλώματος

Θεώρημα Thevenin

Τα δύο κυκλώματα λέγονται **ισοδύναμα** (equivalent circuits) **ως προς τους ακροδέκτες τους A και B** όταν σε ένα οποιοδήποτε φορτίο συνδέεται σε αυτούς παρέχουν την ίδια τάση και ρεύμα.

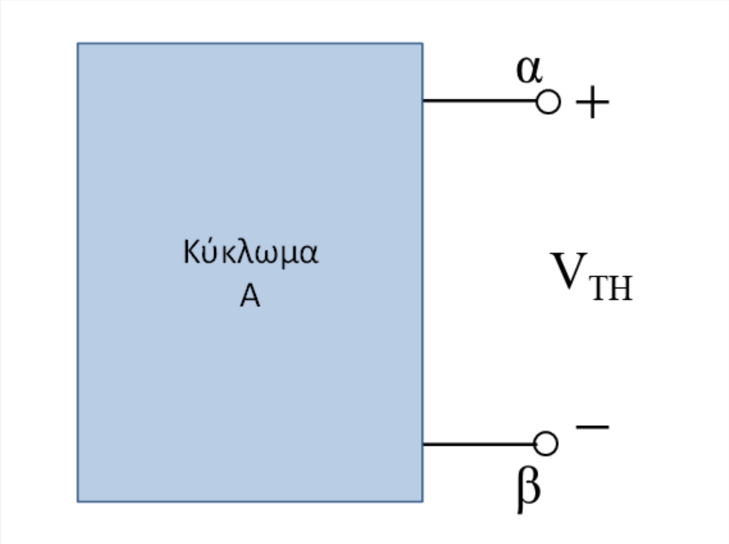
Το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin οποιουδήποτε γραμμικού **κυκλώματος δύο ακροδεκτών** αποτελείται από μια ισοδύναμη πηγή τάσης (V_{th}) και μια ισοδύναμη αντίσταση (R_{th})

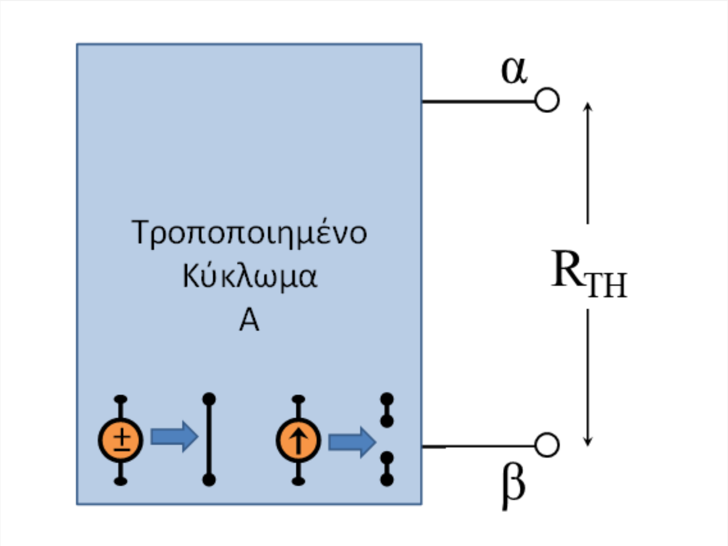


Ισοδύναμη Τάση (V_{TH}) και Ισοδύναμη Αντίσταση (R_{TH}) Thevenin

- Η **ισοδύναμη τάση Thevenin (V_{TH})** ενός κυκλώματος **ως προς δύο ακροδέκτες του α και β** είναι η τάση ανοικτού κυκλώματος (χωρίς φορτίο) μεταξύ των δύο αυτών ακροδεκτών του κυκλώματος.

- Η **ισοδύναμη αντίσταση Thevenin (R_{TH}) ως προς τους δύο ακροδέκτες** είναι η ολική αντίσταση που φαίνεται μεταξύ των ακροδεκτών αυτών όταν άλλες οι ανεξάρτητες πηγές τάσης στο κύκλωμα αντικατασταθούν με βραχυκυκλώματα και όλες οι ανεξάρτητες πηγές ρεύματος αντικατασταθούν με ανοικτά κυκλώματα (τροποποιημένο κύκλωμα).



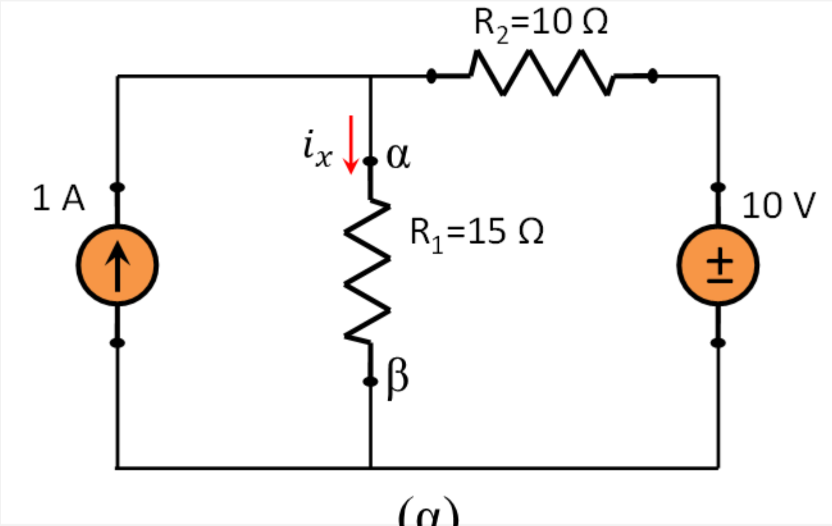


Προσοχή: Τυχόν εξαρτημένες πηγές μένουν πάντα ενεργές

Παράδειγμα 4.22

(α) Βρείτε το ισοδύναμο Thevenin μεταξύ των ακροδεκτών α και β του κυκλώματος της εικόνας (α).

(β) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα από το (α) για να υπολογίσετε το ρεύμα i_x που διαρρέει την αντίσταση R_1.



(α)

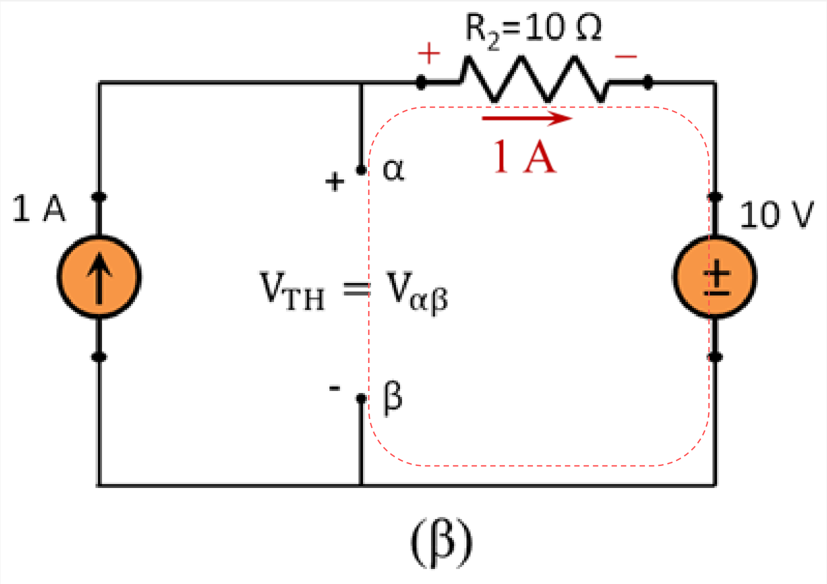
Λύση

(α) Αφαιρούμε την αντίσταση R_1 και υπολογίζουμε την τάση $V_{\alpha\beta}$ ανοικτού κυκλώματος μεταξύ των σημείων α και β, *εικ. (β)*.

Το ρεύμα στον απλό βρόχο είναι το ρεύμα της πηγής 1 A.

Εφαρμόζοντας, π.χ., νόμο τάσεων Kirchhoff σε μια διαδρομή που περιλαμβάνει τη ζητούμενη τάση $V_{\alpha\beta}$, έχουμε

$$V_{TH} = V_{\alpha\beta} = (1\text{ A}) \cdot (10\ \Omega) + 10\text{ V} = 20\text{ V}$$



(β)

(συνεχίζεται . . .)

Λύση (… συνέχεια)

Για τον υπολογισμό της ισοδύναμης αντίστασης μεταξύ α και β, μηδενίζουμε τις πηγές, *εικ. (γ)*

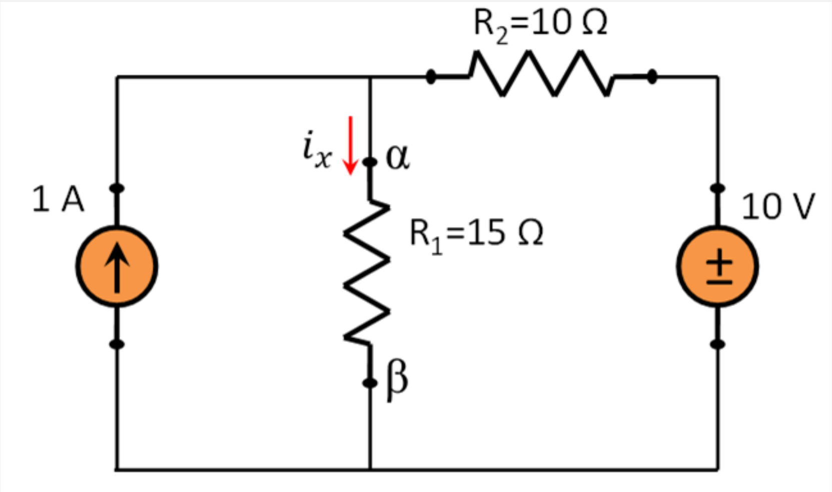
- βραχυκυκλώνουμε την πηγή 10 V και
- ανοίγουμε την πηγή ρεύματος 1 A

Παίρνουμε το κύκλωμα της εικ. (γ)

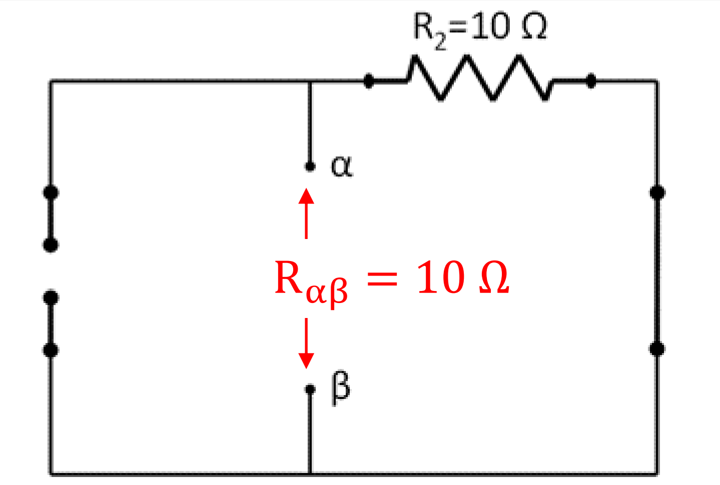
Η αντίσταση $\mathrm{R}_{\alpha\beta}$ που φαίνεται από τους ακροδέκτες α και β είναι η R_2, 10 Ω.

Οπότε: $\mathrm{R}_{\mathrm{TH}} = \mathrm{R}_{\alpha\beta} = 10\ \Omega$

(συνεχίζεται . . .)



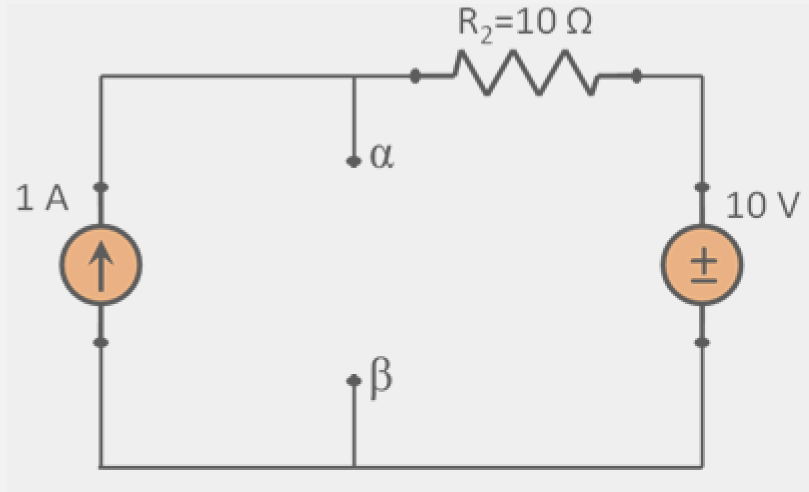
(α)



(γ)

Λύση (… συνέχεια)

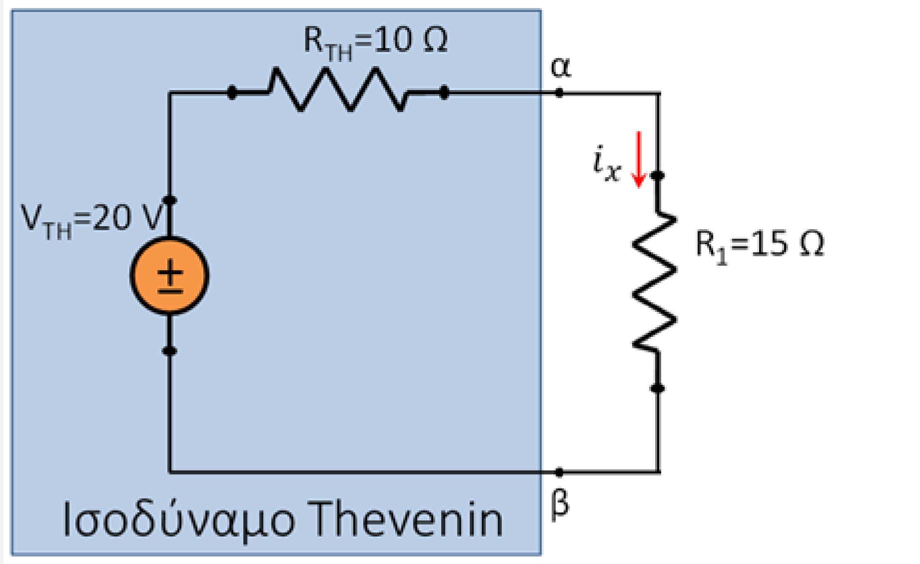
Το ισοδύναμο Thevenin του αρχικού κυκλώματος μεταξύ των σημείων α και β φαίνεται στο αριστερό μέρος της *εικ. (δ)*



Αρχικό κύκλωμα

(β) Επανατοποθετούμε την αντίσταση R_1 και βρίσκουμε εύκολα το ζητούμενο ρεύμα i_x

$$i_x = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_1} = 0.8 \text{ A}$$

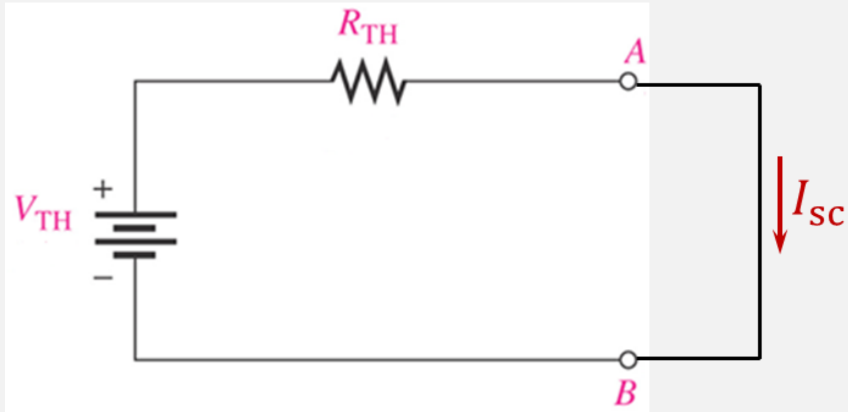


(δ)

Έλεγξε την απάντηση με το κύκλωμα *Example 4_22* στο MulisimLive group *ECE-UOWM MK18*

Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμούς της R_{TH}

Η μέθοδος μηδενισμού των πηγών για τον υπολογισμό της R_{TH} είναι η απλούστερη αλλά μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε κυκλώματα με ανεξάρτητες πηγές.



Στην περίπτωση ύπαρξης εξαρτημένων πηγών,

- αφού υπολογιστεί η ισοδύναμη τάση Thevenin (V_{TH}) του κυκλώματος ως προς δύο ακροδέκτες A και B,

- η ισοδύναμη αντίσταση Thevenin (R_{TH}) υπολογίζεται βραχυκυκλώνοντας τους ακροδέκτες και υπολογίζοντας το ρεύμα βραχυκυκλώματος (short circuit), I_{sc}

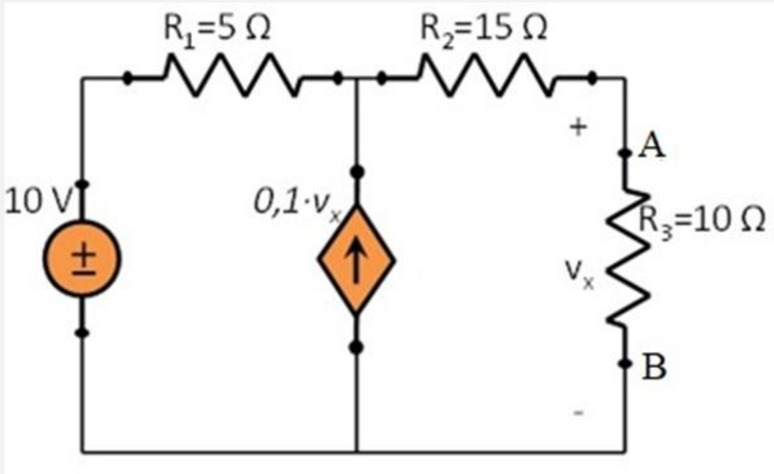
Από αυτό, με το νόμο του Ohm), έχουμε

$$R_{\mathrm{TH}} = \frac{V_{\mathrm{TH}}}{I_{\mathrm{sc}}}$$

Παράδειγμα 4.24

(α) Βρείτε το ισοδύναμο Thevenin μεταξύ των ακροδεκτών A και B του κυκλώματος της εικόνας (α).

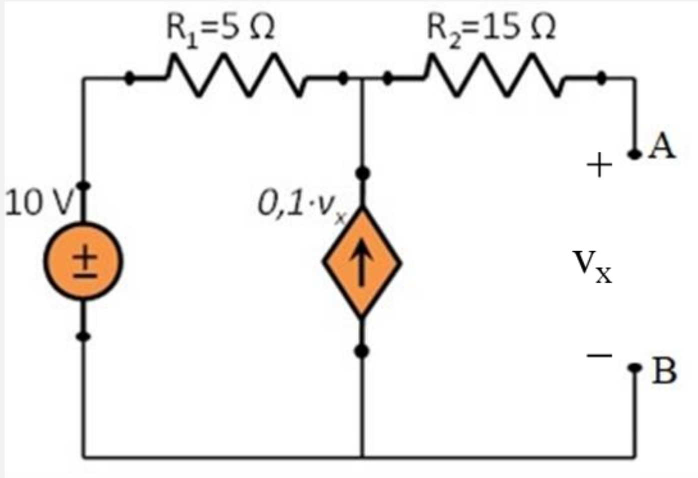
(β) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα από το (α) για να υπολογίσετε την τάση v_x στα άκρα της αντίστασης R_3.



(α)

Λύση

Αφαιρούμε την αντίσταση R_3 για να δημιουργήσουμε τους ελεύθερους ακροδέκτες για τους οποίους θα υπολογίσουμε το ισοδύναμο Thevenin, *εικ. (β)*.



(β)

Η τάση μεταξύ των ακροδεκτών συμβαίνει να συμπίπτει με τη ζητούμενη τάση v_x,

$$v_x = V_{AB}$$

η οποία ελέγχει την εξαρτημένη πηγή ρεύματος $0.1{\cdot}v_x$

(συνεχίζεται . . .)

Λύση (… *συνέχεια*)

Η πτώση τάσης στην R_2 είναι μηδενική διότι δεν διαρρέεται από ρεύμα.

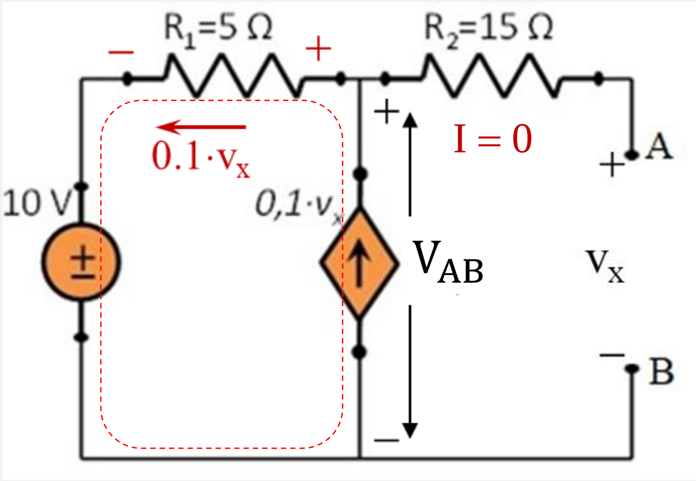
Συνεπώς, η τάση στα άκρα της πηγής ρεύματος είναι V_{AB}.

Γράφοντας το νόμο τάσεων Kirchhoff στον κλειστό βρόχο που διαρρέεται από το ρεύμα της πηγής $0.1 \cdot v_x$, έχουμε

$$10 + (0.1 \cdot v_x)(5\ \Omega) - V_{AB} = 0$$

και θέτοντας $v_x = V_{AB}$, βρίσκουμε

$$V_{AB} = V_{TH} = \mathbf{20}\ \boldsymbol{V}$$

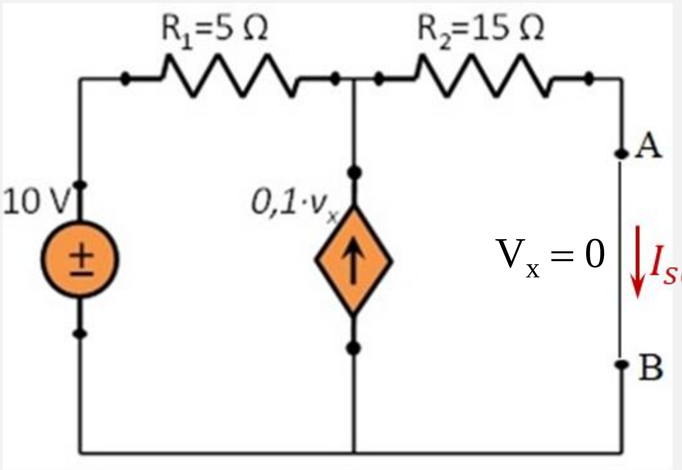


(β)

(*συνεχίζεται . . .*)

Λύση *(… συνέχεια)*

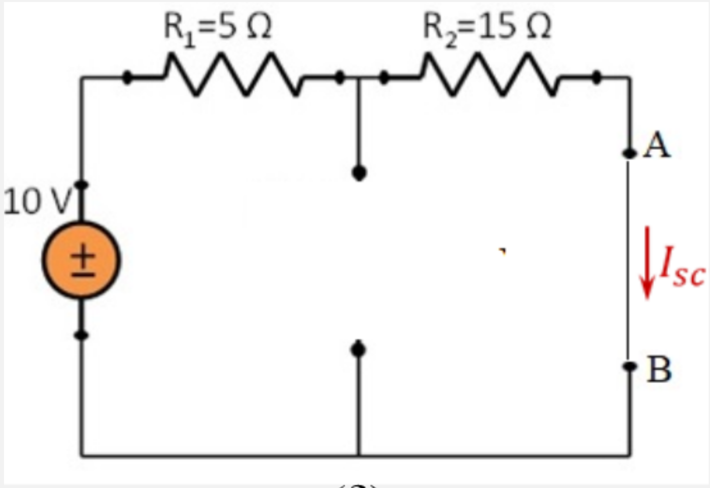
Για τον υπολογισμό της R_{TH}, βραχυκυκλώνουμε τους ακροδέκτες A και B προκειμένου να βρούμε το ρεύμα βραχυκυκλώματος I_{sc}, *εικ. (γ)*.



(γ)

Προσέξτε, τότε $v_x = V_{AB} = 0$, οπότε η πηγή ρεύματος μηδενίζεται (αντιστοιχεί σε ανοικτό κύκλωμα).

Το κύκλωμα καταλήγει στην *εικ. (δ)*.



(δ)

Από το νόμο του Ohm, έχουμε

$$\mathrm{I_{sc}} = \frac{10\ V}{R_1 + R_2} = 0.5\ A$$

Συνεπώς, η αντίσταση Thevenin είναι

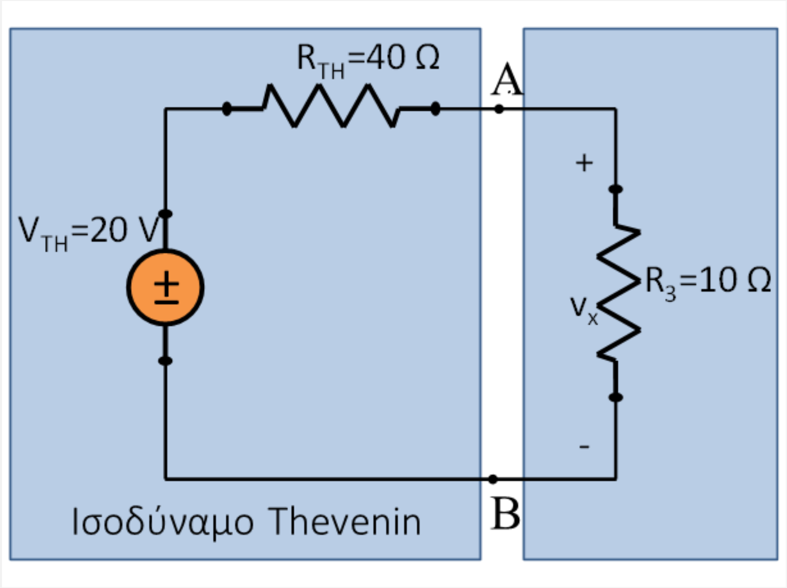
$$R_{\mathrm{TH}} = \frac{V_{\mathrm{TH}}}{I_{\mathrm{sc}}}$$

$$R_{\mathrm{TH}} = \frac{20}{0.5} = \mathbf{40\ \Omega}$$

(συνεχίζεται . . .)

Λύση (… <u>συνέχεια</u>)

Το ισοδύναμο Thevenin ως προς τους ακροδέκτες A και B του αρχικού κυκλώματος φαίνεται στο αριστερό μέρος του κυκλώματος της *εικ. (ε)*.



(ε)

(β) Επανατοποθετώντας την αντίσταση R_3, με εφαρμογή της σχέσης διαιρέτη τάσης, βρίσκουμε τη ζητούμενη τάση της v_x

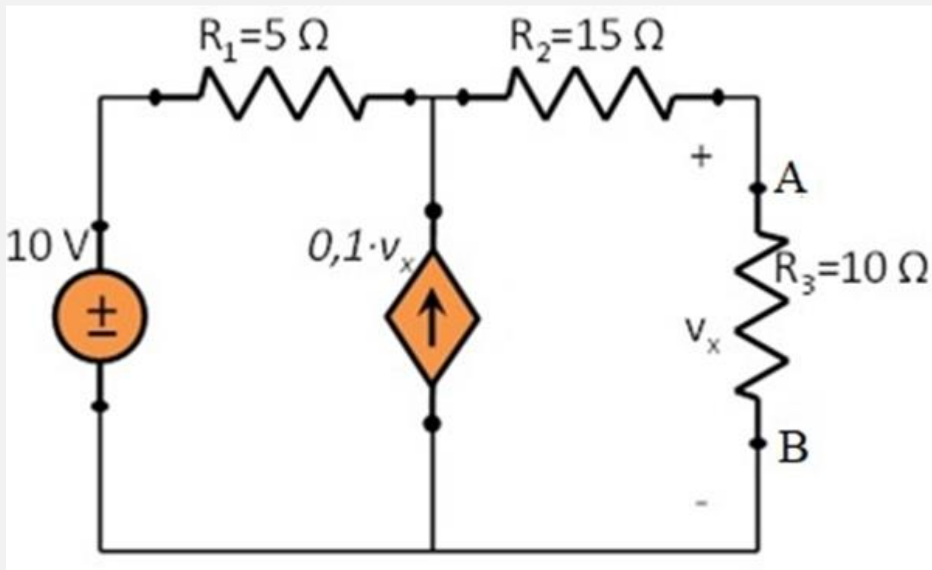
$$v_x = \frac{R_3}{R_{TH} + R_3} V_{TH}$$

$$v_x = \frac{10}{40 + 10} 20$$

$$\mathbf{v_x = 4\ V}$$

Πρόβλημα

Χρησιμοποιώντας το Multisim Live, βρείτε την ισοδύναμη τάση V_{TH} και την ισοδύναμη αντίσταση R_{TH} μεταξύ των ακροδεκτών A και B του κυκλώματος του Παραδείγματος 4.24

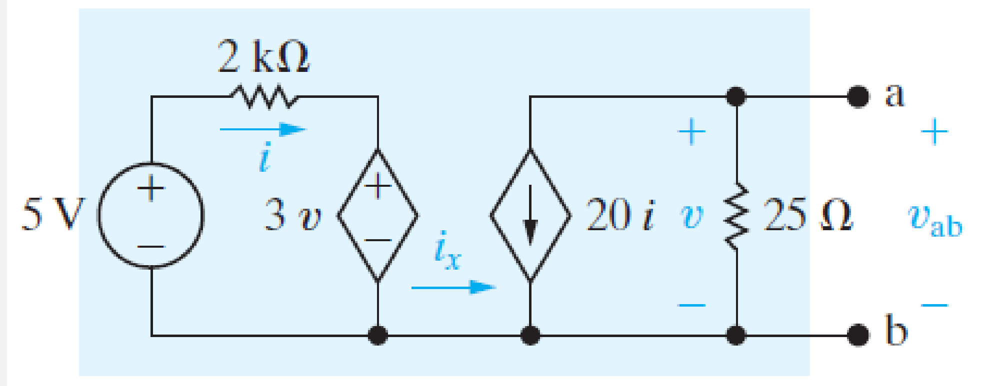


(α)

Το κύκλωμα του Παραδείγματος 4.24

Παράδειγμα 4.25

Βρείτε το ισοδύναμο Thévenin για το κύκλωμα της εικόνας



Λύση

Το πρώτο βήμα στην ανάλυση κυκλώματος αυτής της μορφής είναι να αναγνωρίσουμε ότι i_x πρέπει να είναι μηδέν (γιατί;)

Συνεπώς

$$V_{Th} = v_{ab} = v = -(20i)(25) = -500i \qquad (1)$$

και το ρεύμα i είναι

$$i = \frac{5 - 3v}{2000} = \frac{5 - 3V_{Th}}{2000} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε

$$\boldsymbol{V_{Th} = -5\ \mathrm{V}}$$

(συνεχίζεται . . .)

Λύση *(συνέχεια)*

Για να υπολογίσουμε το ρεύμα βραχυκυκλώματος, τοποθετούμε ένα βραχυκύκλωμα μεταξύ a, b.

Τότε, $v = 0$ και το κύκλωμα γίνεται όπως στην εικ. (β).

Αυτό έχει σαν συνέπεια, πρώτον, η πηγή τάσης $3v$ μηδενίζεται, οπότε, το ρεύμα

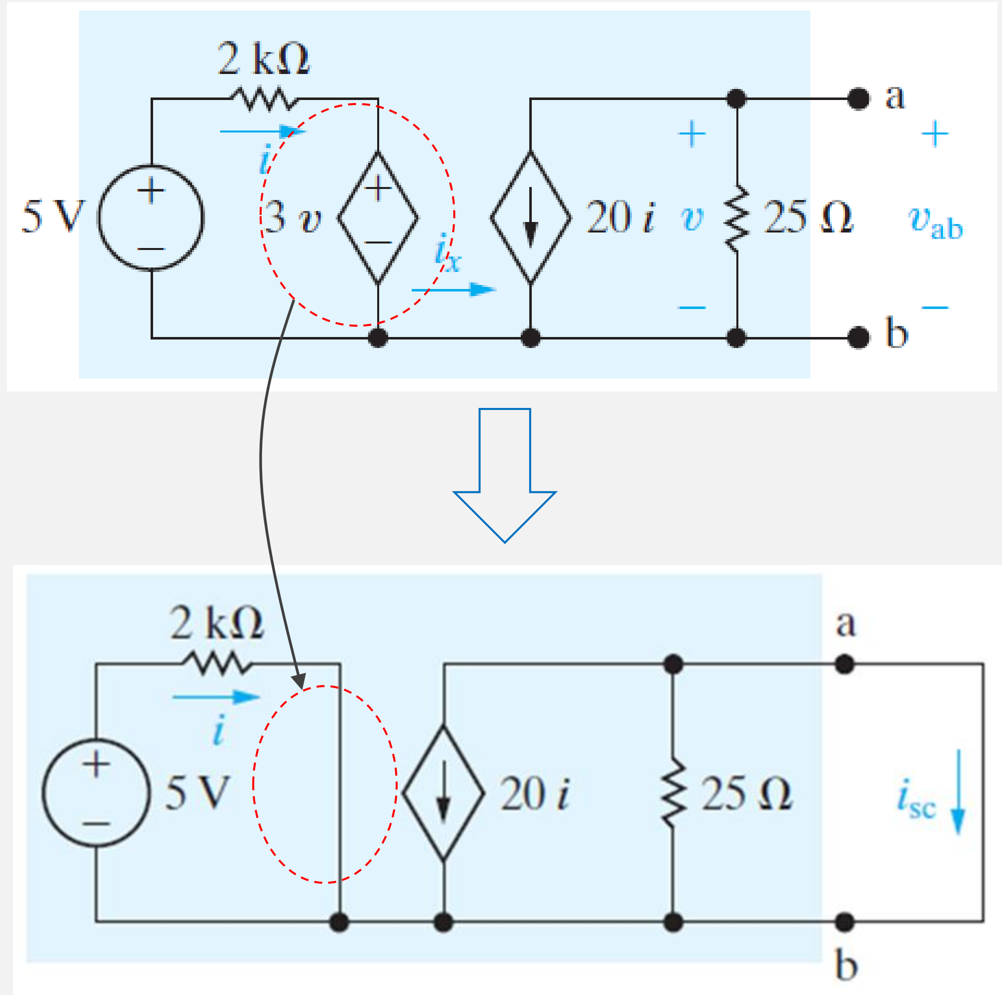
$$i = \frac{5 \text{ V}}{2000\ \Omega} = 2.5\ mA$$

δεύτερον, $i_{sc} = -20i$ (η αντίσταση 25 Ω βραχυκυκλωμένη)

Έτσι, $i_{sc} = -20i = -50$ mA

οπότε,

$$R_{th} = \frac{V_{Th}}{i_{sc}} = \frac{-5}{-50 \text{ mA}} = \mathbf{100\ \Omega}$$

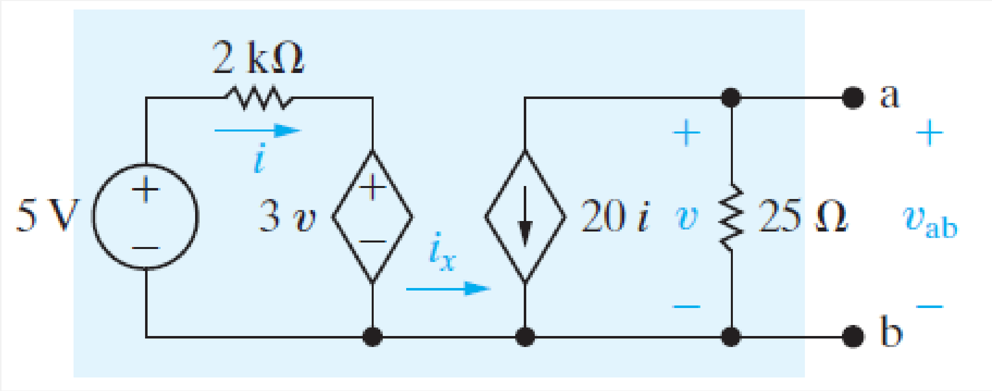


(β)

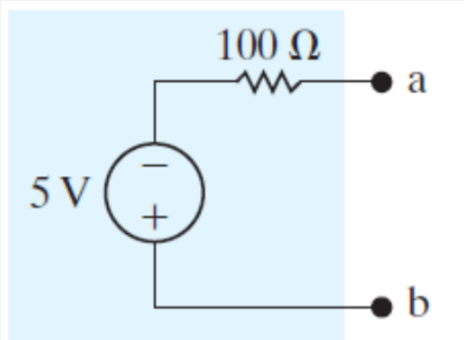
(συνεχίζεται . . .)

Λύση *(συνέχεια)*

Η εικ. (γ) φαίνεται το ισοδύναμο Thevenin ως προς τους ακροδέκτες a και b του αρχικού κυκλώματος



Αρχικό κύκλωμα



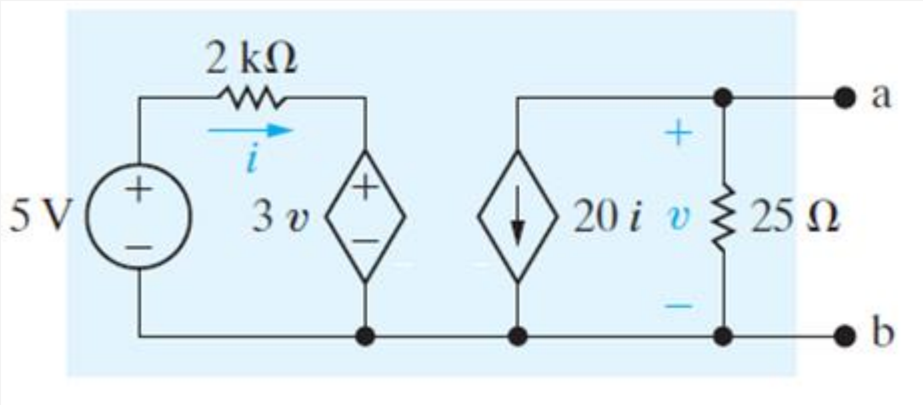
Ισοδύναμο Thevenin
(γ)

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού της R_{TH} σε κυκλώματα με εξαρτημένες πηγές

- Απενεργοποιούμε πρώτα όλες τις ανεξάρτητες πηγές
- Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε είτε μια δοκιμαστική πηγή τάσης (V_T) είτε μια δοκιμαστική πηγή ρεύματος (I_T) στους ακροδέκτες Thévenin a και b.
- Η αντίσταση Thévenin R_{TH} ισούται με το πηλίκο της τάσης στα άκρα της δοκιμαστικής πηγής προς το ρεύμα που δίνει η δοκιμαστική πηγή.

Παράδειγμα 4.26

Βρείτε την αντίσταση Thévenin για το κύκλωμα εφαρμόζοντας μια δοκιμαστική πηγή τάσης μεταξύ των ακροδεκτών a και b

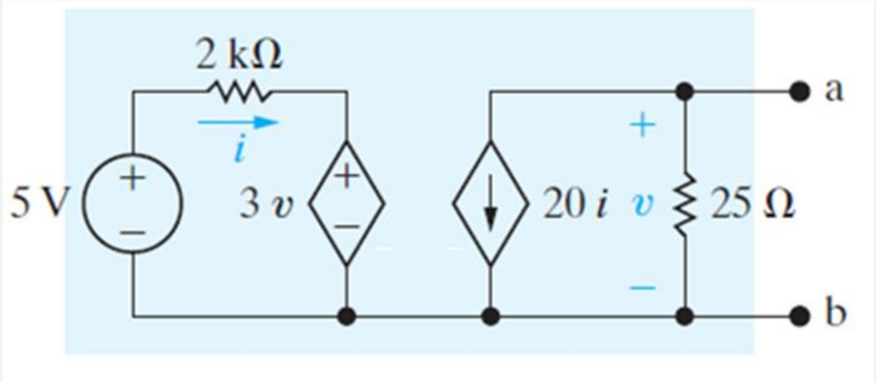


(συνεχίζεται . . .)

Παράδειγμα 4.26

Λύση

Απενεργοποιούμε ρώτα την ανεξάρτητη πηγή τάσης και εφαρμόζουμε μια δοκιμαστική πηγή τάσης (v_T). Το κύκλωμα γίνεται όπως στην εικ. (β).



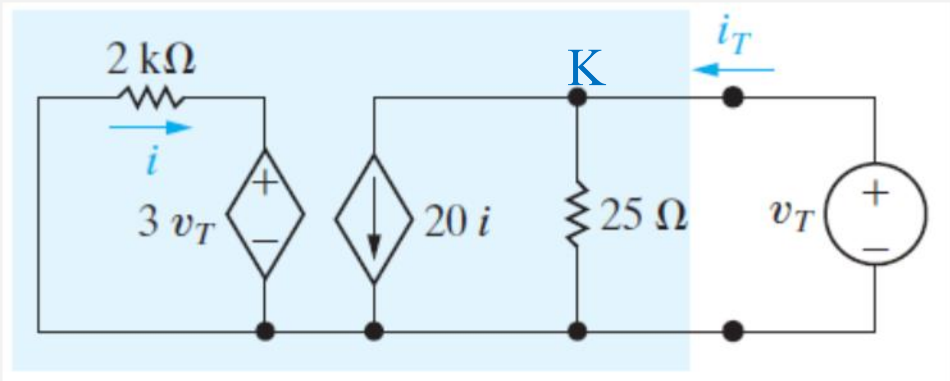
Αρχικό κύκλωμα

Έχουμε, (νόμος ρευμάτων, κόμβος K)

$$i_T = \frac{v_T}{25} + 20i \quad (1)$$

και (νόμος Ohm στη 2 kΩ)

$$i = -\frac{3v_T}{2000} \quad (2)$$



(β)

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε

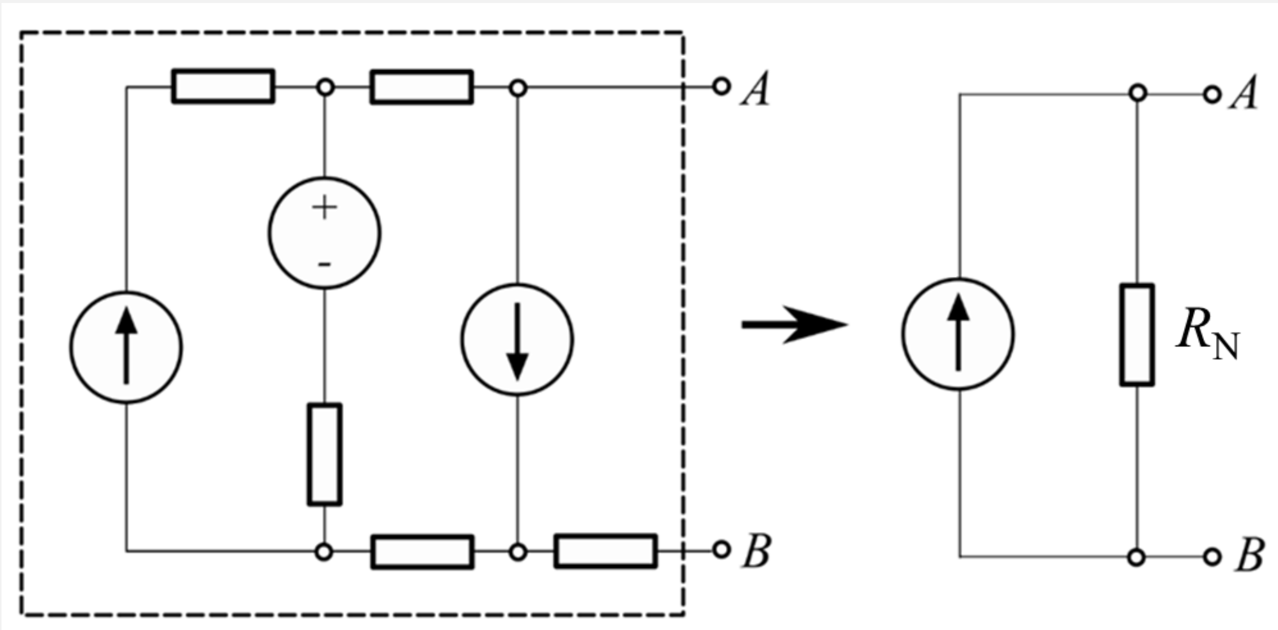
$$i_T = \frac{v_T}{25} + 20\left(-\frac{3v_T}{2000}\right) \Rightarrow i_T = \frac{v_T}{100}$$

$$R_{Th} = v_T/i_T = \mathbf{100\ \Omega}$$

Θεώρημα Norton

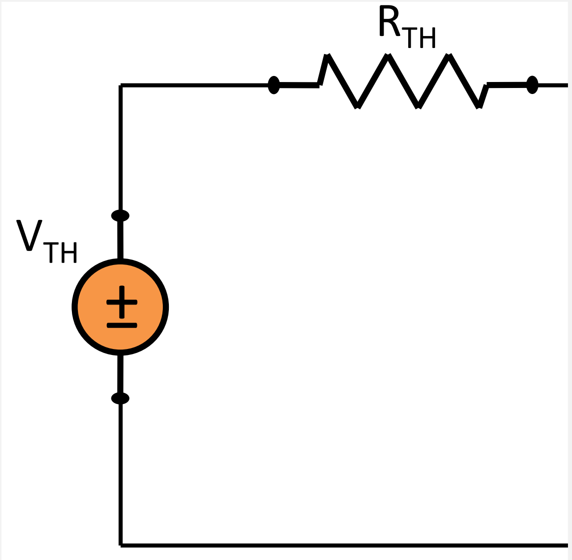
Σε αντιστοιχία με το θεώρημα Thevenin, το θεώρημα Norton (Norton theorem) μας παρέχει μια μέθοδο για την απλοποίηση ενός οποιουδήποτε γραμμικού κυκλώματος με τη μετατροπή του σε ένα στάνταρ ισοδύναμο κύκλωμα δύο ακροδεκτών αποτελούμενο από

- μια ισοδύναμη πηγή ρεύματος (I_N) και
- μια ισοδύναμη αντίσταση (R_N)



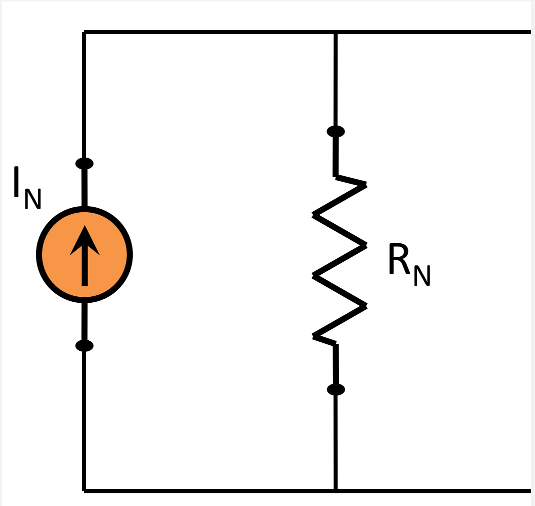
Σχέση μεταξύ ισοδυνάμων Thevenin και Norton

Μπορούμε να βγάλουμε το ισοδύναμο κύκλωμα Norton από το αντίστοιχο Thevenin, απλά εφαρμόζοντας έναν μετασχηματισμό πηγών.



$$I_N = \frac{V_{TH}}{R_{TH}}$$

Η αντίσταση Norton ταυτίζεται με την αντίσταση Thevenin



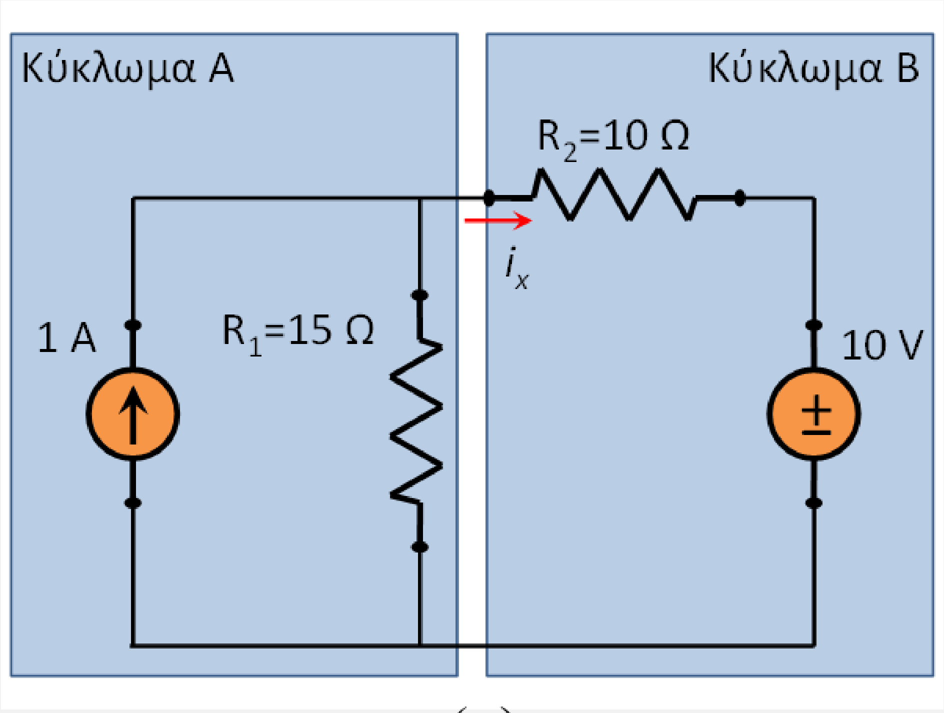
$$R_N = R_{TH}$$

Παρατηρήσεις πάνω στα θεωρήματα Thevenin και Norton

Κατά την εφαρμογή των θεωρημάτων Thevenin και Norton, χωρίζουμε το κύκλωμά μας σε δύο μέρη: Κύκλωμα A και Κύκλωμα B.

Συνήθως, σαν Κύκλωμα B επιλέγουμε μια αντίσταση στην οποία ζητάμε ρεύμα ή ισχύ.

Πιθανόν, όμως, σαν Κύκλωμα B να χρειάζεται να επιλέξουμε έναν ευρύτερο συνδυασμό στοιχείων του αρχικού κυκλώματος



(α)

Παρατηρήσεις πάνω στα θεωρήματα Thevenin και Norton

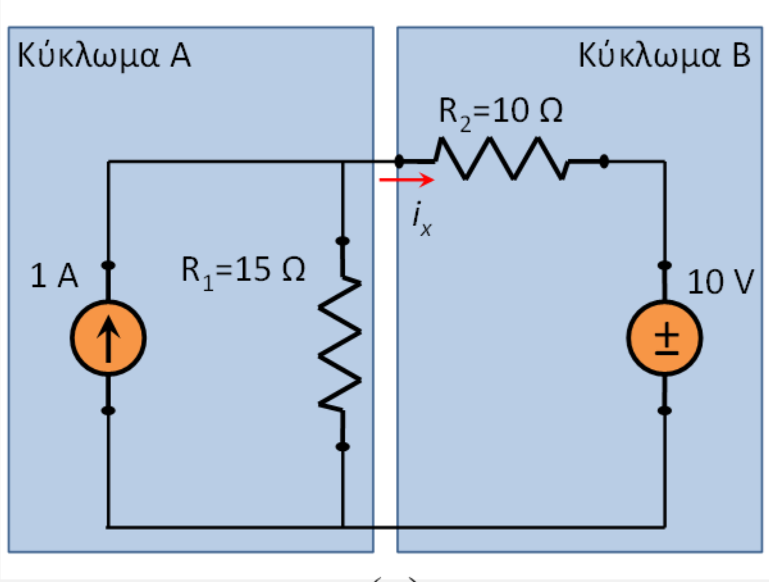
Παράδειγμα 4.27

Στην *εικ. (α)*, ζητείται το ρεύμα i_x .

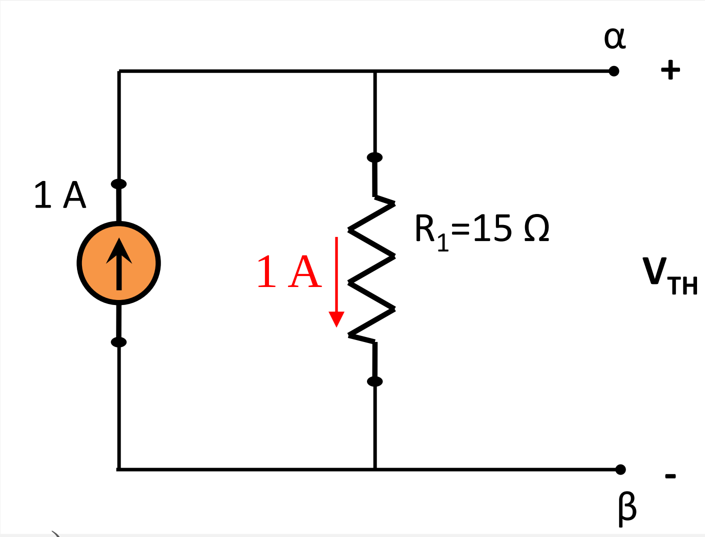
Αν επιλέξουμε το Κύκλωμα Β, το ισοδύναμο Thevenin που προκύπτει είναι

$$V_{TH} = V_{\alpha\beta} = (1A)(15\Omega) = 15\ V$$

$$R_{TH} = R_{\alpha\beta} = 15\ \Omega$$



(α)

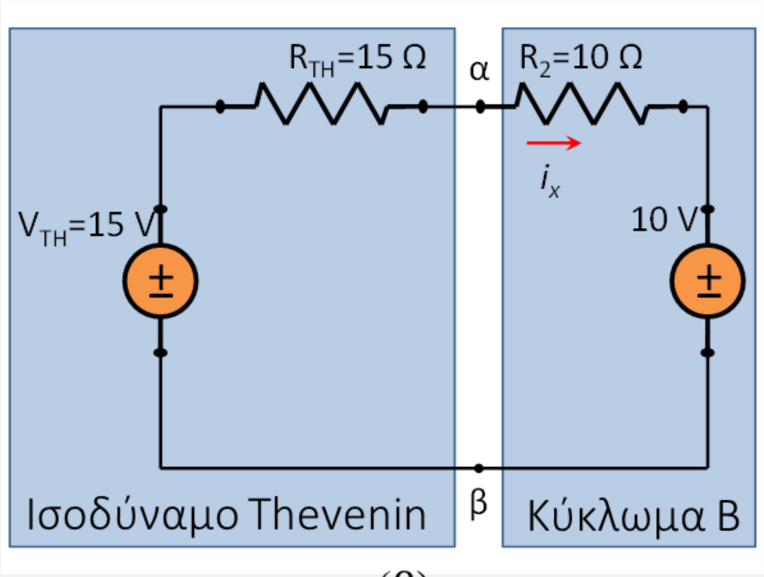


(συνεχίζεται . . .)

(… *συνέχεια*)

$$\mathrm{V_{TH}} = 15\ \mathrm{V}$$

$$\mathrm{R_{TH}} = 15\ \Omega$$



(β)

Επανασυνδέοντας στο ισοδύναμο Thevenin το Κύκλωμα Β, έχουμε τον απλό βρόχο της *εικ. (β)*.

Το ζητούμενο ρεύμα i_x που διαρρέει την αντίσταση R_2 είναι:

$$i_x = \frac{V_{TH} - 10\ V}{R_{TH} + R_2} = \frac{15\ V - 10\ V}{15\ \Omega + 10\ \Omega} = 0.2\ \mathrm{A}$$

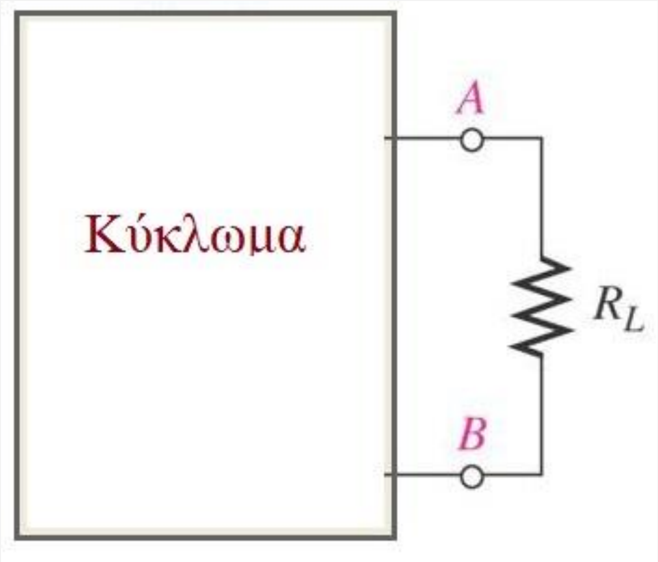
Παρατήρηση

Από ένα δοσμένο κύκλωμα μπορούμε να φτιάξουμε πολλά ισοδύναμα. Συνήθως ένα από αυτά απλουστεύει πολύ τους υπολογισμούς μας.

Μέγιστη μεταφορά ισχύος

(Maximum power transfer)

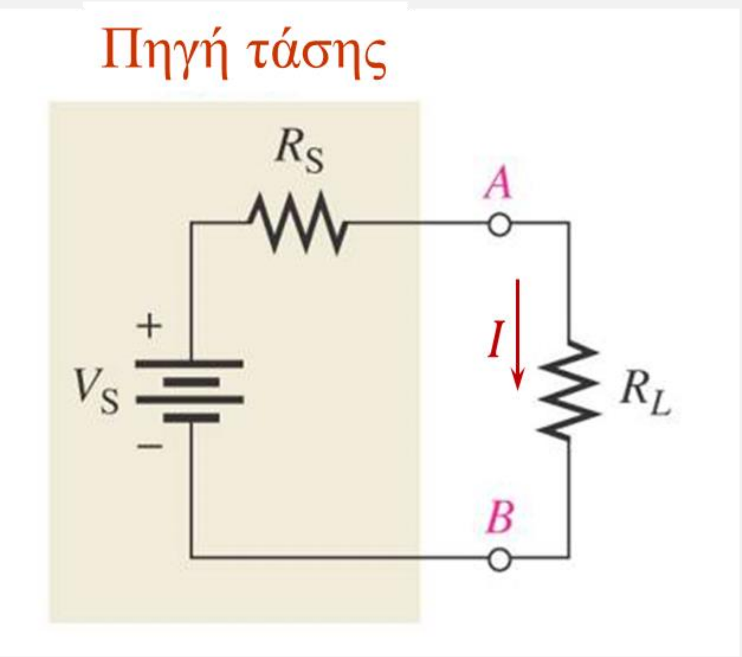
Πως υπολογίζουμε την τιμή φορτίου R_L για την οποία η μεταφερόμενη ισχύς σε αυτό από το Κύκλωμα μεγιστοποιείται.



Πότε η ισχύς που αποδίδεται σε ένα φορτίο είναι μέγιστη

Από το νόμο του Ohm, το ρεύμα στο φορτίο είναι

$$I = \frac{V_S}{R_S + R_L}$$



Η ισχύς που μεταφέρεται (από την πηγή) σε αυτό είναι

$$P_L = I^2 R_L$$

$$P_L = \frac{R_L}{(R_S + R_L)^2} V_S^2$$

Η ισχύς γίνεται μέγιστη για την τιμή του φορτίου που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0$$

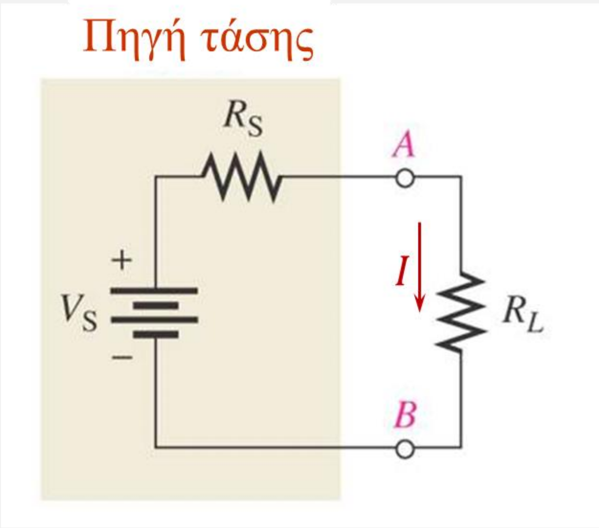
$$\frac{R_S - R_L}{(R_S + R_L)^3} V_S^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_L = R_S$$ Συνθήκη μεγιστοποίησης ισχύος

Το Θεώρημα Μέγιστης Μεταφοράς Ισχύος

- Η ισχύς P_L, που μεταφέρεται από μια πηγή τάσης V_S και εσωτερικής αντίστασης R_S, σε ένα εξωτερικό φορτίο R_L γίνεται μέγιστη όταν $R_L = R_S$.

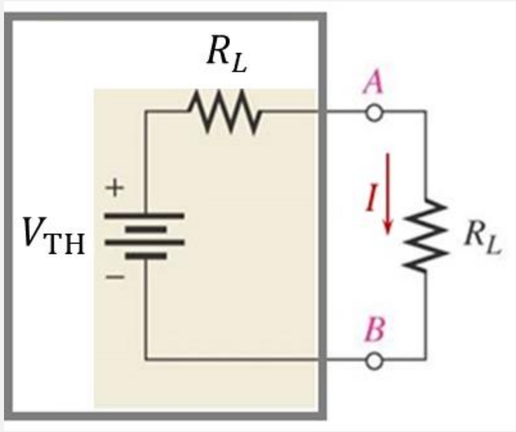
- Η μέγιστη ισχύς που μεταφέρεται (καταναλώνεται) στο φορτίο δίνεται από τη σχέση

$$P_{L,max} = \frac{V_S^2}{4 \cdot R_L}$$



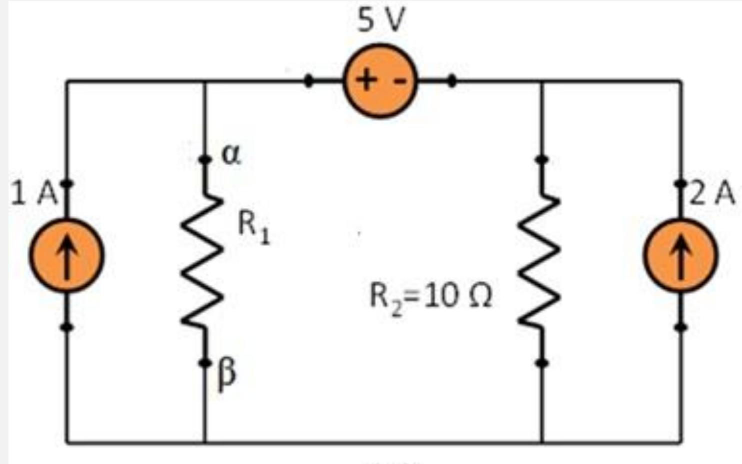
Σημείωση

Το θεώρημα έχει γενικότερη ισχύ. Στην περίπτωση ενός κυκλώματος δύο ακροδεκτών, η ισχύς που αποδίδει σε ένα εξωτερικό φορτίο συνδεμένο με τους ακροδέκτες του είναι μέγιστη για τιμή του εξωτερικού φορτίου R_L ίση με την εσωτερική αντίσταση R_S του κυκλώματος, όπου R_S η ισοδύναμη αντίσταση Thevenin του κυκλώματος ως προς τους ακροδέκτες του.



Παράδειγμα 4.29

Στο κύκλωμα της εικόνας (α), βρείτε την τιμή της αντίστασης R_1 για την οποία η ισχύς που καταναλώνει γίνεται μέγιστη; Πόση είναι η μέγιστη αυτή ισχύς;

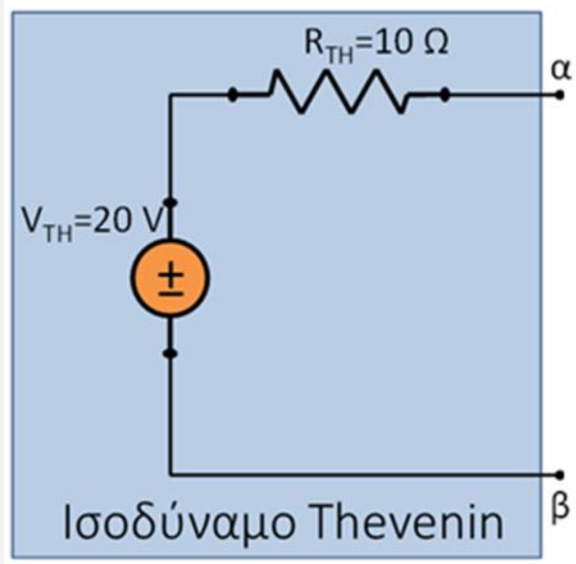


(α)

Λύση

Αποδεικνύεται ότι, στο ισοδύναμο Thevenin του κυκλώματος της Εικ. (α) ως προς τους ακροδέκτες α και β [Εικ. (β)], είναι

$$R_{TH} = 10\ \Omega \ \text{και}\ V_{TH} = 20\ V$$



(β)

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος,

$$\mathrm{P}_{R_1} = max \text{ για } \mathrm{R}_1 = 10\ \Omega$$

Η μέγιστη ισχύς που μπορεί να καταναλωθεί είναι

$$P_{R_{1,max}} = \frac{V_{\mathrm{TH}}^2}{4 \cdot R_{\mathrm{TH}}} = \frac{(35\ \mathrm{V})^2}{4 \cdot (10\ \Omega)} = 30.625\ \mathrm{W}$$

Θεώρημα Επαλληλίας ή Υπέρθεσης

(Superposition Theorem)

- Πραγματική πηγή τάσης και ρεύματος
- Μετασχηματισμός πηγής τάσης σε πηγή ρεύματος (και αντίστροφα)

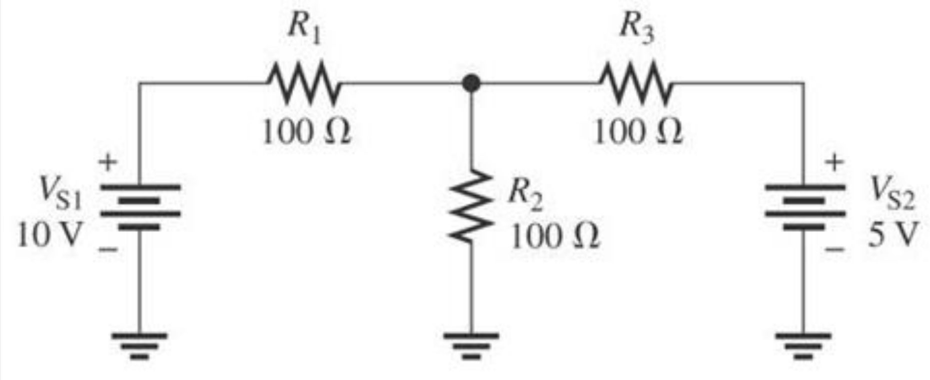
Θεώρημα Επαλληλίας ή Υπέρθεσης
(Superposition Theorem)

- Το θεώρημα της υπέρθεσης είναι ένας τρόπος να αναλύουμε κυκλώματα **πολλαπλών πηγών** (κυκλώματα στα οποία υπάρχουν περισσότερες από μια πηγές).
- Το ρεύμα σε έναν οποιοδήποτε κλάδο του κυκλώματος ισούται με το άθροισμα των επιμέρους ρευμάτων που προκαλεί η κάθε πηγή ξεχωριστά.
- Η χρήση του θεωρήματος υπέρθεσης:

1. Λύνουμε το κύκλωμα κάθε φορά διατηρώντας μόνο μια πηγή, μηδενίζοντας όλες τις άλλες πηγές.
   - *Μηδενισμός <u>πηγής τάσης</u> σημαίνει αντικατάσταση με <u>βραχυκύκλωμα</u>*
   - *Μηδενισμός <u>πηγής ρεύματος</u> σημαίνει αντικατάσταση με <u>ανοικτό κύκλωμα</u>*
2. Σε κάθε κλάδο, προσθέτουμε όλα τα επιμέρους ρεύματα που οφείλονται σε κάθε πηγή ξεχωριστά.

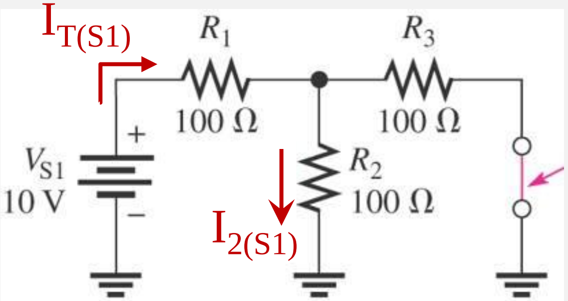
Παράδειγμα 4.30

Βρείτε το ρεύμα μέσα από την R_2 στην εικόνα χρησιμοποιώντας το θεώρημα της υπέρθεσης.



Λύση

Βρίσκουμε το ρεύμα μέσω της R_2, που οφείλεται στην πηγή V_{S1}



Αντικαθιστούμε τη V_{S2} με βραχυκύκλωμα

$$R_{T(S1)} = R_1 + \frac{R_3}{2} = 100\ \Omega + 50\ \Omega = 150\ \Omega$$

$$I_{T(S1)} = \frac{V_{S1}}{R_{T(S1)}} = \frac{10\ \text{V}}{150\ \Omega} = 66.7\ \text{mA}$$

$$I_{2(S1)} = \left(\frac{R_3}{R_2 + R_3}\right) I_{T(S1)} = \left(\frac{100\ \Omega}{200\ \Omega}\right) 66.7\ \text{mA} = 33.3\ \text{mA}$$

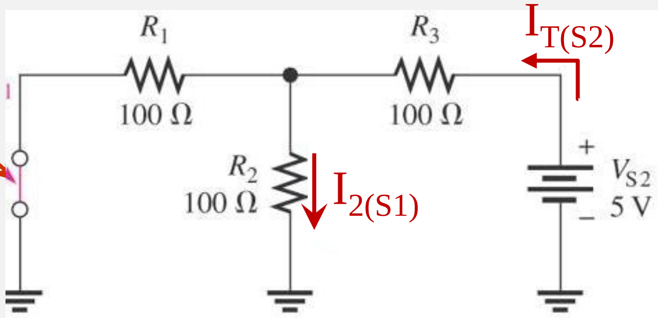
Σημειώστε ότι αυτό το ρεύμα είναι προς τα κάτω στην R_2.

(συνεχίζεται . . .)

Λύση *(... συνέχεια)*

Βρίσκουμε το ρεύμα μέσω της R_2, που οφείλεται στην πηγή V_{S2}

Αντικαθιστούμε τη V_{S1} με βραχυκύκλωμα



$$R_{T(S2)} = R_3 + \frac{R_1}{2} = 100\ \Omega + 50\ \Omega = 150\ \Omega$$

$$I_{T(S2)} = \frac{V_{S2}}{R_{T(S2)}} = \frac{5\ \text{V}}{150\ \Omega} = 33.3\ \text{mA}$$

$$I_{2(S2)} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) I_{T(S2)} = \left(\frac{100\ \Omega}{200\ \Omega}\right) 33.3\ \text{mA} = 16.7\ \text{mA}$$

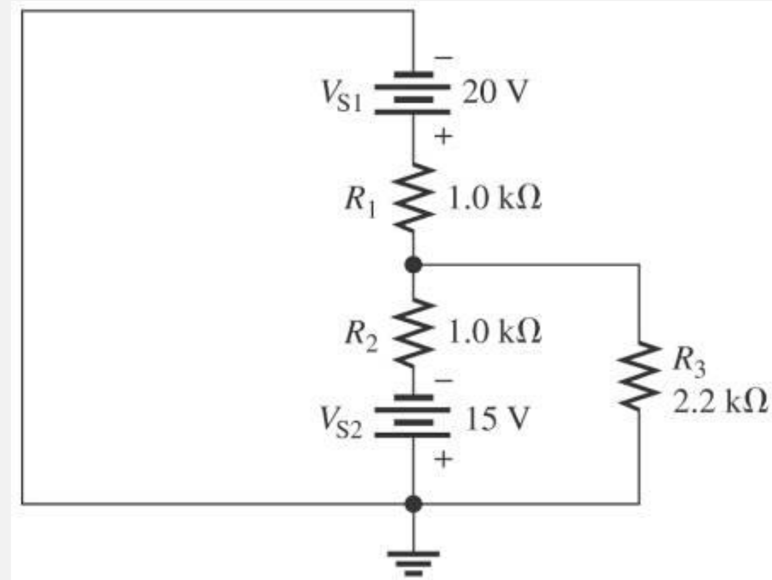
Σημειώστε ότι και αυτό το ρεύμα είναι προς τα κάτω στην R_2.

Και τα δύο συνιστώντα ρεύματα έχουν την ίδια κατεύθυνση, συνεπώς, τα προσθέτουμε.

$$I_2 = I_{2(S1)} + I_{2(S2)} = 33.3\ \text{mA} + 16.7\ \text{mA} = 50\ \text{mA}$$

Παράδειγμα 4.31

Βρείτε το ρεύμα και την τάση στην R_3 στο κύκλωμα της παρακάτω εικόνας.



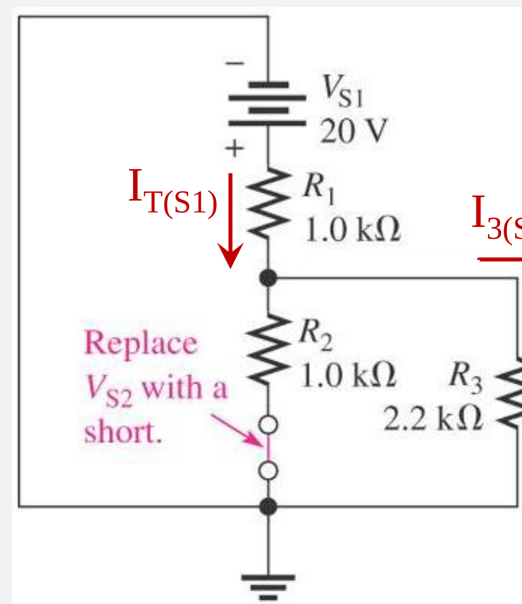
Λύση

Βρίσκουμε το ρεύμα μέσω της R_3, που οφείλεται στην πηγή V_{S1}

$$R_{T(S1)} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 1.0\ \text{k}\Omega + \frac{(1.0\,\text{k}\Omega)(2.2\,\text{k}\Omega)}{3.2\,\text{k}\Omega} = 1.69\ \text{k}\Omega$$

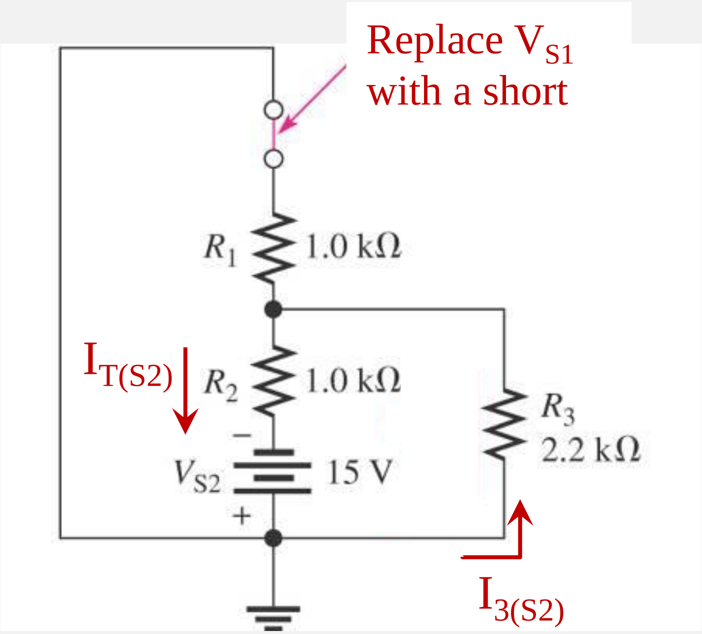
$$I_{T(S1)} = \frac{V_{S1}}{R_{T(S1)}} = \frac{20\ \text{V}}{1.69\ \text{k}\Omega} = 11.8\ \text{mA}$$

$$I_{3(S1)} = \left(\frac{R_2}{R_2 + R_3}\right) I_{T(S1)} = \left(\frac{1.0\ \Omega}{3.2\ \text{k}\Omega}\right) 11.8\ \text{mA} = 3.69\ \text{mA}$$



(συνεχίζεται . . .)

Λύση *(συνέχεια)*



Βρίσκουμε το ρεύμα μέσω της R_3, που οφείλεται στην πηγή V_{S2}

$$R_{T(S2)} = R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = 1.0\ \text{k}\Omega + \frac{(1.0\,\text{k}\Omega)(2.2\,\text{k}\Omega)}{3.2\,\text{k}\Omega} = 1.69\ \text{k}\Omega$$

$$I_{T(S2)} = \frac{V_{S2}}{R_{T(S2)}} = \frac{15\ \text{V}}{1.69\ \text{k}\Omega} = 8.88\ \text{mA}$$

$$I_{3(S2)} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_3}\right) I_{T(S2)} = \left(\frac{1.0\ \Omega}{3.2\ \text{k}\Omega}\right) 8.88\ \text{mA} = 2.78\ \text{mA}$$

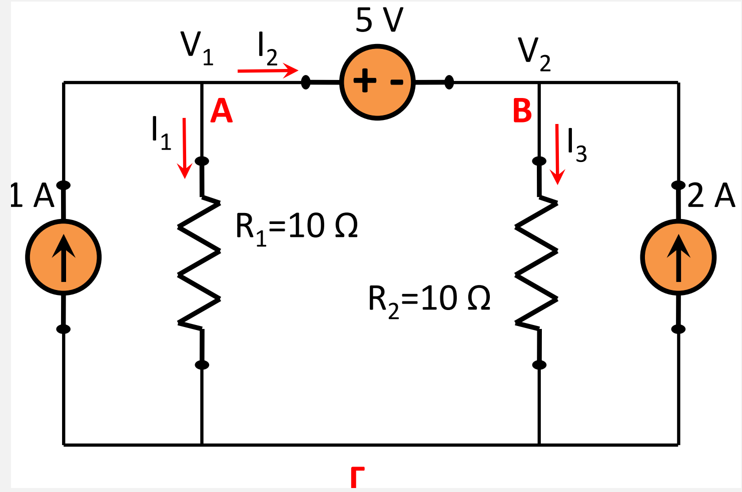
Το ολικό ρεύμα μέσω της R_3 είναι

$$I_3 = I_{3(S1)} - I_{3(S2)} = 3.69\ \text{mA} - 2.78\ \text{mA} = 910\ \mu\text{A} \quad \text{(γιατί αφαιρούμε;)}$$

και η τάση στα άκρα της $V_{R3} = I_3 \cdot R_3 = (910\ \mu\text{A})(2.2\ \text{k}\Omega) \cong 2\ \text{V}$

Παράδειγμα 4.32

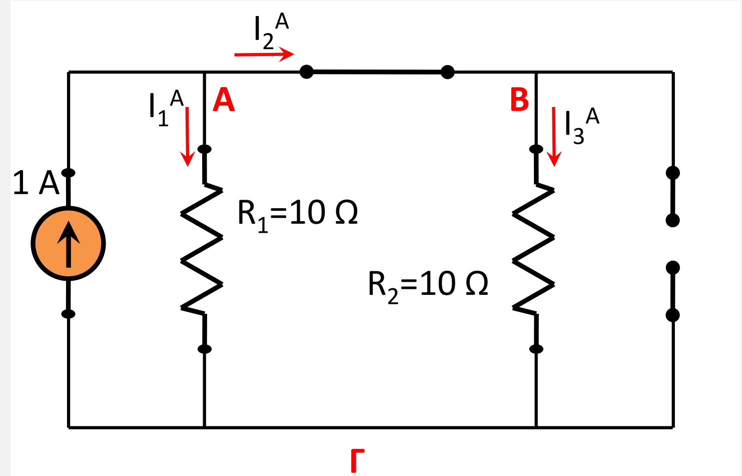
Να υπολογιστούν τα ρεύματα I_1, I_2 και I_3 του κυκλώματος.



Λύση

Ξεκινάμε αφήνοντας ενεργή την πηγή ρεύματος 1A:

- αντικαθιστούμε την πηγή τάσης 5V με βραχυκύκλωμα
- αντικαθιστούμε την πηγή ρεύματος 2A με ανοικτό κύκλωμα



Κύκλωμα Α

Στο Κύκλωμα Α, που σχηματίζεται, έχουμε:

$$I_1^A = 0{,}5\ A$$

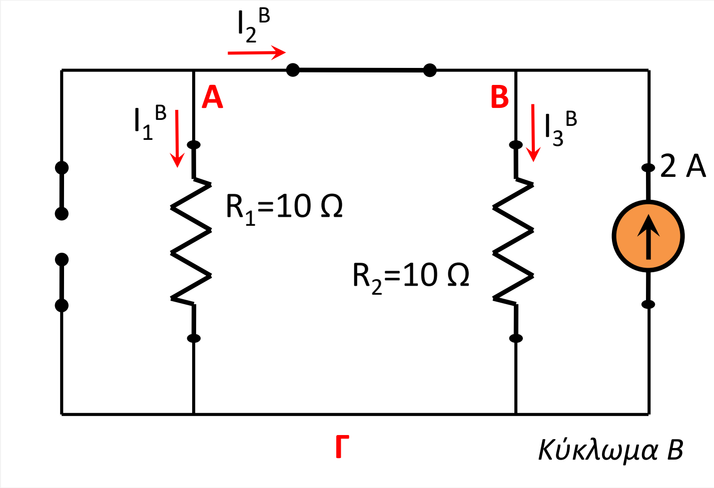
$$I_2^A = I_3^A = 0{,}5\ A$$

(συνεχίζεται . . .)

Λύση (… συνέχεια)

Στη συνέχεια, αφήνουμε ενεργή την άλλη πηγή ρεύματος, 2 Α,

- αντικαθιστούμε την πηγή ρεύματος 1 Α με ανοικτό κύκλωμα
- αντικαθιστούμε την πηγή τάσης 5V με βραχυκύκλωμα



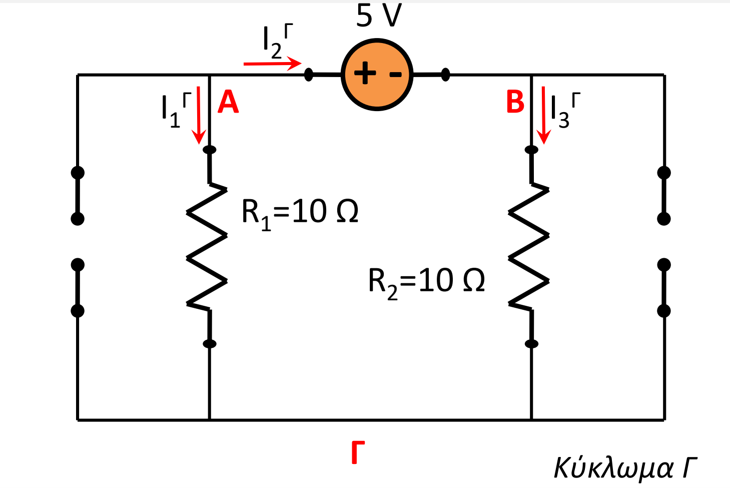
Στο Κύκλωμα Β, που σχηματίζεται, έχουμε:

$$I_1^B = -I_2^B = 1\,A$$

$$I_3^B = 1\,A$$

Τέλος, αφήνουμε ενεργή την πηγή τάσης 5V,

- αντικαθιστούμε τις δύο πηγές ρεύματος 1Α και 2Α με ανοικτά κυκλώματα.

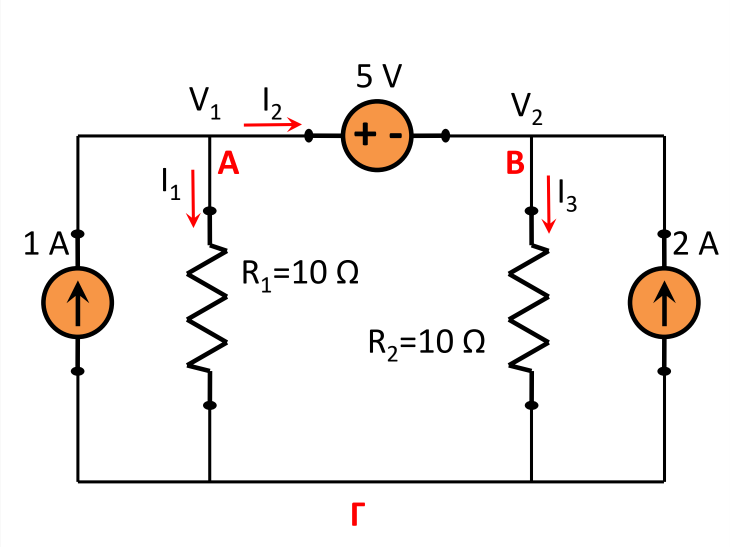


Στο κύκλωμα Γ, έχουμε:

$$I_1^Γ = -I_2^Γ = -I_3^Γ = \frac{5\,V}{20\,Ω} = 0{,}25\,A$$

(συνεχίζεται . . .)

Λύση (… συνέχεια)



Τα τρία ζητούμενα ρεύματα είναι το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους ρευμάτων:

$$I_1 = I_1^A + I_1^B + I_1^\Gamma = 0{,}5 + 1 + 0{,}25 = 1{,}75\ A$$

$$I_2 = I_2^A + I_2^B + I_2^\Gamma = 0{,}5 - 1 - 0{,}25 = -0{,}75\ A$$

$$I_3 = I_3^A + I_3^B + I_3^\Gamma = 0{,}5 + 1 - 0{,}25 = 1{,}25\ A$$

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι τα αποτελέσματά μας είναι σωστά ελέγχοντας τα ρεύματα στους κόμβους A και B με το νόμο ρευμάτων του Kirchhoff.

Στον κόμβο A πρέπει να ισχύει η σχέση: $I_1 + I_2 = 1$

Στον κόμβο B πρέπει να ισχύει η σχέση: $I_2 + 2 = I_3$