Μέρος Β

- Η μέθοδος βρόχων
- Η μέθοδος βρόχων με εξαρτημένες πηγές
- Ειδικές περιπτώσεις της μεθόδου βρόχων

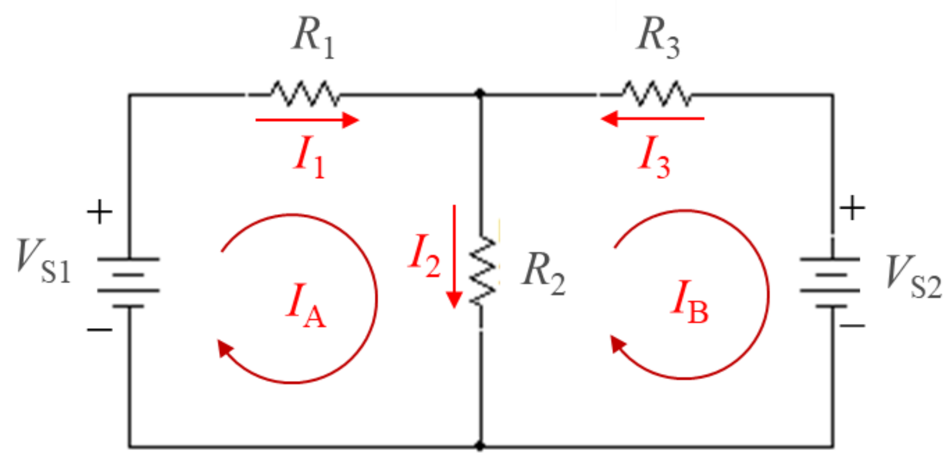
Η μέθοδος των ρευμάτων βρόχων

(Mesh-Current Method)

- Χρησιμοποιεί για αγνώστους τα ρεύματα των βρόχων
- Οδηγεί σε $b-(n-1)$ εξισώσεις όσοι είναι και οι απλοί βρόχοι στο κύκλωμα, όπου
  - b το πλήθος των κλάδων και
  - n το πλήθος των κόμβων του κυκλώματος

Γενικά για τη μέθοδο ρευμάτων βρόχων

Εικ. (α): Στη μέθοδο αυτή, αντί για τα πραγματικά ρεύματα των κλάδων I_1, I_2 και I_3 εργαζόμαστε με τα υποθετικά ρεύματα βρόχων (mech currents) $\boldsymbol{I_A}$ και $\boldsymbol{I_B}$



(α)

Εφόσον, ***b* (πλήθος κόμβων) < *n* (πλήθος κλάδων)**, η μέθοδος οδηγεί σε μικρότερο αριθμό εξισώσεων.

Βρίσκοντας τα ρεύματα βρόχων, εύκολα υπολογίζονται τα ρεύματα κλάδων

Π.χ., *εικ. (α)*: $I_1 = I_A$,

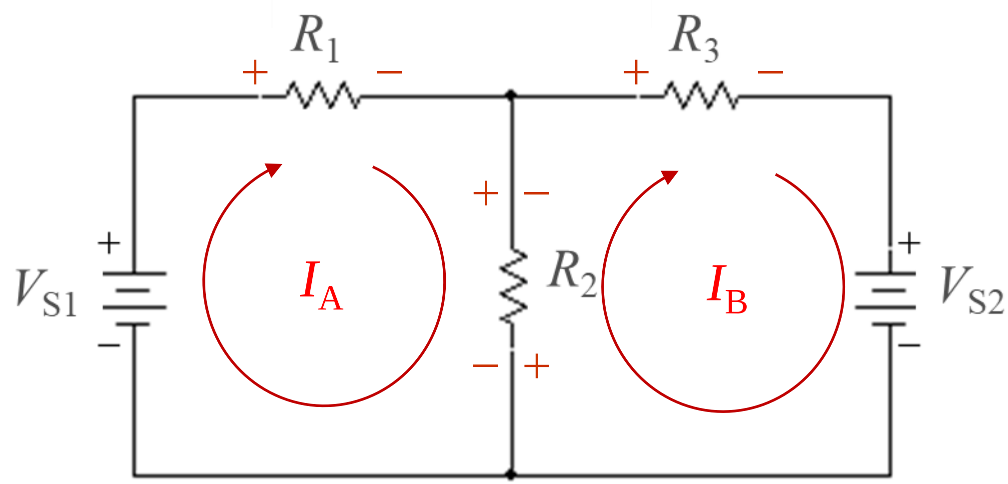
$$I_2 = I_A - I_B$$

$$I_3 = -I_B$$

Η μέθοδος των ρευμάτων βρόχων : Τα βήματα

Βήμα 1ο : Σημειώνουμε ένα ρεύμα σε κάθε ελάχιστο βρόχο του κυκλώματος με διεύθυνση αυθαίρετη

Βήμα 2ο : Σημειώνουμε την πολικότητα των πτώσεων τάσης σε κάθε αντίσταση λόγω αυτών των ρευμάτων βρόχων

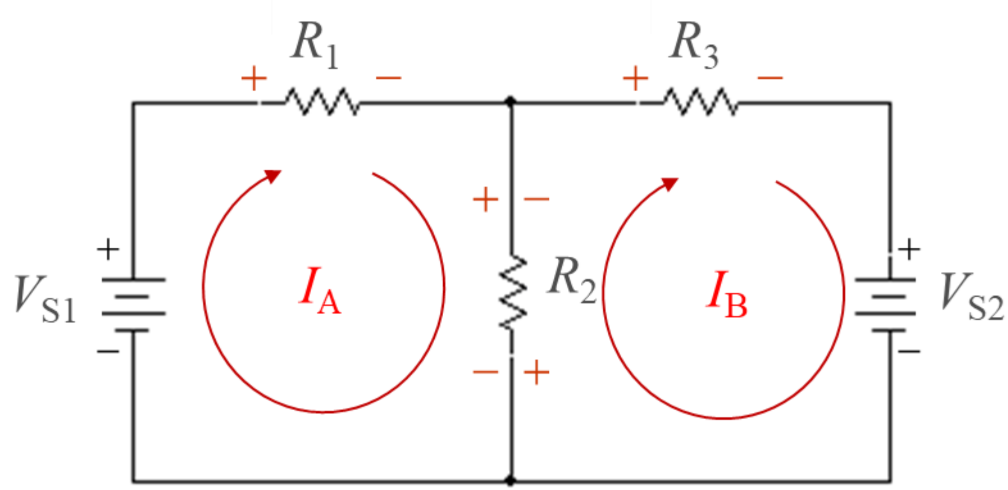


Παρατήρηση: Η R_2 στο όριο των δύο βρόχων, "διαρρέεται" και από τα δύο ρεύματα. Συνεπώς, παρουσιάζει την αντίστοιχη πολικότητα από κάθε πλευρά.

(συνεχίζεται . . .)

Η μέθοδος των ρευμάτων βρόχων: Τα βήματα *(συνέχεια)*

Βήμα 3º **:** Εφαρμόζουμε το νόμο των τάσεων του Kirchhoff σε κάθε βρόχο.



Βρόχος A (CW):

$$V_{S1} - I_A R_1 - I_A R_2 + I_B R_2 = 0$$

Βρόχος B (CW):

$$-V_{S2} - I_B R_2 + I_A R_2 - I_B R_3 = 0$$

Βήμα 4º **:** Αφού κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$(R_1+R_2)\boldsymbol{I_A} - R_2\boldsymbol{I_B} = V_{S1}$$

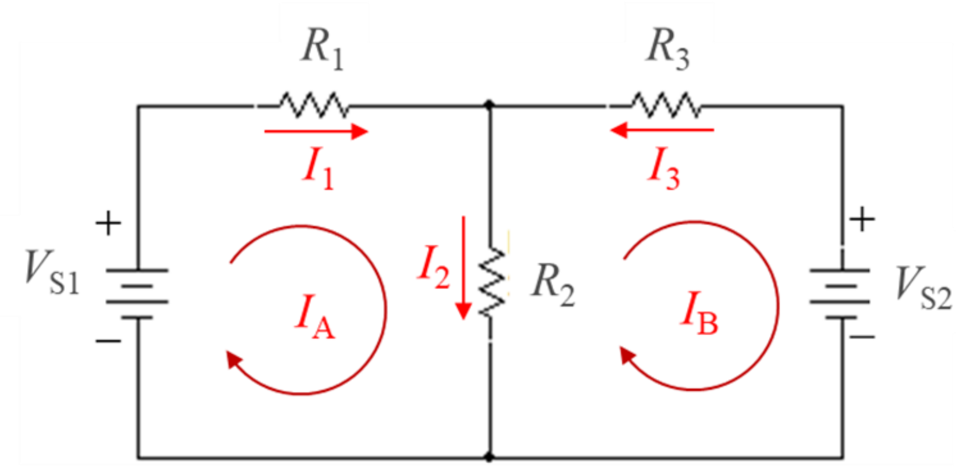
$$-R_2\boldsymbol{I_A} + (R_2+R_3)\boldsymbol{I_B} = -V_{S2}$$

και υπολογίζουμε τα ρεύματα βρόχων

(συνεχίζεται . . .)

Η μέθοδος των ρευμάτων βρόχων: Τα βήματα *(συνέχεια)*

Βήμα 5º : Γνωρίζοντας τα ρεύματα βρόχων, υπολογίζουμε τα πραγματικά ρεύματα των κλάδων $\boldsymbol{I_1}$, $\boldsymbol{I_2}$ και $\boldsymbol{I_3}$,



(α)

Π.χ., *εικ. (α)*:

$$I_1 = I_A,$$
$$I_2 = I_A - I_B$$
$$I_3 = -I_B$$

Από τα πραγματικά ρεύματα των κλάδων, βρίσκουμε ζητούμενες τάσεις στο κύκλωμα (με χρήση νόμου Ohm),

Π.χ., *εικ. (α)*: $V_{R_1} = I_1 R_1$

ισχύ στα στοιχεία, κ.λπ.

Π.χ., *εικ. (α)*: $P_{V_{S1}} = I_1 V_{S1}$

Ένας συνοπτικός κανόνας για την εφαρμογή της μεθόδου των ρευμάτων βρόχων σε κυκλώματα με πηγές τάσης

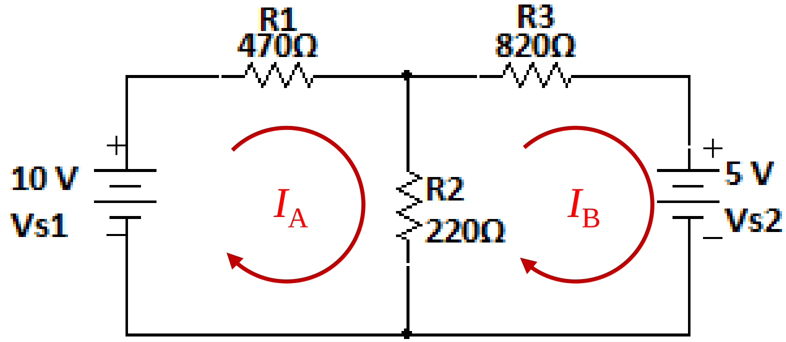
Για κάθε βρόχο κυκλώματος ο οποίος περιλαμβάνει **μόνον πηγές τάσης** (ανεξάρτητες ή εξαρτημένες), δηλαδή, δεν περιλαμβάνει κάποια πηγή ρεύματος, μπορούμε να γράψουμε άμεσα την εξίσωση ρευμάτων βρόχων χρησιμοποιώντας το συνοπτικό κανόνοα

(Άθροισμα αντιστάσεων στο βρόχο) × (ρεύμα βρόχου) – (κάθε αντίσταση κοινή σε δύο βρόχους) × (ρεύμα γειτονικού βρόχου) = (πηγή τάσης στο βρόχο)

Σημείωση: Κατά την εφαρμογή του παραπάνω συνοπτικού κανόνα, θεωρούμε ότι **τα ρεύματα των βρόχων είναι σημειωμένα δεξιόστροφα (CW)**

Παράδειγμα 4.9

Βρείτε τα ρεύματα των κλάδων στο παρακάτω κύκλωμα, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ρευμάτων βρόχων



Λύση

Σημειώνουμε τα ρεύματα βρόχων I_A και I_B δεξιόστροφα (CW).

Χρησιμοποιούμε το συνοπτικό κανόνα της προηγούμενης σελίδας για να φτιάξουμε τις εξισώσεις ρευμάτων βρόχων

$$(470 + 220)I_A - 220I_B = 10$$

$$(820 + 220)I_B - 220I_A = -5$$

Συνδυάζουμε του όμοιους όρους και γράφουμε τις δύο εξισώσεις στη στάνταρ μορφή

$$690I_A - 220I_B = 10$$

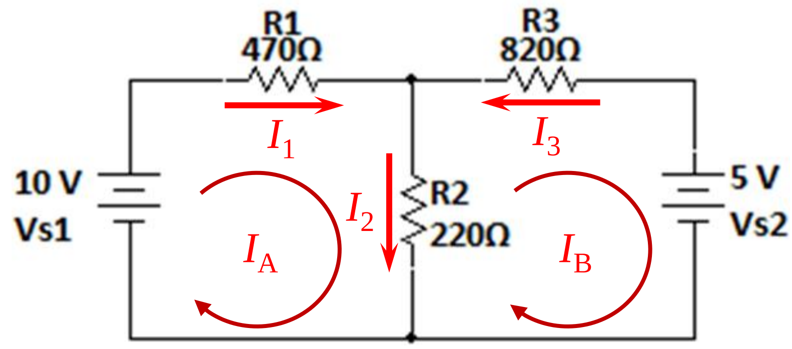
$$-220I_A + 1040I_B = -5$$

(συνεχίζεται . . .)

Λύση (… συνέχεια)

Λύνουμε το σύστημα

$$690\, I_A - 220\, I_B = 10$$
$$-220\, I_A + 1040\, I_B = -5$$



$$I_A = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -220 \\ -5 & 1040 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 690 & -220 \\ -220 & 1040 \end{vmatrix}} = 13.9 \text{ mA}$$

$$I_B = \frac{\begin{vmatrix} 690 & 10 \\ -220 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 690 & -220 \\ -220 & 1040 \end{vmatrix}} = -1.87 \text{ mA}$$

Υπολογίζουμε τα πραγματικά ρεύματα των κλάδων I_1, I_2 και I_3

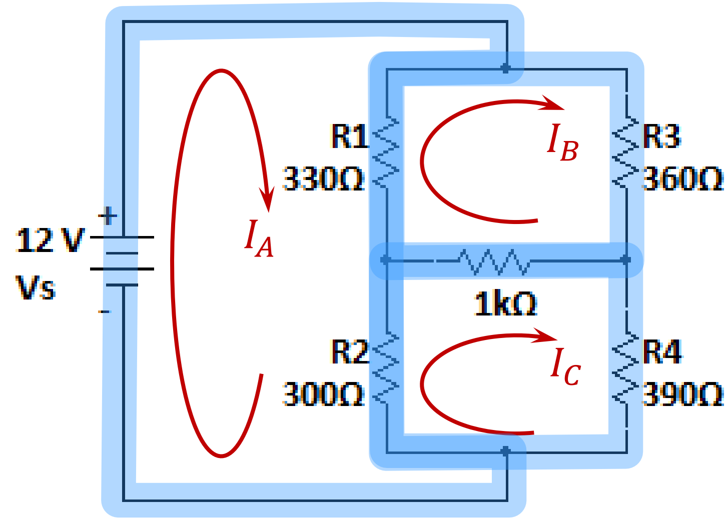
$$I_1 = I_A = \mathbf{13.9\ mA}$$

$$I_2 = I_A - I_B = (13.9\ mA) - (-1.87\ mA) = \mathbf{15.8\ m}$$

$$I_3 = -I_B = -(-1.87\ mA) = \mathbf{1.87\ mA}$$

Παράδειγμα 4.10

Βρείτε το ρεύμα σε κάθε στοιχείο του κυκλώματος της εικόνας (γέφυρα Wheatstone) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ρευμάτων βρόχων.



Λύση

Το κύκλωμα έχει τρεις ελάχιστους βρόχους. Σημειώνουμε τα ρεύματα των τριών βρόχων I_A, I_B και I_C δεξιόστροφα (CW).

Το κύκλωμα περιλαμβάνει μόνο πηγές τάσης, επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον συνοπτικό κανόνα για να γράψουμε τις τρεις εξισώσεις βρόχων

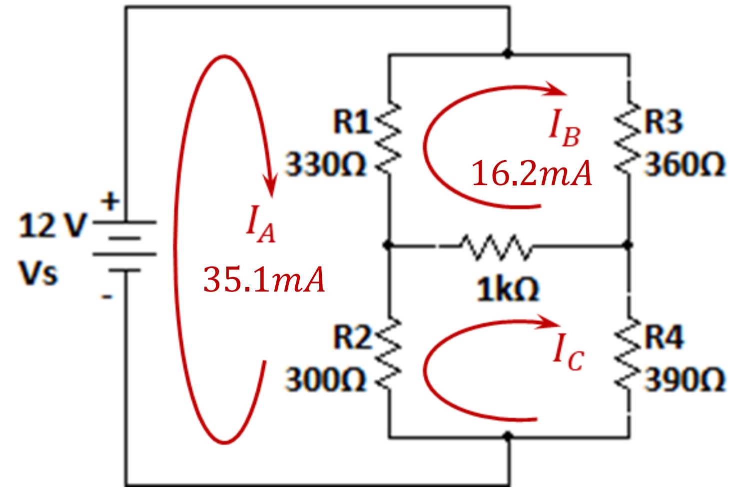
Για το βρόχο του ρεύματος I_A: $(330 + 300)\, I_A - 330\, I_B - 300\, I_C = 12$

Για το βρόχο του ρεύματος I_B: $(330 + 360 + 1000)\, I_B - 330\, I_A - 1000\, I_C = 0$

Για το βρόχο του ρεύματος I_C: $(300 + 1000 + 390)\, I_C - 300\, I_A - 1000\, I_B = 0$

(συνεχίζεται . . .)

Λύση *(… συνέχεια)*



Λύνουμε το σύστημα

$$630I_A - 330I_B - 300I_C = \mathbf{12}$$
$$-330I_A + 1690I_B - 1000I_C = \mathbf{0}$$
$$-300I_A - 1000I_B + 1690I_C = \mathbf{0}$$

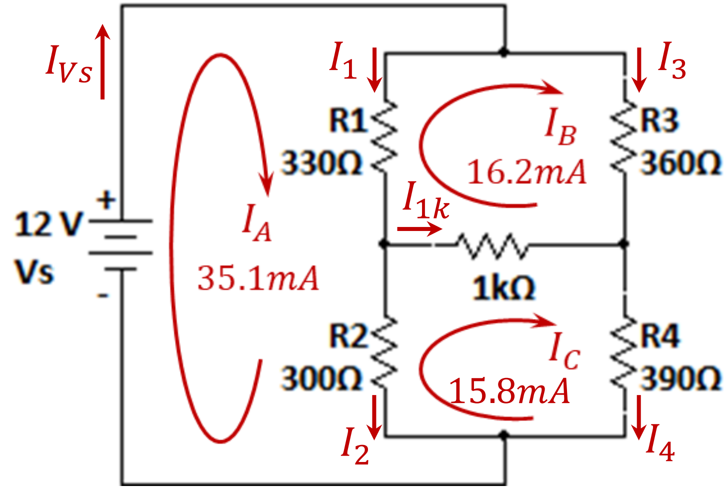
$$I_A = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{12} & -330 & -300 \\ \mathbf{0} & 1690 & -1000 \\ \mathbf{0} & -1000 & 1690 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 630 & -330 & -300 \\ -330 & 1690 & -1000 \\ -300 & -1000 & 1690 \end{vmatrix}} = \frac{22273200}{635202000} = 0.0351\ A = 35.1\ mA$$

$$I_B = \frac{\begin{vmatrix} 630 & \mathbf{12} & -300 \\ -330 & \mathbf{0} & -1000 \\ -300 & \mathbf{0} & 1690 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 630 & -330 & -300 \\ -330 & 1690 & -1000 \\ -300 & -1000 & 1690 \end{vmatrix}} = 16.2\ mA$$

(συνεχίζεται . . .)

Λύση *(… συνέχεια)*

$$I_C = \frac{\begin{vmatrix} 630 & -330 & 12 \\ -330 & 1690 & 0 \\ -300 & -1000 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 630 & -330 & -300 \\ -330 & 1690 & -1000 \\ -300 & -1000 & 1690 \end{vmatrix}} = 15.8\,mA$$



Υπολογίζουμε το ρεύμα σε κάθε στοιχείο του κυκλώματος.

Στην πηγή V_S: $I_{Vs} = I_A = \mathbf{35.1\ mA}$

Στην R_1: $I_1 = I_A - I_B = (35.1\,mA) - (16.2\,mA) = \boldsymbol{18.9\,mA}$

Στην R_3: $I_3 = I_B = \boldsymbol{16.2\,mA}$

Στην R_2: $I_2 = I_A - I_C = (35.1\,mA) - (15.8\,mA) = \boldsymbol{19.3\,mA}$

Στην R_4: $I_4 = I_C = \boldsymbol{15.8\,mA}$

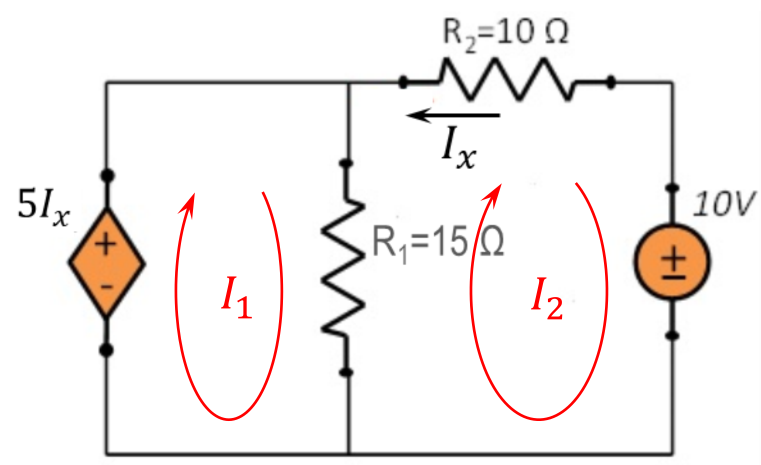
Στην 1 $k\Omega$: $I_{1k} = I_C - I_B = (15.8\,mA) - (16.2\,mA) = \boldsymbol{-0.4\,mA}$

Η μέθοδος των βρόχων με εξαρτημένες πηγές τάσης

Η μέθοδος των βρόχων μπορεί να εφαρμοστεί και με εξαρτημένες πηγές τάσης

Παράδειγμα 4.11

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο ρευμάτων βρόχων, υπολογίστε το ρεύμα I_x στο κύκλωμα της εικόνας (α)



(α)

Λύση

Σημειώνουμε τα ρεύματα I_1 και I_2 των δύο βρόχων (CW).

Από τη σχετική διεύθυνση των ρευμάτων I_x και I_2, έχουμε:

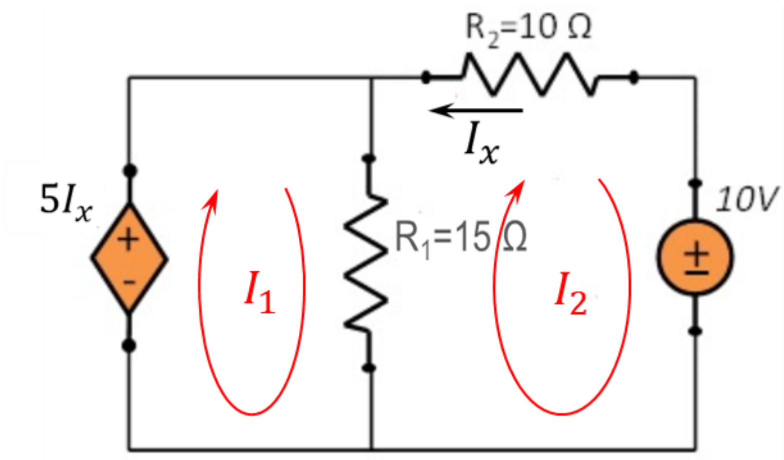
$$I_x = -I_2 \qquad (1)$$

δηλαδή, αρκεί να βρούμε το ρεύμα βρόχου I_2.

Χρησιμοποιώντας το συνοπτικό κανόνα (μπορούμε;), γράφουμε τις εξισώσεις για τα δύο ρεύματα βρόχων

(συνεχίζεται . . .)

Λύση (*… συνέχεια*)



(α)

Στο βρόχο του I_1:

$$15I_1 - 15I_2 = 5I_x$$

η οποία, λόγω της (*1*), $I_x = -I_2$, γίνεται

$$15I_1 - 15I_2 = -5I_2$$

$$15I_1 - 10I_2 = 0 \qquad (2)$$

Στο βρόχο του I_2:

$$(15 + 10)I_2 - 15I_1 = -10$$

$$15I_1 - 25I_2 = 10 \qquad (3)$$

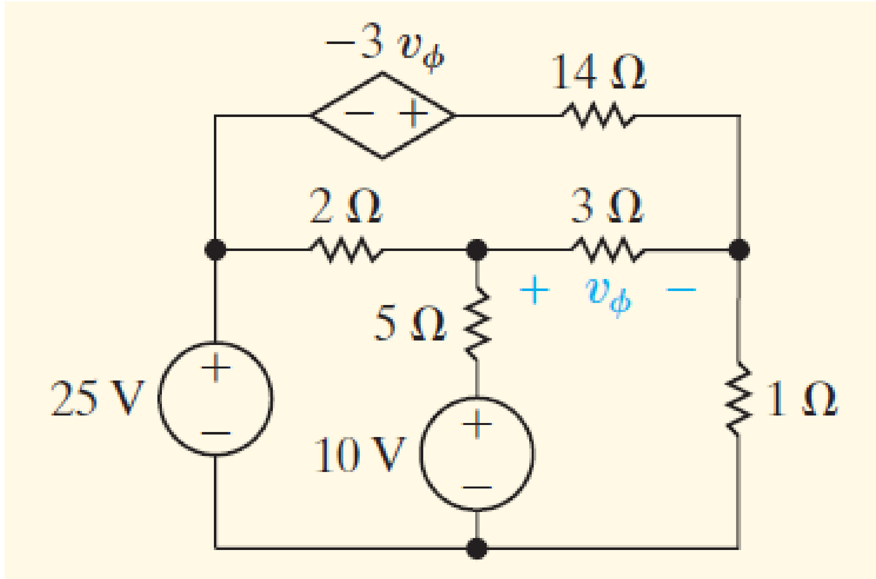
Από το σύστημα των (*2*) και (*3*) υπολογίζουμε το ρεύμα βρόχου I_2

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 15 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & -10 \\ 15 & -25 \end{vmatrix}} = -0.67 \text{ A}$$

Επομένως, $\boldsymbol{I_x = -I_2 = 0.67}$ **A**

Παράδειγμα 4.12

(α) Βρείτε τον αριθμό των εξισώσεων ρευμάτων βρόχων που χρειάζονται για την επίλυση του κυκλώματος της εικόνας.



Λύση

Το κύκλωμα περιλαμβάνει 6 κλάδους τα ρεύματα των οποίων είναι άγνωστα.

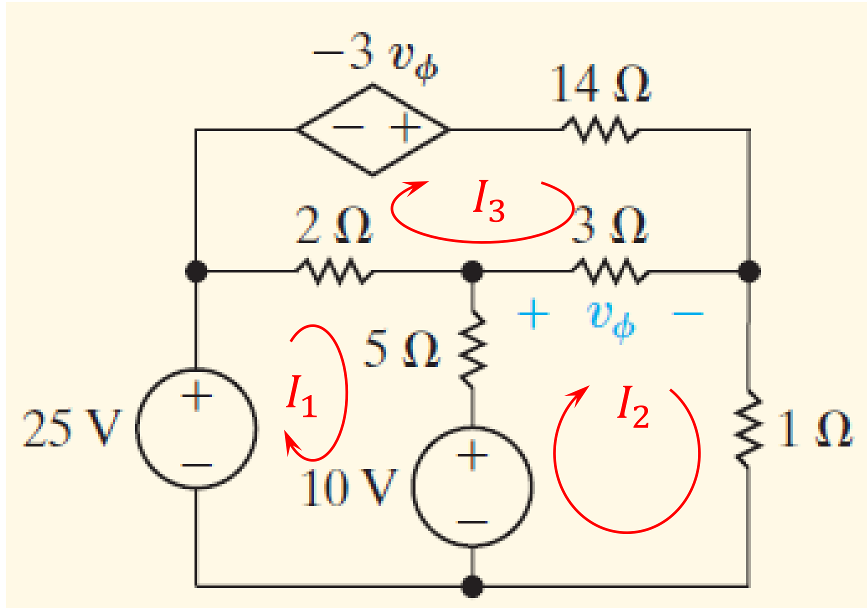
Επομένως, απαιτούνται 6 εξισώσεις ρευμάτων για την πλήρη επίλυσή του.

Το κύκλωμα, περιλαμβάνει 4 κόμβους, οπότε μπορούν να γραφτούν 4 – 1 = 3 εξισώσεις ρευμάτων χρησιμοποιώντας κανόνα ρευμάτων Kirchhoff.

Επομένως, απαιτούνται 6 – 3 = 3 ακόμα εξισώσεις οι οποίες μπορούν να προκύψουν από τις εξισώσεις των 3 απλών βρόχων του κυκλώματος.

(συνεχίζεται . . .)

(β) Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο βρόχων για να προσδιορίσετε την ισχύ που παράγεται από την εξαρτημένη πηγή.



Λύση

Ας σημειώσουμε τα ρεύματα των τριών βρόχων.

Μπορούμε να εκφράσουμε την τάση v_φ συναρτήσει των ρευμάτων βρόχων χρησιμοποιώντας τον νόμο Ohm για την αντίσταση 3 Ω.

$$v_\varphi = (I_2 - I_3)(3\ \Omega)$$

$$v_\varphi = 3(I_2 - I_3) \qquad (1)$$

Γράφουμε τις εξισώσεις των τριών βρόχων.

Για το βρόχο του I_1: $\quad (2+5)\,I_1 - 5\,I_2 - 2\,I_3 = 25 - 10$

$$7\,I_1 - 5\,I_2 - 2\,I_3 = 15 \qquad (2)$$

(συνεχίζεται . . .)

$$7\,I_1 - 5\,I_2 - 2\,I_3 = 15 \quad (2)$$

Για το βρόχο του I_2:

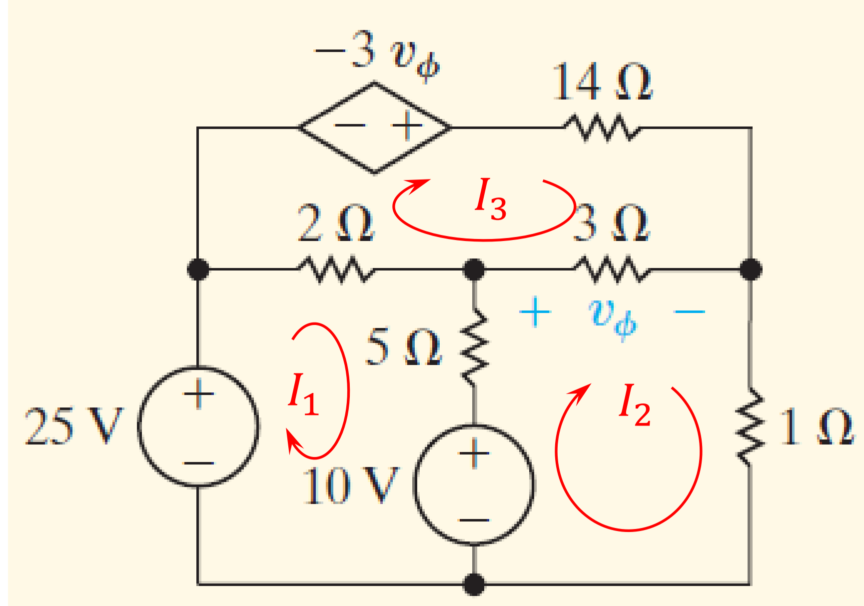
$$(5+3+1)\,I_2 - 5\,I_1 - 3\,I_3 = 10$$

$$-5\,I_1 + 9\,I_2 - 3\,I_3 = 10 \qquad (3)$$

Για το βρόχο του I_3:

$$(2+14+3)\,I_3 - 2\,I_1 - 3\,I_2 = -3\,v_\varphi$$

$$-2\,I_1 - 3\,I_2 + 19\,I_3 = -3\,v_\varphi \qquad (4)$$



Αντικαθιστώντας στην (4) την έκφραση για την τάση v_φ από την (1), $v_\varphi = 3(I_2 - I_3)$, παίρνουμε

$$-2\,I_1 + 6\,I_2 + 10\,I_3 = 0 \qquad (5)$$

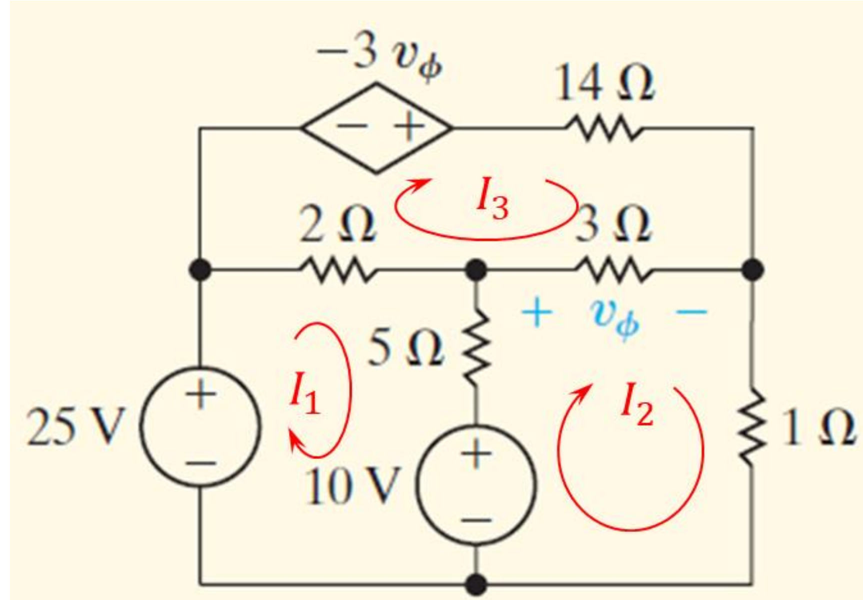
(συνεχίζεται . . .)

Έχουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$7\,I_1 - 5\,I_2 - 2\,I_3 = 15$$

$$-5\,I_1 + 9\,I_2 - 3\,I_3 = 10$$

$$-2\,I_1 + 6\,I_2 + 10\,I_3 = 0$$



από το οποίο για τη ζητούμενη ισχύ της εξαρτημένης πηγής χρειάζεται να υπολογίσουμε μόνο τα και τα I_2 και I_3 (γιατί;)

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & \mathbf{15} & -2 \\ -5 & \mathbf{10} & -3 \\ -2 & \mathbf{0} & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -5 & 9 & -3 \\ -2 & 6 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{1500}{500} = 3\ A \qquad I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -5 & \mathbf{15} \\ -5 & 9 & \mathbf{10} \\ -2 & 6 & \mathbf{0} \end{vmatrix}}{500} = \frac{-500}{500} = -1\ A$$

Η ισχύς που παράγει η εξαρτημένη πηγή είναι $\quad P_{-3\,v_\varphi} = (-3\,v_\varphi)I_3$

και, αντικαθιστώντας από την (*1*), $v_\varphi = 3(I_2 - I_3) = 12$ V, βρίσκουμε

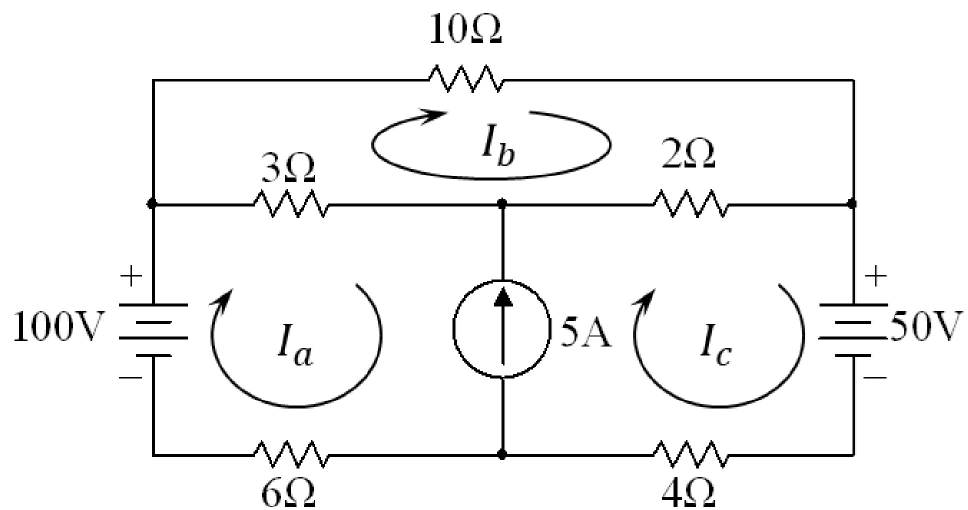
$$P_{-3\,v_\varphi} = -3(12)(-1) = \mathbf{36\ W}$$

(*συνεχίζεται . . .*)

Μέθοδος των κόμβων: Ειδικές περιπτώσεις

- Τι κάνουμε στην περίπτωση που ένας κλάδος περιέχει πηγή ρεύματος;
- Σε μια πηγής ρεύματος δεν γνωρίζουμε την τάση στα άκρα της!

Παράδειγμα 4.13



Υπολογισμός των ρευμάτων βρόχων στο κύκλωμα της *εικόνας*

Λύση

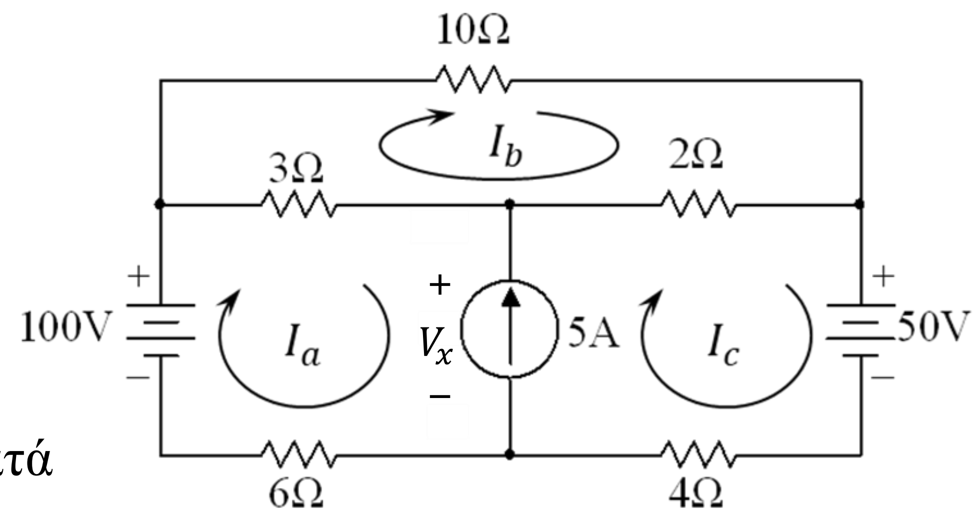
Από τη σχετική φορά των ρευμάτων βρόχων I_a, I_c και της πηγής ρεύματος 5 A, προκύπτει η σχέση

$$I_c - I_a = 5 \qquad (1)$$

που μειώνει τον αριθμό των ζητούμενων ρευμάτων βρόχων κατά ένα.

(συνεχίζεται . . .)

Λύση *(… συνέχεια)*



Το κύκλωμα της εικ. (α) διαθέτει 3 θεμελιώδεις βρόχους.

Ποιο είναι το πρόβλημα εφαρμογής των εξισώσεων βρόχων;

Δεν μπορούμε να αθροίσουμε τις τάσεις κατά μήκος των βρόχων I_a και I_c καθώς περιλαμβάνουν την πηγή ρεύματος για την οποία δεν γνωρίζουμε την τάση.

Πως αντιμετωπίζεται;

Εισάγοντας μια τάση V_x για την πηγή ρεύματος, γράφουμε τις εξισώσεις ρευμάτων βρόχων και απαλείφουμε την άγνωστηV_x μεταξύ τους.

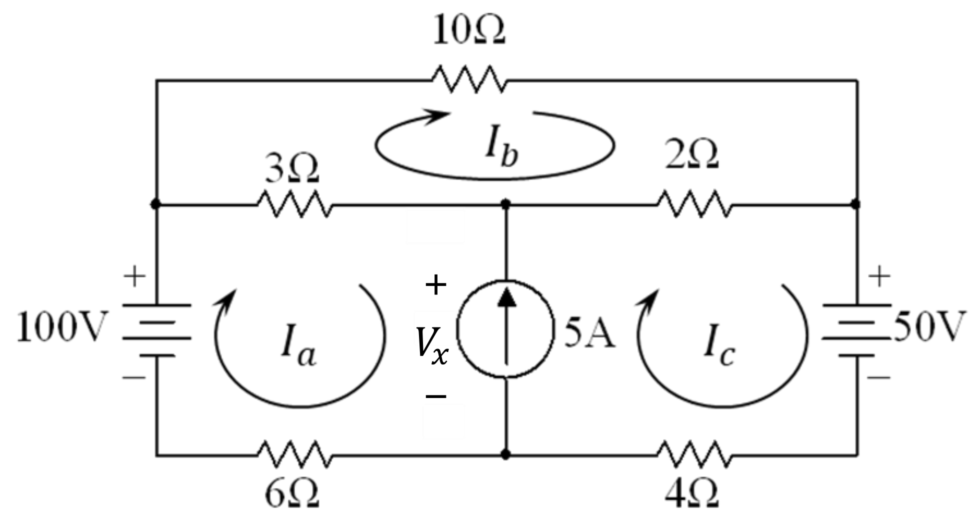
Για το βρόχο I_a: $\quad (3+6)I_a - 3I_b = 100 - V_x$

$$9I_a - 3I_b = 100 - V_x \quad (2)$$

(συνεχίζεται . . .)

Λύση (… συνέχεια)

$$9I_a - 3I_b = 100 - V_x \qquad (2)$$



Για το βρόχο I_c:

$$-2I_b + (2+4)I_c = V_x - 50$$

$$-2I_b + 6I_c = V_x - 50 \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3), προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$9I_a - 5I_b + 6I_c = 50 \qquad (4)$$

Τέλος, για το βρόχο I_b, έχουμε:

$$-3I_a + (3+10+2)I_b - 2I_c = 0$$

$$-3I_a + 15I_b - 2I_c = 0 \qquad (5)$$

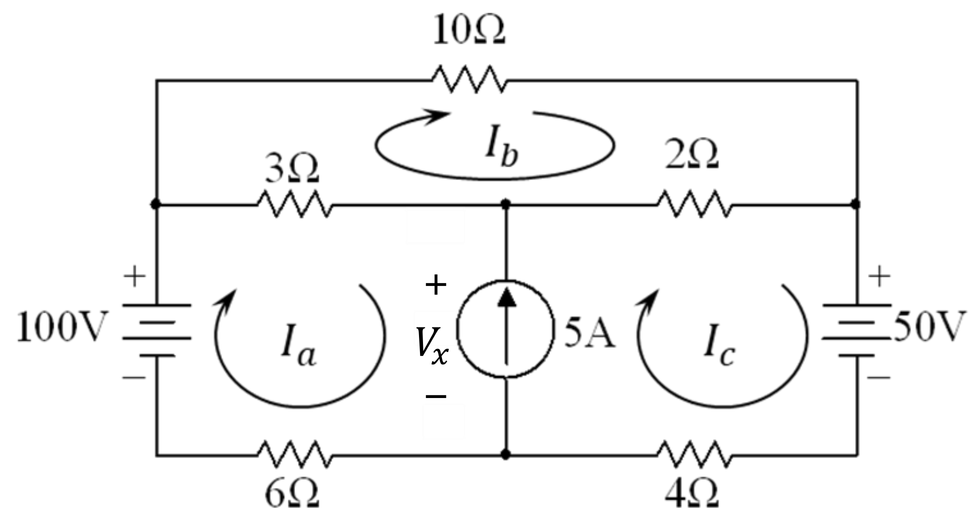
(συνεχίζεται . . .)

Λύση *(… συνέχεια)*

Στις εξισώσεις

$$9I_a - 5I_b + 6I_c = 50 \qquad (4)$$

$$-3I_a + 15I_b - 2I_c = 0 \qquad (5)$$



αντικαθιστώντας από την (*1*), $I_c - I_a = 5$, παίρνουμε το σύστημα

$$15I_a - 5I_b = 20$$

$$5I_a - 15I_b = -10$$

Λύνοντας, βρίσκουμε

$$I_a = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -5 \\ -10 & -15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & -5 \\ 5 & -15 \end{vmatrix}} = \mathbf{1.75\ A} \qquad \text{και} \qquad I_b = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 20 \\ 5 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & -5 \\ 5 & -15 \end{vmatrix}} = \mathbf{1.25\ A}$$

Τέλος, από την (*1*), $I_c - I_a = 5$, έχουμε

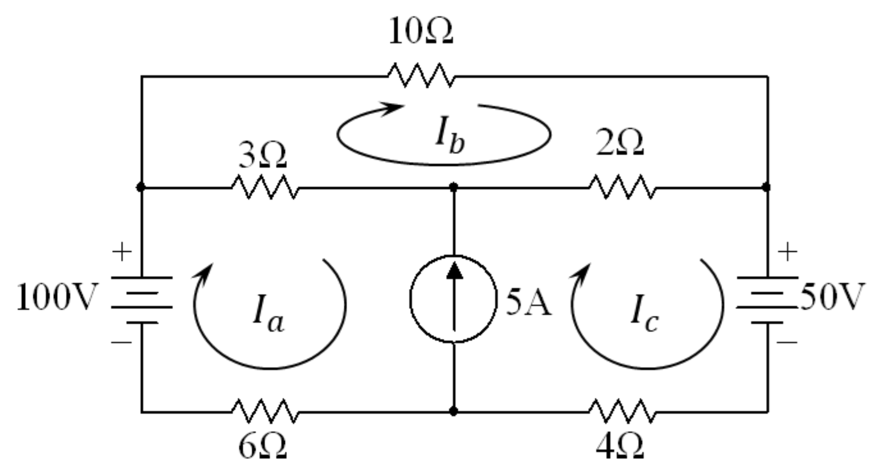
$$\boldsymbol{I_c = 6.75}$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος αντιμετώπισης της πηγής ρεύματος σε κύκλωμα με τη μέθοδος των κόμβων: Η έννοια του Υπερβρόχου

- Στη μέθοδο βρόχων, τίποτα δεν μας υποχρεώνει να χρησιμοποιήσουμε αποκλειστικά θεμελιώδεις βρόχους.
- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και έναν μη-θεμελιώδη βρόχο αν αυτό μας επιτρέπει να παρακάμψουμε μια πηγή ρεύματος ή κάποιο άλλο στοιχείο για το οποίο αγνοούμε την τάση.

Παράδειγμα 4.14

Υπολογίστε τα ρεύματα των βρόχων στο κύκλωμα της *εικόνα (α)* παρακάμπτοντας την πηγή ρεύματος 5 A.



(α)

Λύση

Θεωρούμε τα 3 άγνωστα ρεύματα βρόχων I_a, I_b και I_c της *εικ. (α)*.

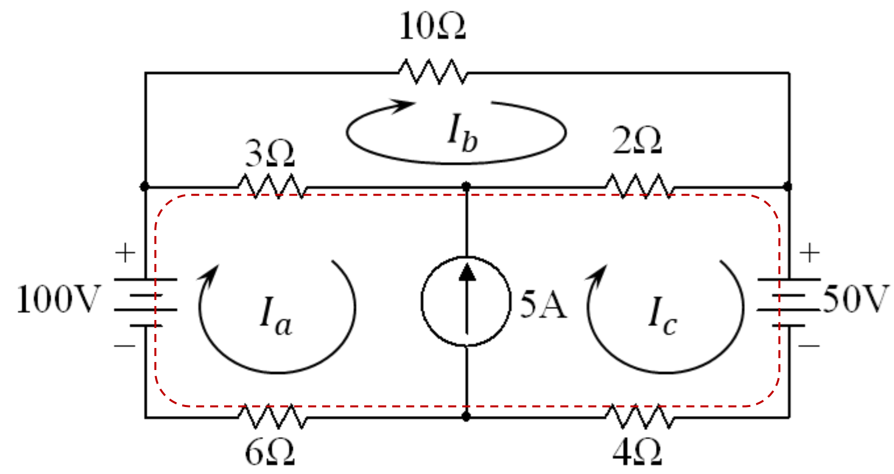
(συνεχίζεται . . .)

Λύση *(… συνέχεια)*

Ισχύει η σχέση

$$I_c - I_a = 5 \qquad (1)$$

Γράφουμε μια εξίσωση αθροίζοντας τις τάσεις κατά μήκος του μη-θεμελιώδους βρόχου που αποτελείται από τους θεμελιώδεις I_a και I_b,



(α)

δηλαδή του βρόχου που αποτελείται από τα στοιχεία 100 V, 3Ω, 2Ω, 50V, 4Ω και 6Ω

$$100 - 3I_a + 3I_b - 2I_c + 2I_b - 50 - 4I_c - 6I_a = 0$$

$$9I_a - 5I_b + 6I_c = 50 \qquad (2)$$

Από τις (1), (2) και την εξίσωση για τον απλό βρόχο I_b (βλ. προηγ, πβλ.)

$$3I_a - 15I_b + 2I_c = 0 \qquad (3)$$

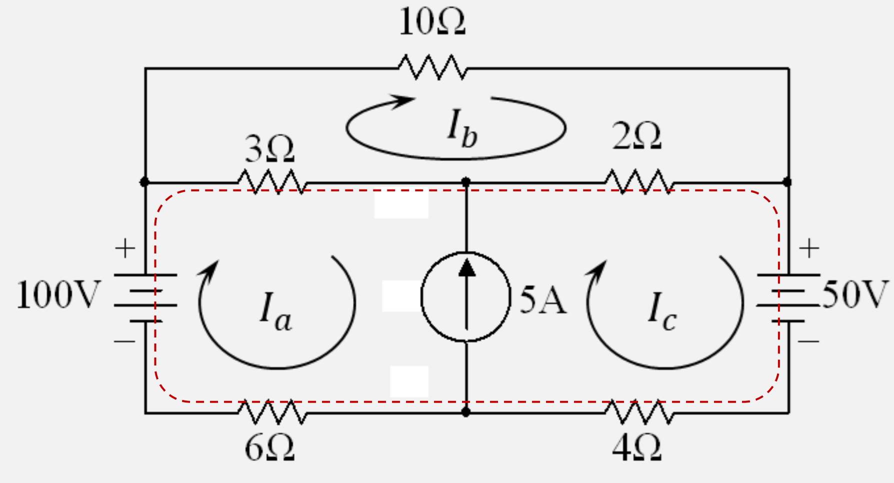
έχουμε το σύστημα εξισώσεων →

Λύση (… *συνέχεια*)

$$-I_a + 0I_b + I_c = 5$$

$$9I_a - 5I_b + 6I_c = 50$$

$$3I_a - 15I_b + 2I_c = 0$$



(α)

$$I_a = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{5} & 0 & 1 \\ \mathbf{50} & -5 & 6 \\ \mathbf{0} & -15 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 9 & -5 & 6 \\ 3 & -15 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-350}{-200} = \mathbf{1.75\ \mathit{A}}$$

$$I_b = \frac{\begin{vmatrix} -1 & \mathbf{5} & 1 \\ 9 & \mathbf{50} & 6 \\ 3 & \mathbf{0} & 2 \end{vmatrix}}{-200} = \frac{-250}{-200} = \mathbf{1.25\ \mathit{A}}$$

$$I_c - I_a = 5 \quad \Longrightarrow \quad I_c = \mathbf{6.75\ A}$$

Τέλος Β’ μέρους