ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10: ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

ΠΡΟΔΙΑΓΡΑΦΕΣ ΕΛΕΓΧΟΥ:

- **μέγιστη υπερύψωση**
- **χρόνοι απόκρισης**
- **απόσβεση**
- **σχετική ευστάθεια**

Σύστημα 2ης τάξης

- **θέσεις πόλων** (κυρίαρχες ιδιοτιμές)

Σύστημα μεγαλύτερης τάξης

- **θέση ελεγκτή**

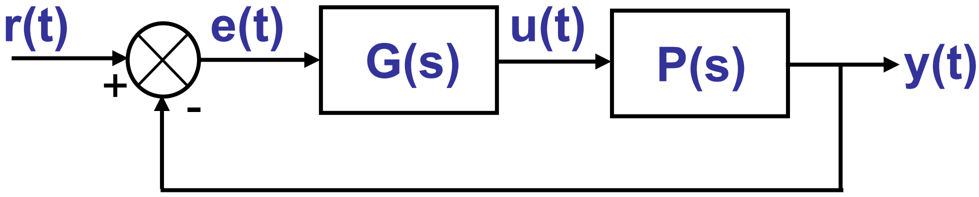
ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗ

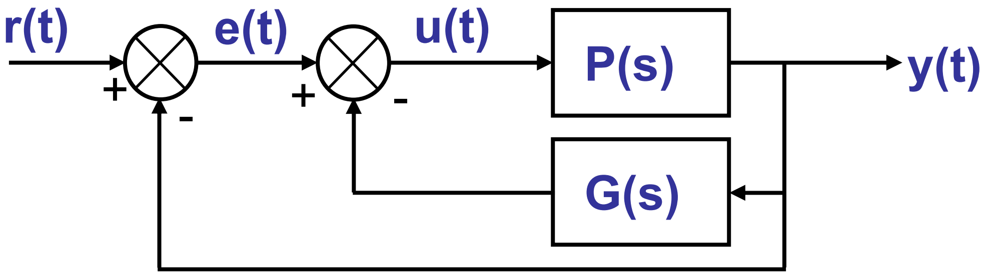
ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΤΗΣ

ΕΞΟΔΟΥ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ → ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ ή ΕΚΤΙΜΗΤΗΣ

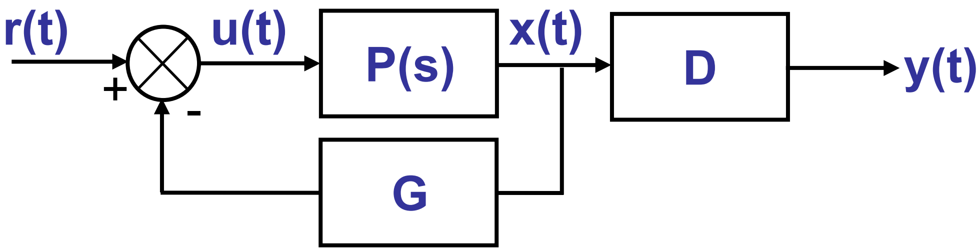
ΔΟΜΗ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΤΩΝ ΜΕ ΕΝΑ ΒΑΘΜΟ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ



ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗ ΣΕ ΣΕΙΡΑ



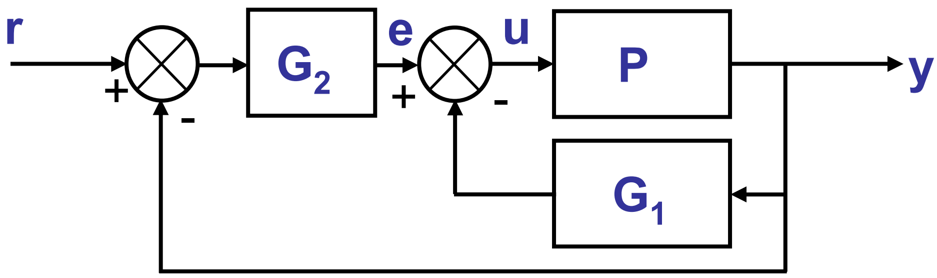
ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗ ΜΕ ΑΝΑΔΡΑΣΗ



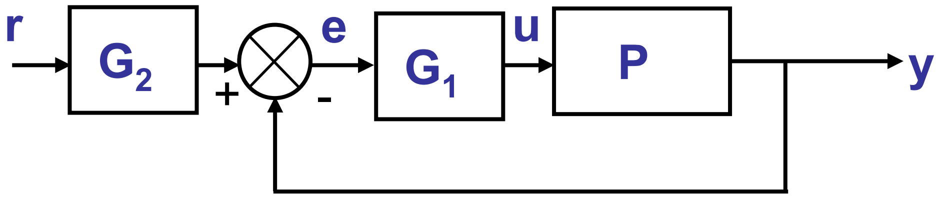
ΑΝΑΔΡΑΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

✓ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ ή ΕΚΤΙΜΗΤΗΣ

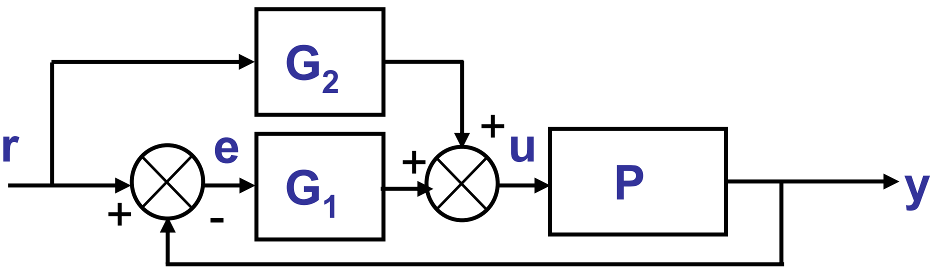
ΔΟΜΗ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΤΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΒΑΘΜΟΥΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ



ΣΕ ΣΕΙΡΑ ΜΕ ΤΟΝ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΒΡΟΧΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ



ΣΕ ΣΕΙΡΑ ΠΡΙΝ ΑΠΟ ΤΟΝ ΒΡΟΧΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ



ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΜΕ ΤΟΝ ΒΡΟΧΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ P.I.D. ΕΛΕΓΚΤΗ

Proportional	P Αναλογική	
Integral	I Ολοκληρωτική	δράση
Derivative	D Διαφορική	

Συνάρτηση μεταφοράς:

$$\boxed{G(s) = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s}}$$

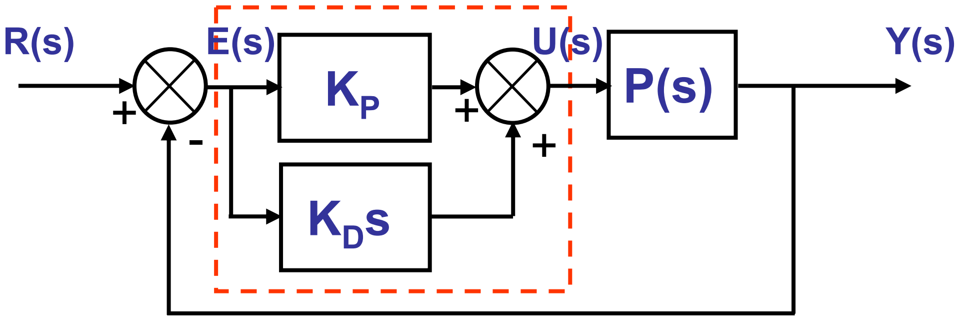
προσδιορισμός σταθερών K_P, K_D, K_I,

ώστε να ικανοποιούνται οι

επιθυμητές προδιαγραφές

Επίδραση στη χρονική συμπεριφορά

ΕΛΕΓΚΤΕΣ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΔΡΑΣΗ



$$P(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

$$G(s)=K_P+K_D s$$

$$u(t)=K_P e(t)+K_D\frac{de(t)}{dt}$$

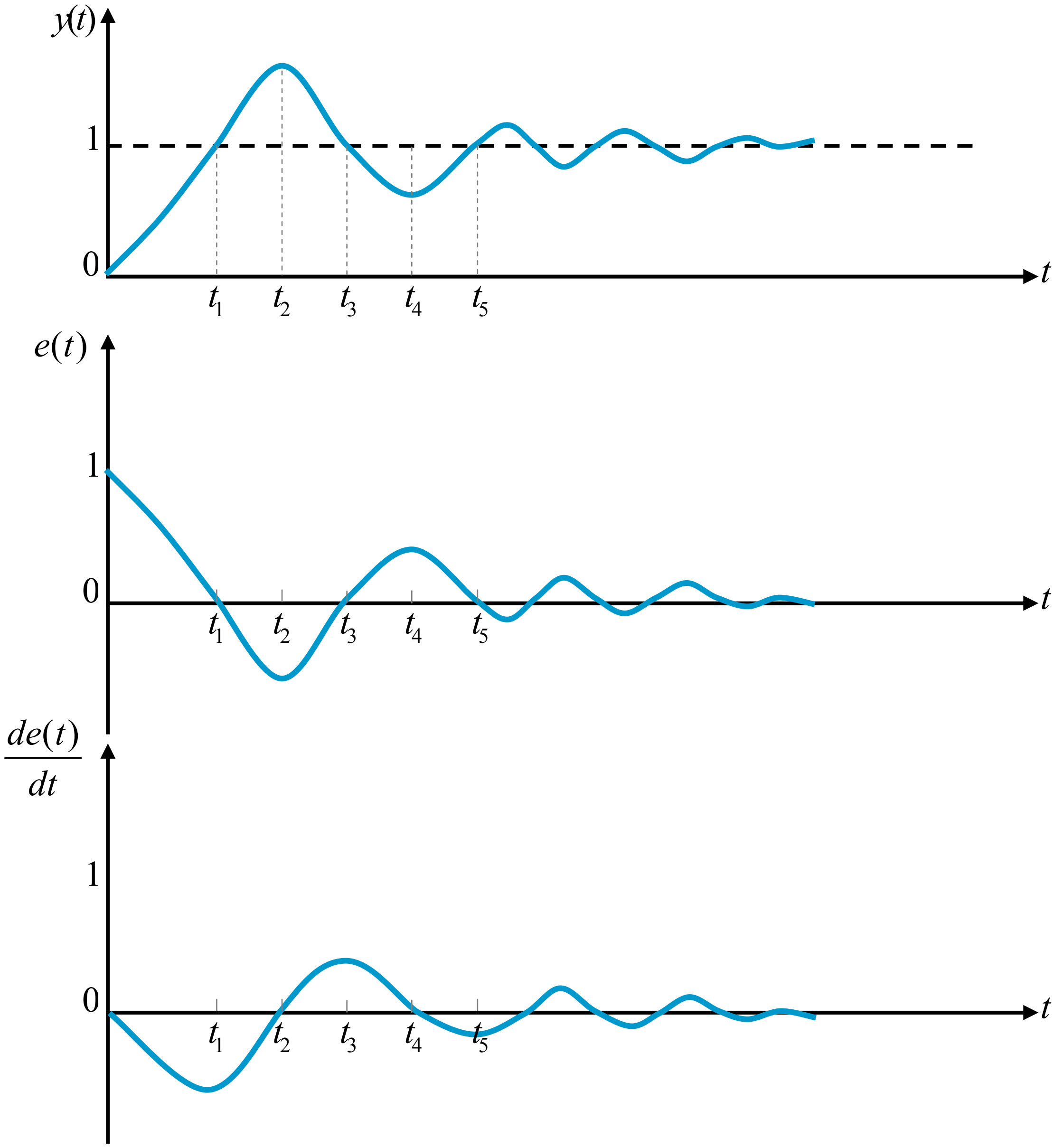
$$G(s)P(s)=\frac{\omega_n^2(K_P+K_D s)}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

πρόσθεση μηδενικού

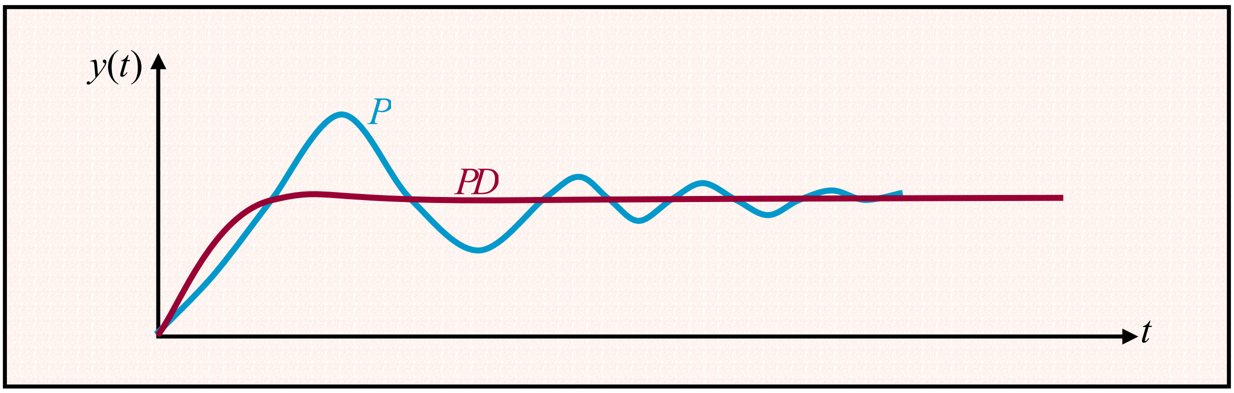
στο σημείο: $s=-\frac{K_P}{K_D}$

ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΔΡΑΣΗΣ ΣΤΗ ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΤΟΥ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ



- **ΜΙΚΡΟΤΕΡΟ ΠΛΑΤΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ**
- **ΜΙΚΡΟΤΕΡΟ ΣΦΑΛΜΑ ΜΟΝΙΜΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ,** εφόσον αυτό εξαρτάται από το χρόνο



Παράδειγμα

Έστω το σύστημα με Σ.Μ.

$$P(s) = \frac{815,265.0}{s(s+361.2)} \rightarrow \omega_n = \sqrt{815,265} = 903 rad/\sec$$

όπου: **K=180.17** κέρδος προενισχυτή
e(t)=0.000443 σφάλμα ταχύτητας
ζ=0.2 συντελεστής απόσβεσης

διότι: $$[2(0.2)(903) = 361.2]$$

$$y_{\max} = 52.7\%$$ μέγιστη υπερύψωση

$$y(t)_{\max} = 1 + e^{-\pi\zeta/(1-\zeta^2)^{1/2}}$$

Εισάγεται ένας PD ελεγκτής. Η Σ.Μ. ανοικτού βρόχου γίνεται:

$$G(s)P(s) = \frac{815,265(K_p + K_D s)}{s(s+361.2)}$$

Η Σ.Μ. του κλειστού βρόχου είναι:

$$H(s) = \frac{815,265(K_p + K_D s)}{s^2 + (361.2 + 815,265 K_D)s + 815,265 K_p}$$

Τότε η σταθερά σφάλματος ταχύτητας γίνεται:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)P(s) = \frac{815,265 K_p}{361.2} = 2,257.1 K_p$$

και το σφάλμα ταχύτητας:

$$e_{ss} = 1/K_v = 0.000443/K_p$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Ο PD ελεγκτής προσθέτει ένα μηδενικό στο σημείο: $s = -K_P / K_D$

Ο «όρος απόσβεσης» **361.2** γίνεται: $361.2 + 815.265 K_D^{*}$

$$361.2 + 815,265 K_D = 2(0.2)(903) + 2(0.8)(903) \Rightarrow K_D = \frac{2(0.8)(903)}{815,265} = 0.001772$$

Ο K_D επιλέγεται ώστε να δώσει τον επιθυμητό συντελεστή απόσβεσης και άρα τις επιθυμητές ταλαντώσεις. Αυτό προκύπτει από τη χαρακτηριστική εξίσωση του κλειστού συστήματος που είναι:

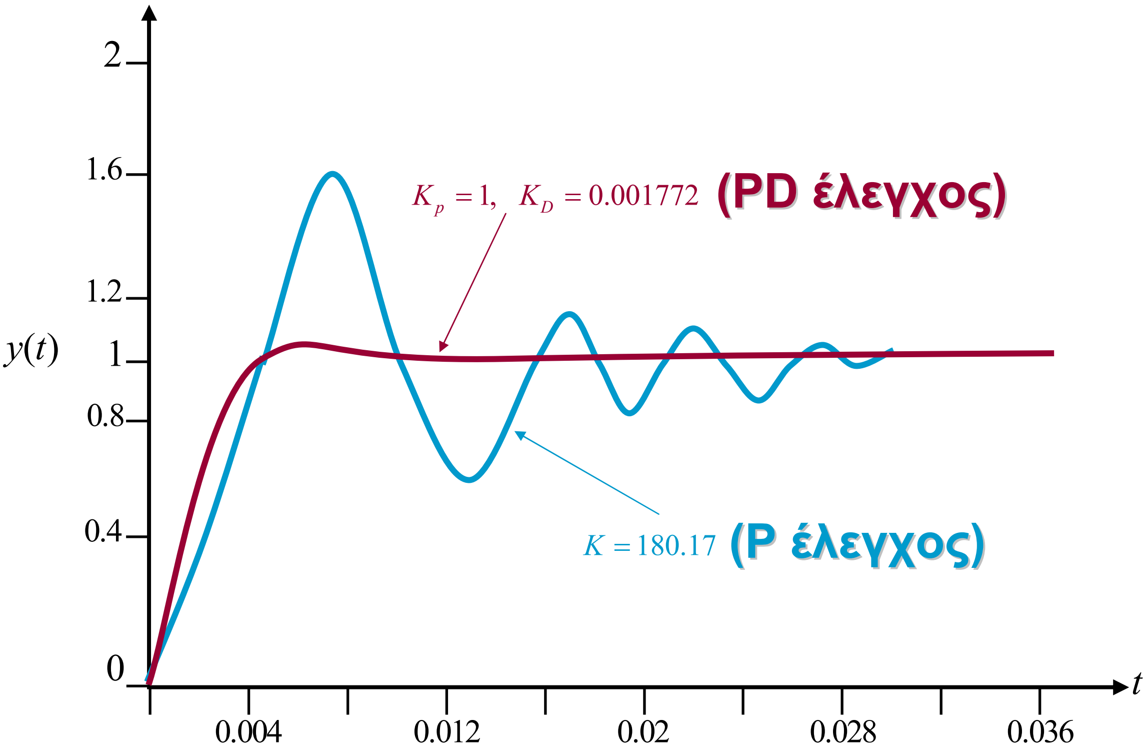
$$s^2 + (361.2 + 815,265 K_D)s + 815,265 K_p = 0$$

Έστω: $K_p = 1$ Ο συντελεστής απόσβεσης είναι:

$$\zeta = 0.2 + 451.46 K_D$$

Εάν θέλουμε **ζ=1**, θα πρέπει **K_D=0.001772**

Το παρακάτω σχήμα δίνει τη βελτίωση της χρονικής απόκρισης.



Η χαρακτηριστική εξίσωση, με βάση την συνθήκη ευστάθειας, δίνει:

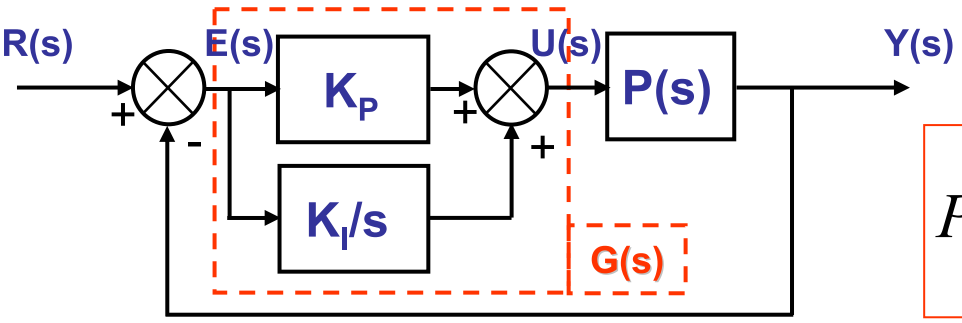
$$\boxed{\begin{array}{l} K_p > 0 \\ K_D > -0.000443 \end{array}}$$

$$\begin{array}{l|cc|} s^2 & 1 & 815,265K_p \\ s^1 & 361.2 + 815,265K_D & 0 \\ s^0 & 815,265K_p & 0 \end{array}$$

$$K_p > 0$$

$$K_D > \frac{-361.2}{815,365} = -0.000443$$

ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΟΡΟΥ ΣΤΗ ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ



$$P(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

$$G(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

$$G(s)P(s) = \frac{\omega_n^2(K_P s + K_I)}{s^2(s+2\zeta\omega_n)}$$

- **πρόσθεση μηδενικού στο σημείο:** $s = -\dfrac{K_I}{K_P}$
- **πρόσθεση πόλου στο:** $s = 0$
- **αυξάνει την τάξη του συστήματος κατά 1**
- **αυξάνει τον τύπο του συστήματος κατά 1** → **(μείωση σφάλματος)**

Ευστάθεια: **(επιλογή σταθερών)**

Παράδειγμα

Για το προηγούμενο σύστημα είναι:

$$G(s)P(s) = \frac{815,265K_p(s + {K_I}/{K_P})}{s^2(s+361.2)}$$

Χαρακτηριστική εξίσωση του κλειστού συστήματος:

$$s^2 + 361.2s^2 + 815,265K_P s + 815,265K_I = 0$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο Routh βρίσκουμε ότι
το σύστημα είναι ευσταθές όταν:

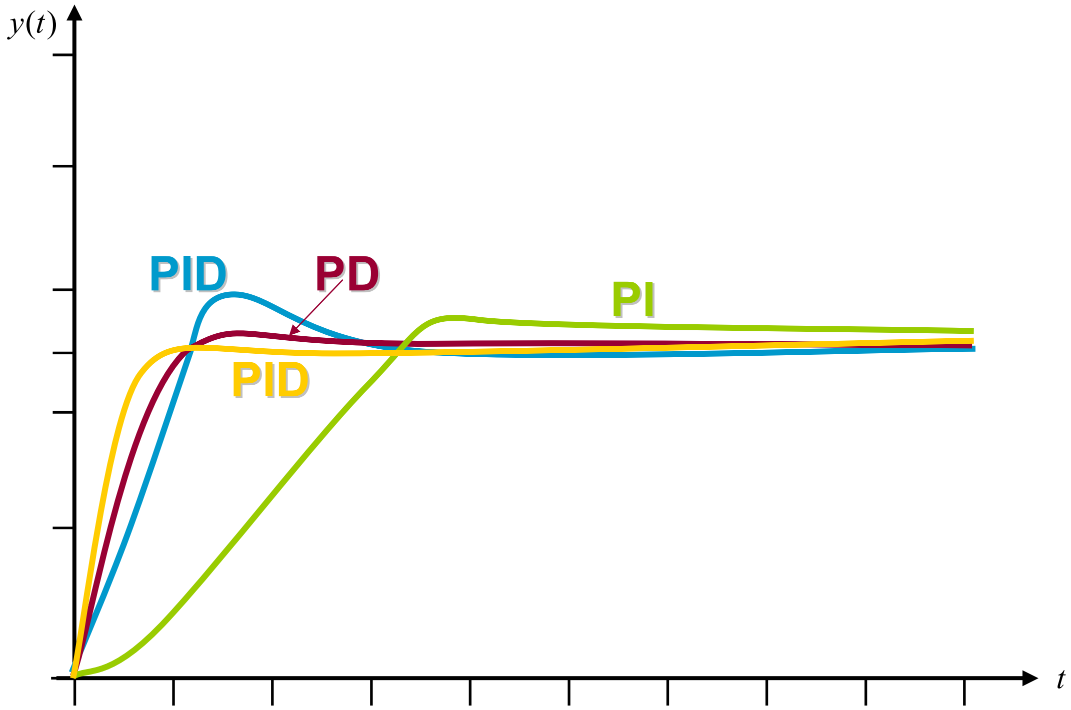
$$\boxed{O<K_I<361.2K_P}$$

Γενικά επιλέγουμε τα $\mathbf{K_I, K_P}$ έτσι ώστε το μηδενικό $\mathbf{s=- K_I/ K_P}$ να είναι σχετικά κοντά στην αρχή των αξόνων και μακριά από την μικρότερη ιδιοτιμή του **G(s) P(s)**.

Για την περίπτωσή μας πρέπει:

$$\boxed{K_I / K_P <<361.2}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)



PD:	$K_P=1$	$K_D=0.001772$	
PI:	$K_P=0.08$		$K_I=0.8$
PID:	$K_P=1,01$	$K_D=0.001$	$K_I=10$
PID:	$K_P=1.03544$	$K_D=0.003544$	$K_I=10$

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ P.I.D. ΕΛΕΓΚΤΗ

ΡΥΘΜΙΣΗ PD: ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΣΤΗ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ (ΑΠΟΣΒΕΣΗ)

ΡΥΘΜΙΣΗ PI: ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΣΤΗ ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ (ΣΦΑΛΜΑ e_{μ})

μεγαλύτεροι χρόνοι απόκρισης

ΡΥΘΜΙΣΗ P.I.D.

1. ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ

$$G(s) = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s} =$$

$$= (1 + K_{D1} s)(K_{P2} + \frac{K_{I2}}{s}$$

Δηλ. PD και PI σε σειρά.

Παίρνουμε K_{P1}=1 επειδή χρειάζονται μόνο τρεις παράμετροι. Τότε:

$$K_P = K_{P2} + K_{D1} K_{I2}$$

$$K_D = K_{D1} K_{P2}$$

$$K_I = K_{I2}$$

2. ΡΥΘΜΙΣΗ PI

- Θεωρούμε **μόνο** τη μονάδα PI και επιλέγουμε τις τιμές των K_{I2} και K_{P2} έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις χρονικής απόκρισης (=χρόνος ανύψωσης)

- Το σφάλμα μόνιμης κατάστασης βελτιώνεται κατά ένα βαθμό.

- Η μέγιστη υπερύψωση, σ' αυτό το στάδιο, μπορεί να είναι μεγάλη.

3. ΡΥΘΜΙΣΗ PD

- Σχεδιάζουμε τη μονάδα PD προκειμένου να μειωθεί η μέγιστη υπερύψωση.

Επιλέγουμε την τιμή του K_{D1} έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις απόσβεσης.

4. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΕΛΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

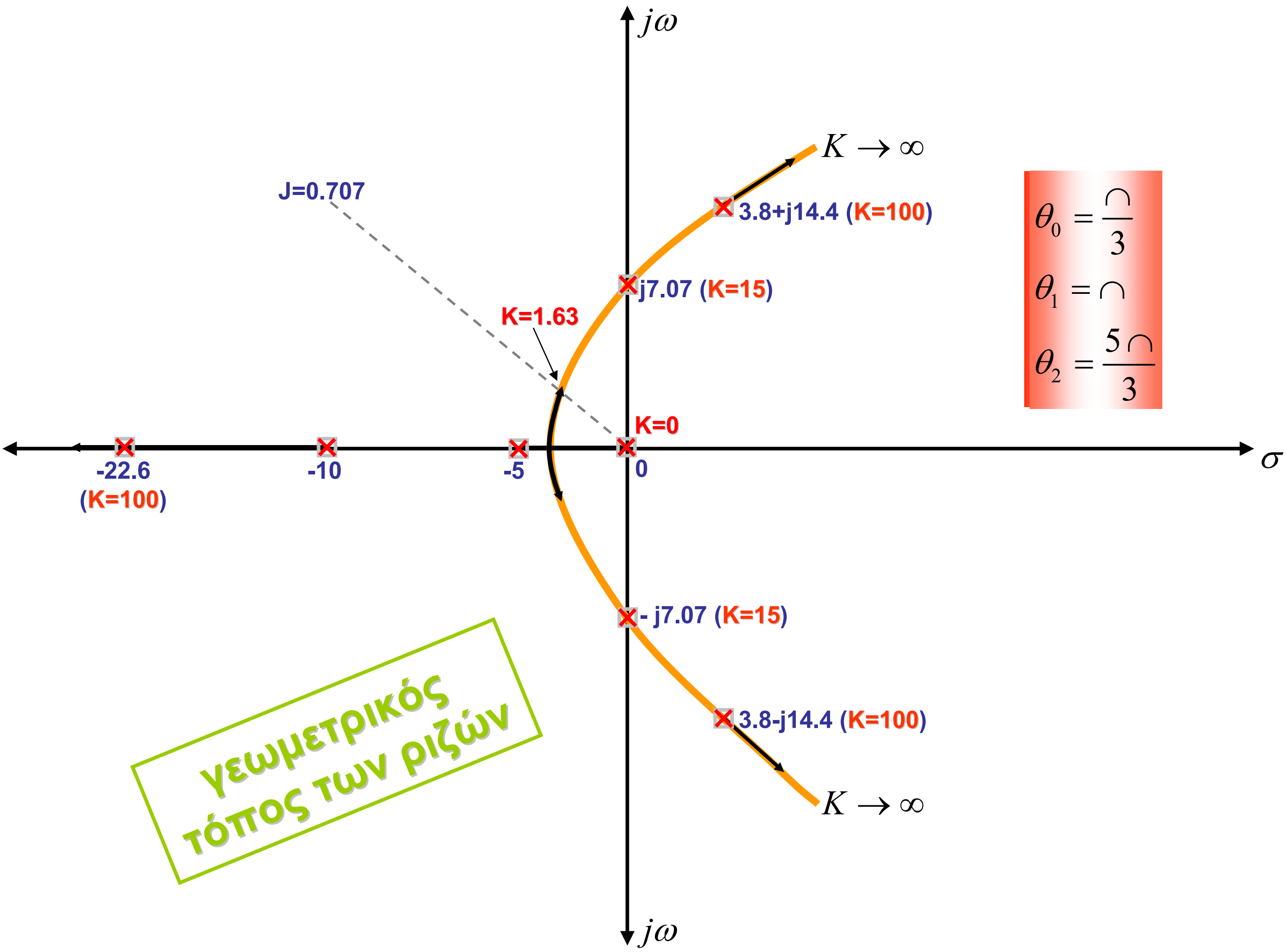
- Από τις προηγούμενες εξισώσεις.

Παράδειγμα

Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει τη σχεδίαση PD, PI και PID ελεγκτών για ένα σύστημα 3ης τάξης με μοναδιαία ανάδραση.
Έστω το σύστημα:

$$P(s) = \frac{K}{s(1+0.1s)(1+0.2s)}$$

Για **K=100** η σταθερά σφάλματος ταχύτητας είναι **K_v=100**.
Ακόμη μπορεί να δειχθεί ότι το κλειστό σύστημα χωρίς αντιστάθμιση είναι ευσταθές.
Η κρίσιμη τιμή του K **για ευστάθεια** είναι 15 (**K=15**).



ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ P.D. ΕΛΕΓΚΤΗ

$$G(s)P(s) = \frac{5000K_D(s+\frac{K_P}{K_D})}{s(s+5)(s+10)}$$

ΣΚΟΠΟΣ:

- διατήρηση της **K_v=100**
- καλή σχετική ευστάθεια

→ **K_P=1**

χαρακτηριστική εξίσωση του κλειστού συστήματος:

$$s^3 + 15s^2 + (50 + 5000K_D)s + 5000 = 0$$

για ευστάθεια πρέπει: **K_D>0.057**

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Βελτιώνεται η ευστάθεια αλλά παραμένει σημαντική μέγιστη υπερύψωση (περίπου 60%)

$$\boxed{K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)F(s)}$$

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ P.I. ΕΛΕΓΚΤΗ

$$G(s)P(s) = \frac{5000K_P(s + \frac{K_I}{K_P})}{s^2(s+5)(s+10)}$$

ΣΚΟΠΟΣ:

- Ο P.I. Ελεγκτής σχεδιάζεται έτσι ώστε η τιμή **K_I /K_P** να είναι σημαντικά μικρότερη από την κυρίαρχη ιδιοτιμή του P(s), δηλ. από την τιμή s=-5.

Έστω **K_I /K_P =0.1**. Έτσι έχουμε:

$$G(s)P(s) = \frac{5000K_P(s+0.1)}{s^2(s+5)(s+10)}$$

Το μηδενικό –0.1 απαλείφεται, στην πράξη, με τον ένα πόλο στο μηδέν. Έτσι:

$$G(s)P(s) \simeq \frac{5000K_P}{s(s+5)(s+10)}$$

Η απαλοιφή αυτή δεν επηρεάζει τη μεταβατική κατάσταση. Τώρα η **K_P** επιλέγεται έτσι ώστε να ικανοποιεί τις απαιτήσεις για απόσβεση.

ΓΕΝΙΚΑ:

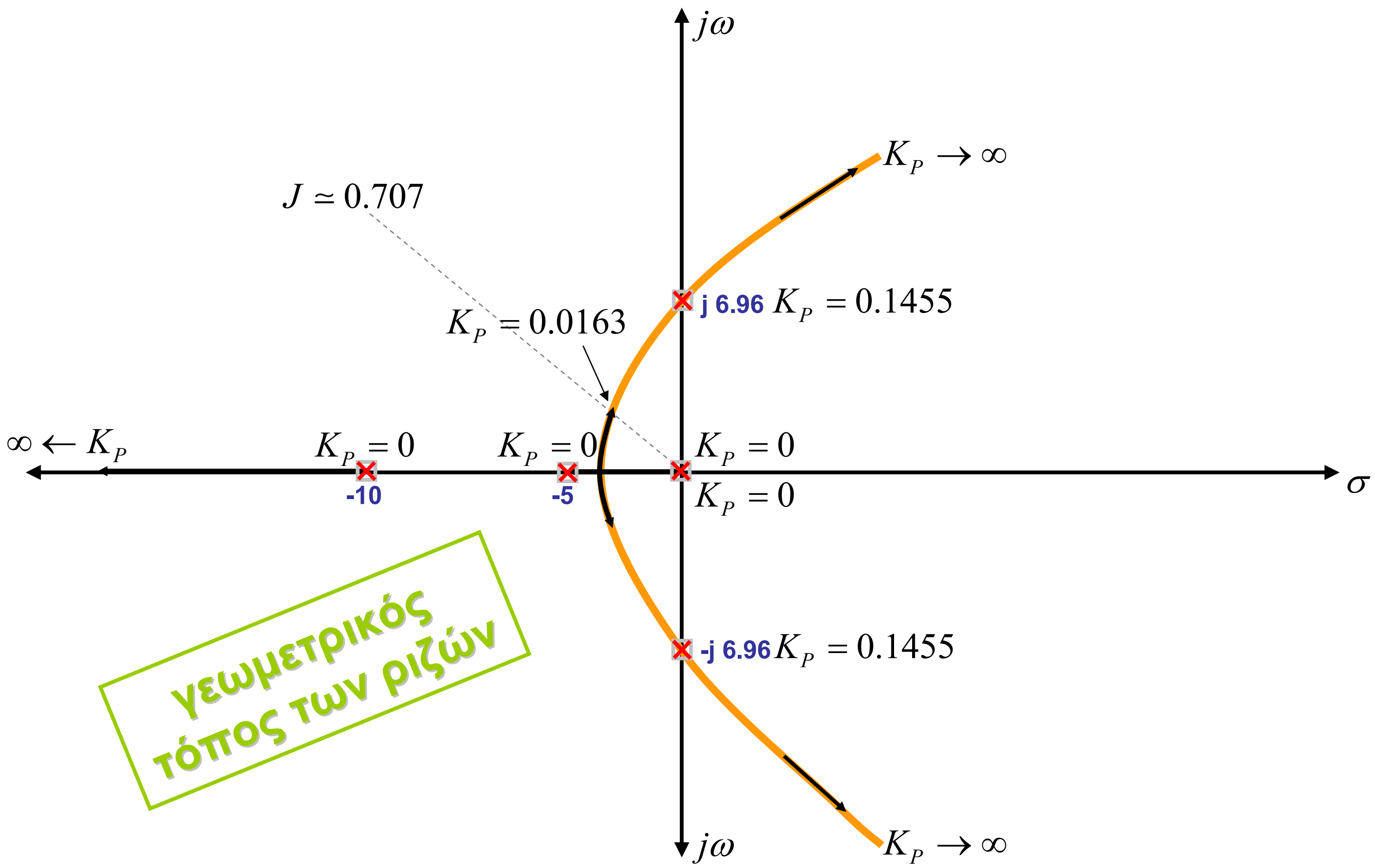
$$K_P = \frac{\textit{τιμή του } \mathbf{K} \textit{ για επιθυμητή απόσβεση}}{\textit{τιμή του } \mathbf{K} \textit{ για σφάλμα μόνιμης κατάστασης}}$$

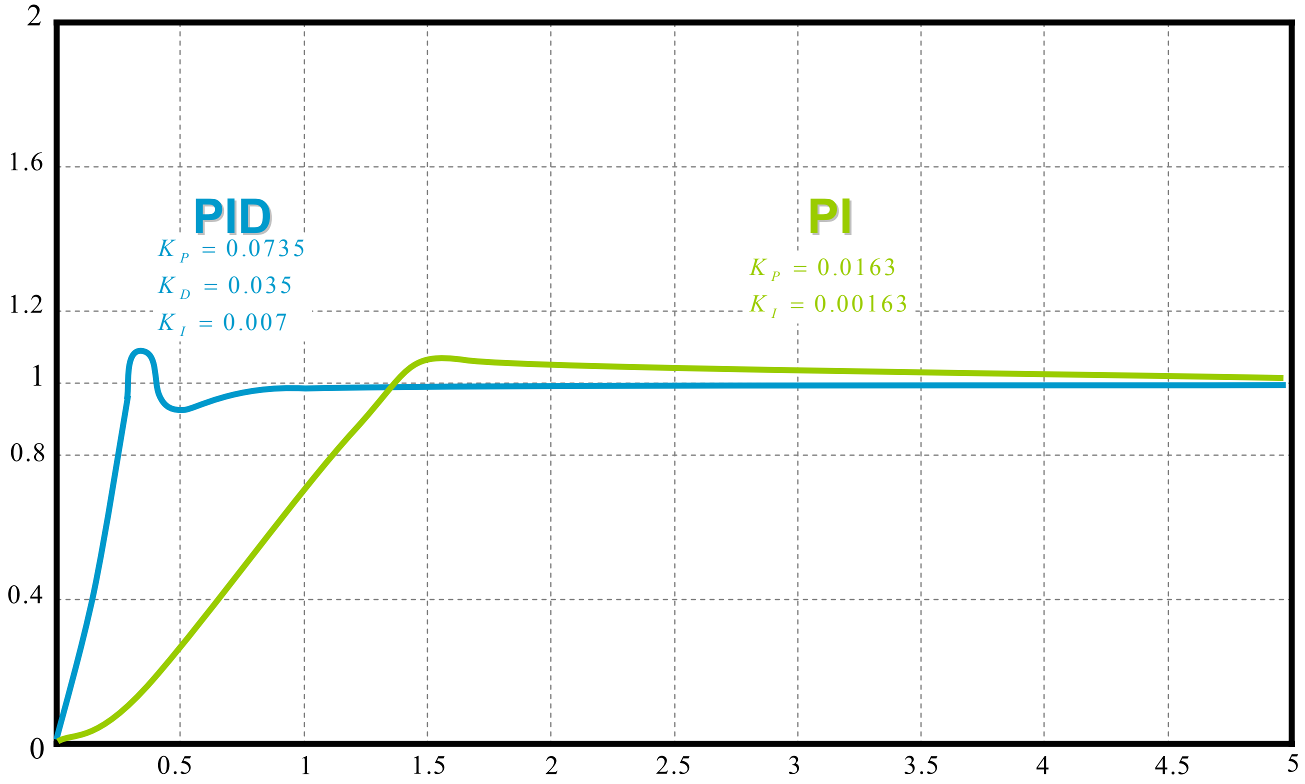
Για **K=1.63** έχουμε **ζ=0.707**, ικανοποιητική.

Για **K=100** έχουμε την επιθυμητή **K_v**, σταθερά σφάλματος ταχύτητας. Άρα βρίσκουμε:

$$K_P = \frac{1.63}{100} = 0.0163$$

Τα παρακάτω σχήματα δείχνουν τον γεωμετρικό τόπο των ριζών και τη χρονική απόκριση.





ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ P.I.D. ΕΛΕΓΚΤΗ

ΣΚΟΠΟΣ:

- Προκειμένου να μειώσουμε τους χρόνους ανύψωσης και αποκατάστασης του συστήματος εφαρμόζουμε P.I.D. έλεγχο. Θα είναι:

$$G(s)P(s) = \frac{5000(1+K_{D1}s)(K_{P2}s+K_{I2})}{s^2(s+5)(s+10)}$$

Πρώτα σχεδιάζουμε το τμήμα P.I.
Θέτοντας $\mathbf{K_{I2}/K_{P2}=0.1}$, έχουμε:

$$G(s)P(s) = \frac{5000K_{P2}(s+0.1)}{s^2(s+5)(s+10)}$$

- Για $\mathbf{K_{P2}=1}$, η μεταβατική απόκριση είναι όμοια με του μη αντισταθμισμένου συστήματος διότι το μηδενικό της **G(s)P(s)** στο **s=-0.1** πρακτικά απαλείφεται με ένα πόλο **s=0**.
- Όταν χρησιμοποιείται μόνο ο P.I. ελεγκτής, πρέπει $\mathbf{K_{P2}=0.0163}$ ώστε να δώσει **ζ=0.707**.
- Για να πετύχουμε καλύτερο χρόνο ανύψωσης έστω $\mathbf{K_{P2}=0.07}$ (το σύστημα γίνεται ασταθές για $\mathbf{K_{P2}\geq 0.15}$.) Τώρα η $\mathbf{K_{D1}}$ μπορεί να επιλεγεί ώστε να μειώνεται η μέγιστη υπερύψωση και να διατηρούνται οι χρόνοι απόκρισης. Το σχήμα της βηματικής απόκρισης έγινε για $\mathbf{K_{D1}=0.5}$, $\mathbf{K_{P2}=0.07}$ και $\mathbf{K_{I2}=0.007}$.

Οι παράμετροι αυτές δίνουν τις τιμές:

$$\boxed{K_P = 0.0735, \quad K_D = 0.035, \quad K_I = 0.007}$$

ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗ ΜΕ ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΠΟΛΩΝ - ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ

Μιγαδικοί πόλοι (ζεύγη)
κοντά στον άξονα των φανταστικών αριθμών
$\rightarrow$ **αστάθεια, μικρή απόσβεση**.

❑ **ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΤΗΣ ΜΕ:**

ΜΗΔΕΝΙΚΑ ΠΟΥ ΕΞΟΥΔΕΤΕΡΩΝΟΥΝ ΤΙΣ ΚΥΡΙΑΡΧΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ (=ΑΝΕΠΙΘΥΜΗΤΟΥΣ ΠΟΛΟΥΣ), ΚΑΙ ΜΕ **ΠΟΛΟΥΣ** ΣΕ ΕΠΙΘΥΜΗΤΕΣ ΘΕΣΕΙΣ $\rightarrow$

ΕΠΙΘΥΜΗΤΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ.

$$P(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 10)} \qquad \begin{aligned} s &= 0 \\ s &= -0.5 \pm j3.12 \end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{s^2 + s + 10}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \zeta, \quad \omega_n$$ επιλέγονται κατάλληλα

ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ: ΜΗ ΑΚΡΙΒΗΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗ

ΑΙΤΙΕΣ:

ΜΗ ΑΚΡΙΒΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟ

- ΣΦΑΛΜΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ ΓΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ
- ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ
- ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ – ΜΕΙΩΣΗ ΤΑΣΗΣ
- ΧΡΟΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ

$\Downarrow$

ΜΗ ΑΚΡΙΒΕΙΣ ΘΕΣΕΙΣ ΠΟΛΩΝ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

ΣΤΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

ΔΕΝ ΧΡΕΙΑΖΕΤΑΙ ΑΚΡΙΒΗΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗ,

ΑΡΚΕΙ Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Παράδειγμα

$$P(s) = \frac{K}{s(s+p_1)(s+p_2)}$$

-p₁, **-p₂** μιγαδικοί συζυγείς πόλοι
που πρέπει να εξουδετερωθούν

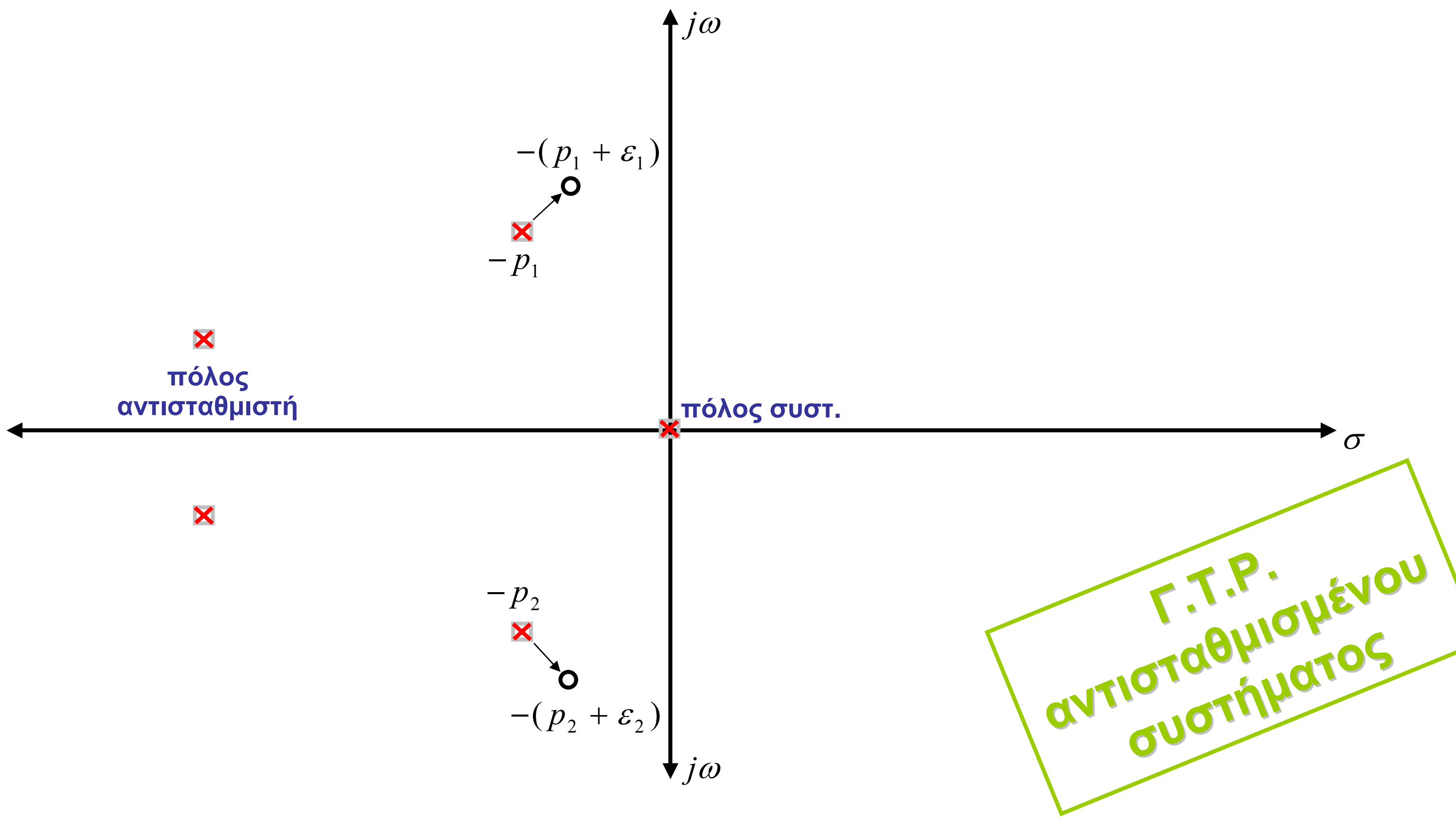
$$G(s) = \frac{(s+p_1+\varepsilon_1)(s+p_2+\varepsilon_2)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

ε_1: μιγαδικός αριθμός με πολύ μικρό μέτρο
ε_2: συζυγής του **ε_1**

Συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου:

$$G(s)P(s) = \frac{K(s+p_1+\varepsilon_1)(s+p_2+\varepsilon_2)}{s(s+p_1)(s+p_2)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$$

Δεν απαλείφονται οι αντίστοιχοι πόλοι επειδή δεν γίνεται ακριβής απαλοιφή



Παράδειγμα (συνέχεια)

Συνάρτηση Μεταφοράς κλειστού βρόχου:

$$H(s)=\frac{K(s+p_1+\varepsilon_1)(s+p_2+\varepsilon_2)}{s(s+p_1)(s+p_2)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)+K(s+p_1+\varepsilon_1)(s+p_2+\varepsilon_2)}$$

όπως φαίνεται από τον γ.τ.ρ., οι δύο από τους πόλους του κλειστού συστήματος βρίσκονται μεταξύ **$-p_1$, $-p_1-\varepsilon_1$** και **$-p_2$, $-p_2-\varepsilon_2$**, αντίστοιχα, δηλ. πολύ κοντά στους πόλους και τα μηδενικά που έπρεπε να απαλειφθούν. Η **H(s)** προσεγγίζεται ως εξής:

$$H(s)=\frac{K(s+p_1+\varepsilon_1)(s+p_2+\varepsilon_2)}{(s+p_1+\delta_1)(s+p_2+\delta_2)(s^3+2\zeta\omega_n s^2+\omega_n^2 s+K)}$$

Όπου **δ_1, δ_2** είναι μιγαδικοί συζυγείς αριθμοί με πολύ μικρό μέτρο, που εξαρτώνται από τους **ε_1, ε_2** και τις άλλες παραμέτρους του συστήματος.

Η **H(s)** αναπτύσσεται σε μερικά κλάσματα ως εξής:

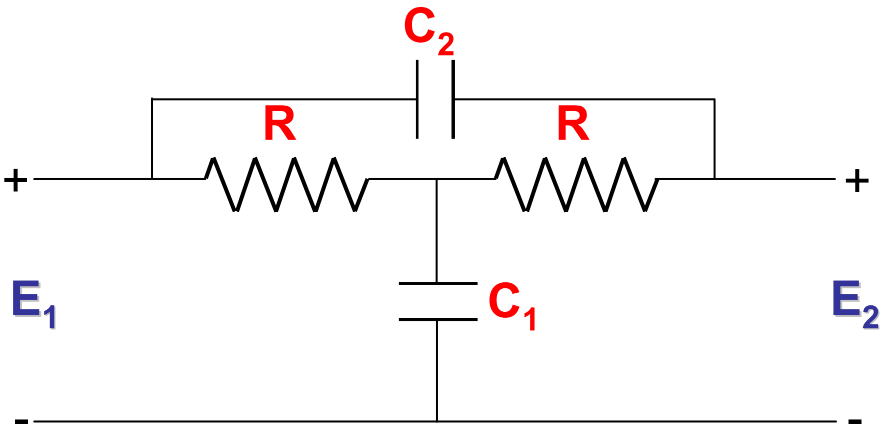
$$H(s)=\frac{K_1}{s+p_1+\delta_1}+\frac{K_2}{s+p_2+\delta_2}+\boxed{\text{όροι που περιέχουν τους εναπομείναντες πόλους}}$$

$$\left.\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{K_1}\text{: ανάλογος του } \boldsymbol{\varepsilon_1-\delta_1}\\ \mathbf{K_2}\text{: ανάλογος του } \boldsymbol{\varepsilon_2-\delta_2}\end{array}}\right\}\text{ πολύ μικροί αριθμοί.}$$

Αν και οι **$-p_1$, $-p_2$** δεν απαλείφονται, η επίδρασή τους στη χρονική απόκριση είναι αμελητέα.

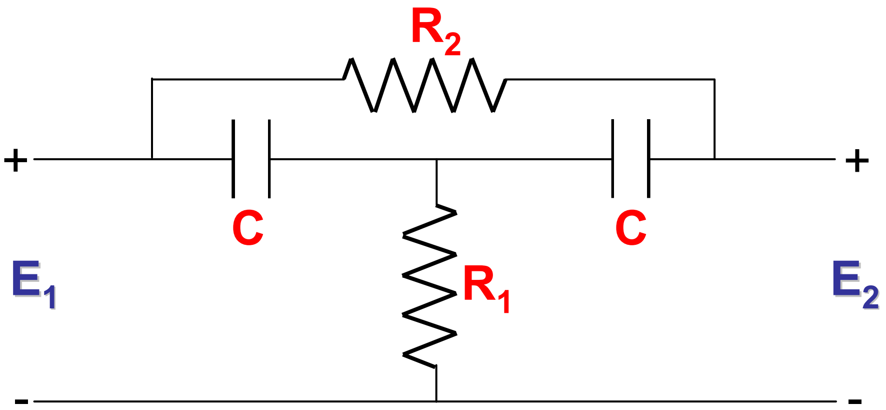
ΠΡΟΣΟΧΗ: ΔΕΝ ΑΠΑΛΕΙΦΟΥΜΕ ΠΟΛΟΥΣ ΠΟΥ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΟ ΔΕΞΙΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ Ή ΕΠΑΝΩ ΣΤΟΝ ΑΞΟΝΑ ΤΩΝ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ: ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΓΕΦΥΡΩΜΕΝΟΥ - Τ



τύπου - 1

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{1 + 2RC_1 s + R^2 C_1 C_2 s^2}{1 + R(C_1 + 2C_2)s + R^2 C_1 C_2 s^2}$$



τύπου - 2

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{1 + 2R_1 C s + C^2 R_1 R_2 s^2}{1 + C(R_2 + 2R_1)s + C^2 R_1 R_2 s^2}$$

ή $$\frac{E_2}{E_1} = \frac{s^2 + 2\zeta_2 \omega_{nz} + \omega_{nz}^2}{s^2 + 2\zeta_p \omega_{np} + \omega_{np}^2}$$

$$\zeta_z = \sqrt{C_2 / C_1}, \qquad \omega_{nz} = \pm \, 1 \Big/ R\sqrt{C_1 C_2}$$

$$\zeta_p = \frac{C_1 + 2C_2}{2\sqrt{C_1 C_2}} = \frac{1 + 2\zeta_z^2}{2\zeta_z}$$

$$\omega_{np} = \pm \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}} = \omega_{nz}$$