ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Πρακτική σημασία: φραγμένη είσοδος →
φραγμένη έξοδος

Ευστάθεια: χαρακτηριστικό του συστήματος ανεξάρτητη από είσοδο - έξοδο

Βασικό αντικείμενο αυτομάτου ελέγχου: Η έξοδος να ακολουθεί την είσοδο →
σε ασταθή συστήματα: **ΑΔΥΝΑΤΟ.**

Ευστάθεια: η πρώτη προδιαγραφή – απαίτηση για το σύστημα

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ

ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 περιγραφή στο χώρο κατάστασης

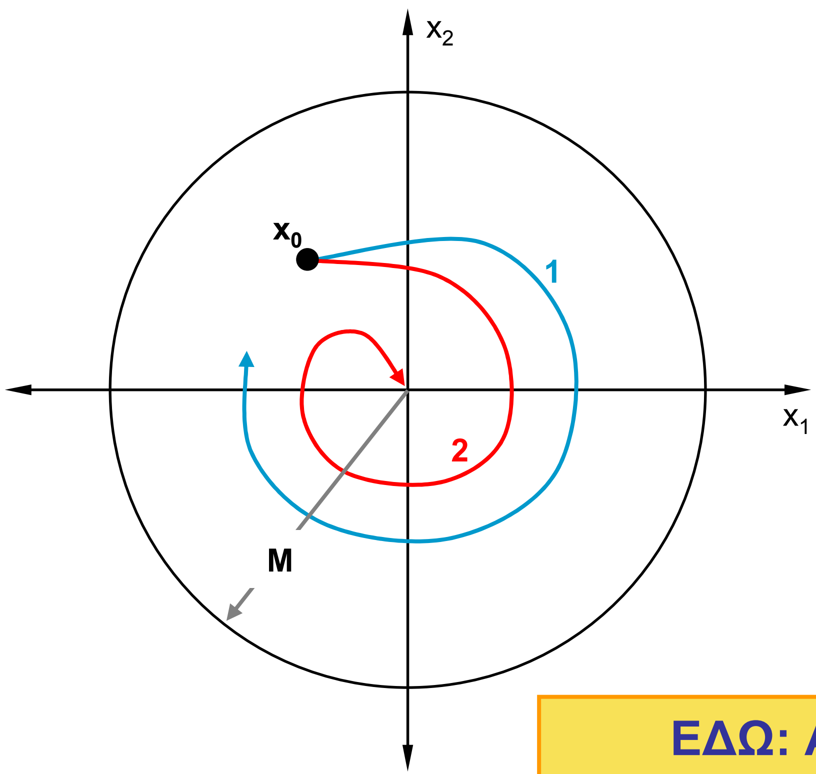
$$\dot{x} = Ax + Br, \qquad x(t_0) = x_0$$
$$y = Cx + Dr$$

ΕΣΤΩ: **r(t)=0** → σύστημα μηδενικής διέγερσης

Ευσταθές ΑΝ: για κάθε πεπερασμένη $\mathbf{x(t_0)}$

$$\exists \quad \pi\varepsilon\pi\varepsilon\rho. \quad M(x(t_0)):$$
$$\| x(t) \| < M, \quad t \geq t_0$$
$$\underset{t\to\infty}{o\rho} \| x(t) \| = 0$$

- $\| \bullet \|$ ευκλείδιο μέτρο: $\| x \| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$



1. **ευσταθές** στον κύκλο Μ
2. **ασυμπτωτικά ευσταθές**

ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ

ΕΔΩ: ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑ ΕΥΣΤΑΘΗ
(για απλούστευση **ΕΥΣΤΑΘΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**)

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 περιγραφή με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$p(s) = det(sI - A) = |sI - A| = \prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_i)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$: ιδιοτιμές του Α

Ευσταθές ΑΝ: $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 περιγραφή με πίνακα κρουστικής απόκρισης

$$h(t) = L^{-1}\left[C(sI - A)^{-1}B + D\right] =$$
$$e^{At}B + D\delta(t)$$

Ευσταθές ΑΝ: $\int_0^{\infty} |h_{ij}(t)|\,dt < M, \qquad \forall i, j$

M: πεπερασμένος θετικός αριθμός

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΟΡΙΣΜΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 ισχύει και για μη γραμμικά, χρονικά μεταβαλλόμενα

Φραγμένη έξοδος για **ΚΑΘΕ ΦΡΑΓΜΕΝΗ ΕΙΣΟΔΟ**

Παράδειγμα 1

Μελέτη της ευστάθειας με βάση τους ορισμούς 1, 2, 3, 4 του συστήματος:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1) Για **r=0**, το διάνυσμα κατάστασης είναι:

$$x(t) = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right] x(0) =$$

$$= L^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= L^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

$$\|x(t)\| = \left[x_1^2(t) + x_2^2(t)\right]^{1/2} = \left[e^{-2t} + e^{-2t}\right]^{1/2} = \sqrt{2}e^{-t}$$

$$\|x(t)\| < \sqrt{2}, \qquad \|x(t)\| \underset{t\to\infty}{\to} 0$$

ΕΥΣΤΑΘΕΣ

2) $p(s) = |sI - A| = (s+1)(s+2)$

$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -2$

ΕΥΣΤΑΘΕΣ

3) $h(t) = Ce^{At}B = CMe^{\Lambda t}M^{-1}B$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$h(t) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [1 \quad 1]\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\int_0^\infty |h(t)|dt = \int_0^\infty \left|e^{-t} - e^{-2t}\right|dt \le \int_0^\infty \left|e^{-t}\right| + \left|e^{-2t}\right|dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-t}dt + \int_0^\infty e^{-2t}dt = -\left[e^{-t}\right]_0^\infty - \frac{1}{2}\left[e^{-2t}\right]_0^\infty =$$

$$= -[0 \quad -1] - \frac{1}{2}[0 \quad -1] = 1 + 0.5 = 1.5$$ πεπερασμένο

ΕΥΣΤΑΘΕΣ

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

4) ΕΣΤΩ: η είσοδος **$|r(t)|<c<\infty$**

$$|y(t)| = \left|\int_0^t h(\tau) r(t-\tau) d\tau\right| \le c \int_0^t |h(\tau)| d\tau$$

$= 1.5c$ πεπερασμένη

ΕΥΣΤΑΘΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ⟶

⟶ **ΜΕΓΑΛΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ** ⟶

⟶ **ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ**

1. **ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ: p(s)**
2. **ΚΡΙΤΗΡΙΟ NYQUIST**
3. **ΚΡΙΤΗΡΙΟ BODE**
4. **ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ**

πεδίο του s

5. **ΚΡΙΤΗΡΙΟ LYAPUNOV** πεδίο του t

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ: προσδιορισμός της ευστάθειας με μια απλή υπολογιστική διαδικασία παρακάμπτοντας την εύρεση των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

ΙΚΑΝΗ ΣΥΝΘΗΚΗ, **$\alpha_i : \in \mathbb{R}$**

έχει μια ή περισσότερες ρίζες στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο όταν ένας τουλάχιστον συντελεστής του είναι μηδενικός ή / και όταν οι συντελεστές του είναι ετερόσημοι.

ΚΡΙΤΗΡΙΟΙ ROUTH: Προσδιορισμός του αριθμού των ριζών με **Re(λ_i)>0**

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}, \qquad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}} \ldots$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1}, \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{-b_1} \ldots$$

ΙΚΑΝΗ ΚΑΙ ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ:

Ευστάθεια: $\longleftrightarrow$ ΟΧΙ ΑΛΛΑΓΗ ΠΡΟΣΗΜΩΝ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΗ ΣΤΗΛΗ.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΛΛΑΓΩΝ ΠΡΟΣΗΜΟΥ= ΑΡ. ΡΙΖΩΝ ΜΕ **Re(λ_i)>0**

Παραδείγματα

α) $$p(s) = s^3 + 10s^2 + 11s + 6$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 11 \\ s^2 & 10 & 6 \\ s^1 & 10.4 & 0 \\ s^0 & 6 & 0 \end{array}$$

Ευσταθές

β) $$p(s) = s^4 + s^3 + s^2 + 2s + 1$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 1 & 1 \\ s^3 & 1 & 2 & 0 \\ s^2 & -1 & 1 & 0 \\ s^1 & 3 & 0 & 0 \\ s^0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Ασταθές

2 πόλοι στο δεξιό

Πολλαπλασιασμός ή **Διαίρεση γραμμής** ή **στήλης** με **ΣΤΑΘΕΡΟ ΑΡΙΘΜΟ**

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

α) μηδενικό στην πρώτη στήλη → βοηθητικό πολυώνυμο:

$$p'(s) = (s+a)\,p(s), \qquad a > 0, \qquad -a$$ **ΌΧΙ ΡΙΖΑ**

Παράδειγμα

$$p(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3$$

s^4	1	2	3
s^3	1	2	0
s^2	0	3	0
s^1	?		
s^0			

$$p'(s) = (s+1)\,p(s) =$$
$$= s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 5s + 3$$

s^5	1	3	5
s^4	2	4	3
s^3	1	3.5	0
s^2	–3	3	0
s^1	4.5	0	0
s^0	3	0	0

Ασταθές

2 ΡΙΖΕΣ με $Re(\lambda_i)>0$

β) μηδενική γραμμή: βοηθητικό πολυώνυμο:

$q(s)$: προ της μηδενικής $\rightarrow q'(s)$

Παράδειγμα

$$p(s) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 3s + 3$$

s^5	1	2	3
s^4	1	2	3
s^3	0	0	0
$\vdots$			

$$q(s) = s^4 + 2s^2 + 3$$

$$q'(s) = 4s^3 + 4s$$

s^5	1	2	3
s^4	1	2	3
s^3	4	4	0
s^2	1	3	0
s^1	–8	0	0
s^0	3	0	0

Ασταθές

2 ΡΙΖΕΣ με $Re(\lambda_i)>0$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ HURWITZ

ΟΧΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΡΙΖΩΝ ΜΕ **$Re(\lambda_i)>0$**

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

$$\Delta_0 = a_n, \qquad \Delta_1 = a_{n-1}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} \ldots$$

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & a_0\ (\acute{\eta}\ a_1) & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \cdots & a_1\ (\acute{\eta}\ a_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-3} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ή } \alpha_1$$

ΙΚΑΝΗ ΚΑΙ ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ: **$\Delta_i>0, \ \forall \ i=0,1,\ldots$**

$$p(s) = s^3 + 10s^2 + 11s + 6$$

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = 10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 6 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 104 \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 10 & 6 \end{bmatrix} = 564$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΝΕΧΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

$$p_1(s) = a_n s^n + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots \qquad p_2(s) = a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-3}s^{n-3} + \ldots$$

$$\frac{p_1(s)}{p_2(s)} = h_1 s + \cfrac{1}{h_2 s + \cfrac{1}{\ldots}}, \qquad h_i > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

$$p(s) = s^3 + 10s^2 + 11s + 6$$

$$p_1(s) = s^3 + 11s$$

$$p_2(s) = 10s^2 + 6$$

$$\frac{p_1(s)}{p_2(s)} = \frac{1}{10}s + \cfrac{1}{\frac{100}{104}s + \cfrac{1}{\frac{25}{156}s}}$$

$$h_i > 0$$