Παράδειγμα 5.11

Δίνεται το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{s-1}, \quad K > 0 \tag{5.35}$$

Να βρεθεί για ποιες τιμές του K είναι το σύστημα ευσταθές.

Λύση

Επειδή η $G(s)F(s)$ έχει ένα πόλο στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο, θα πρέπει το διάγραμμα Nyquist της $G(s)F(s)$ να περικλείει το κρίσιμο σημείο $(-1, j0)$, μία φορά, διαγραφόμενο με φορά αντίθετη από αυτή του δρόμου Nyquist, προκειμένου να είναι το κλειστό σύστημα ευσταθές. Έχουμε,

$$G(j\omega)F(j\omega) = \frac{K}{j\omega - 1}$$

Η κρίσιμη συχνότητα είναι $\omega_c = 0 rad/\sec$ και $G(j0)F(j0) = -K$. Άρα θα πρέπει $-K < -1$ ή $K > 1$.

5.5.2 Γεωμετρικός τόπος των ριζών

Εισαγωγή

Ο **γεωμετρικός τόπος των ριζών (γ.τ.ρ.)** είναι μια εποπτική μέθοδος μελέτης της ευστάθειας και της σχετικής ευστάθειας ενός συστήματος. Όπως είναι γνωστό, οι πόλοι ενός συστήματος (δηλαδή, οι ρίζες του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς του) καθορίζουν την ευστάθειά του, καθώς επίσης και τη χρονική του απόκριση. Εξάλλου, η σχετική ευστάθεια του συστήματος καθορίζεται και από την τιμή της σταθεράς ενίσχυσης K, η οποία στη γενική περίπτωση παίρνει τιμές που κυμαίνονται από $-\infty$ έως ∞. Κάθε μεταβολή του K έχει σαν συνέπεια τη μετατόπιση των πόλων πάνω στο μιγαδικό επίπεδο. Έτσι, ο γεωμετρικός τόπος των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης του κλειστού συστήματος, καθώς το K μεταβάλλεται, δίνει σημαντικές πληροφορίες σχετικά με την ευστάθεια και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το σχεδιασμό ευσταθών συστημάτων.

Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζεται μια προσεγγιστική μέθοδος κατασκευής της γραφικής παράστασης του γ.τ.ρ., η οποία αναπτύχθηκε από τον W.R. Evans.

Κατασκευή του γεωμετρικού τόπου των ριζών

Η χαρακτηριστική εξίσωση του κλειστού συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$1 + G(s)F(s) = 0 \tag{5.36}$$

η οποία γράφεται και με τη μορφή

$$G(s)F(s) = -1 \tag{5.37}$$

Για τη μιγαδική συνάρτηση $G(s)F(s)$ έχουμε, λόγω της (5.37),

$$|G(s)F(s)| = 1 \text{ και } \angle G(s)F(s) = (2k+1)\pi, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{5.38}$$

Η $G(s)F(s)$ είναι μία ρητή συνάρτηση της μορφής

$$G(s)F(s) = K\frac{(s+z_1)(s+z_2)...(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)} \tag{5.39}$$

με μέτρο

$$|K|\frac{\prod_{i=1}^{m}|s+z_i|}{\prod_{i=1}^{n}|s+p_i|} = 1, \quad -\infty < K < \infty \tag{5.40}$$

και όρισμα

$$\sum_{i=1}^{m}\angle(s+z_i) - \sum_{i=1}^{n}\angle(s+p_i) = \begin{cases}(2k+1)\pi, & k>0\\ 2k\pi, & k<0\end{cases} \tag{5.41}$$

Ορισμός 5.7
Ο γ.τ.ρ. του κλειστού συστήματος με χαρακτηριστική εξίσωση (5.34) είναι ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων s που ικανοποιούν τις σχέσεις (5.37) – (5.39).

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένα σύνολο θεωρημάτων που επιτρέπουν την κατασκευή του γεωμετρικού τόπου των ριζών. Η απόδειξη των θεωρημάτων δεν παρουσιάζεται εδώ, είναι όμως διαθέσιμη στην ελληνική και ξένη βιβλιογραφία.

Θεώρημα 5.8
Τα σημεία του γεωμετρικού τόπου των ριζών για $K = 0$ είναι οι πόλοι της $G(s)F(s)$. Τα σημεία αυτά είναι τα **σημεία εκκίνησης** του γ.τ.ρ.

Θεώρημα 5.9
Τα σημεία του γεωμετρικού τόπου των ριζών για $K = \pm\infty$ είναι τα μηδενικά της $G(s)F(s)$. Τα σημεία αυτά καθώς και το $s \to \pm\infty$ είναι τα **σημεία άφιξης** του γ.τ.ρ.

Θεώρημα 5.10
Ο αριθμός των **διακεκριμένων τόπων** (κλάδων) του γεωμετρικού τόπου των ριζών ισούται με $\max(m,n)$, όπου m και n είναι ο αριθμός των μηδενικών και ο αριθμός των πόλων της $G(s)F(s)$, αντίστοιχα.

Θεώρημα 5.11
Ο γεωμετρικός τόπος των ριζών, για $K \in (-\infty, \infty)$, είναι **συμμετρικός** ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Θεώρημα 5.12
Για μεγάλες τιμές του s, ο γεωμετρικός τόπος των ριζών πλησιάζει ασυμπτωτικά σε ευθείες γραμμές (ασύμπτωτες). Οι **γωνίες των ασυμπτώτων** με τον άξονα των πραγματικών αριθμών δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \vartheta_k &= \frac{(2k+1)\pi}{n-m}, \quad k = 0,1,\ldots,|n-m|-1, \quad K>0 \\ \vartheta_k &= \frac{2k\pi}{n-m}, \quad k = 0,1,\ldots,|n-m|-1, \quad K<0 \end{aligned} \tag{5.42}$$

Θεώρημα 5.13
Όλες οι ασύμπτωτες του γεωμετρικού τόπου των ριζών τέμνονται σε ένα σημείο του άξονα των πραγματικών αριθμών. Το **σημείο τομής των ασυμπτώτων** είναι το σημείο σ, όπου

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n}(-p_i) - \sum_{i=1}^{m}(-z_i)}{n-m} \tag{5.43}$$

Υπενθυμίζεται ότι $-p_i$ είναι οι πόλοι και $-z_i$ είναι τα μηδενικά της $G(s)F(s)$, αντίστοιχα.

Θεώρημα 5.14
Ένα **τμήμα του άξονα των πραγματικών αριθμών** είναι και τμήμα του γ.τ.ρ., αν ισχύουν τα ακόλουθα:

Για $K>0$: Ο αριθμός των πραγματικών πόλων και μηδενικών της $G(s)F(s)$, που βρίσκονται δεξιά του τμήματος, είναι **περιττός**.

Για $K<0$: Ο αριθμός των πραγματικών πόλων και μηδενικών της $G(s)F(s)$, που βρίσκονται δεξιά του τμήματος, είναι **άρτιος**.

Θεώρημα 5.15
Τα **σημεία θλάσης** του γ.τ.ρ. είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\frac{d[G(s)F(s)]}{ds} = 0 \tag{5.44}$$

και επιπλέον ικανοποιούν τη σχέση $1+G(s)F(s)=0$, για κάποια πραγματική τιμή του K.

Θεώρημα 5.16
Οι **γωνίες εκκίνησης από τους μιγαδικούς πόλους** του γεωμετρικού τόπου των ριζών προσδιορίζονται ως εξής:

$$\vartheta_{-p_q} = \angle(s+p_q) = -(2k+1)\pi + \sum_{i=1}^{m} \angle(s+z_i)\Big|_{s=-p_q} - \sum_{i=1, i\neq q}^{n} \angle(s+p_i)\Big|_{s=-p_q} \tag{5.45}$$

όπου $-p_q$ είναι ο εν λόγω μιγαδικός πόλος.

Τέλος, τα **σημεία τομής** (αν υπάρχουν) του γ.τ.ρ. με τον άξονα των φανταστικών αριθμών προσδιορίζονται χρησιμοποιώντας το κριτήριο Routh.

Παράδειγμα 5.12

Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \tag{5.46}$$

Λύση

Τα σημεία εκκίνησης του γ.τ.ρ. είναι οι πόλοι της $G(s)F(s)$, δηλαδή τα σημεία $s=0$, $s=-1$, $s=-2$.

Τα σημεία άφιξης του γ.τ.ρ. είναι για $s \to \infty$.

Ο αριθμός των διακεκριμένων κλάδων του γ.τ.ρ. είναι: $\max(0,3)=3$.

Οι γωνίες των ασυμπτώτων είναι:

$$\vartheta_k = \frac{(2k+1)\pi}{3}, \quad k=0,1,2, \quad K>0$$
$$\vartheta_k = \frac{2k\pi}{3}, \quad k=0,1,2, \quad K<0$$

ή

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{3}, \quad \vartheta_1 = \pi, \quad \vartheta_2 = \frac{5\pi}{3}, \quad K>0$$
$$\vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad \vartheta_2 = \frac{4\pi}{3}, \quad K<0$$

Το σημείο τομής των ασυμπτώτων είναι

$$\sigma = \frac{0+(-1)+(-2)-(0)}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

Τα τμήματα του άξονα των πραγματικών αριθμών που ανήκουν στον γ.τ.ρ. είναι:

Για $K>0$: $(-\infty,-2)$ και $(-1,0)$

Για $K < 0$: $(-2,-1)$ και $(0,+\infty)$

Τα σημεία θλάσης του γ.τ.ρ. προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης:

$$\frac{d[G(s)F(s)]}{ds} = \frac{-K[s(s+1)+s(s+2)+(s+1)(s+2)]}{[s(s+1)(s+2)]^2} = 0 \Rightarrow$$

$$3s^2 + 6s + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 \simeq -0.44 \\ s_2 \simeq -1.57 \end{cases}$$

Οι τιμές αυτές ικανοποιούν την $1+G(s)F(s)=0$ για πραγματικές τιμές του K και μάλιστα η $s_1 = -0.44$ για $K > 0$ και η $s_2 = -1.57$ για $K < 0$.

Επειδή δεν υπάρχουν μιγαδικοί πόλοι δεν υπάρχουν και οι αντίστοιχες γωνίες εκκίνησης.

Για να βρούμε τα σημεία τομής με τον άξονα των φανταστικών αριθμών, εργαζόμαστε ως εξής:

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι:

$$1+G(s)F(s)=0 \Rightarrow 1+\frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \frac{s(s+1)(s+2)+K}{s(s+1)(s+2)} = 0 \Rightarrow s^3+3s^2+2s+K=0$$

Ο πίνακας Routh είναι

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & \dfrac{K-6}{-3} & 0 \\ s^0 & K & 0 \end{array}$$

Για να είναι ευσταθές το κλειστό σύστημα πρέπει $K > 0$ και $K < 6$. Άρα, το σημείο τομής με τον άξονα των φανταστικών αριθμών συμβαίνει για $K = 6$ και είναι το $s = j\omega = \pm j\sqrt{2}$. Αυτό προκύπτει από την $1+G(s)F(s)=0$ για $K=6$, θέτοντας $s = j\omega$ και εξισώνοντας με μηδέν το πραγματικό μέρος. Ο πλήρης γ.τ.ρ. δίνεται στο Σχ. 5.24.