

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

$$y(t) = \sum_{i=0}^n k_i e^{\lambda_i t} + \sum_{i=0}^p k'_i e^{\rho_i t}$$

λ_i : πραγματικό μέρος των **πόλων** του συστήματος

ρ_i : εξαρτάται από το φανταστικό μέρος και από την είσοδο

k_i, k'_i : σταθερές

ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΠΟΛΩΝ

ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\mu\epsilon\tau}(t) = 0$$

ΜΟΝΙΜΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ

$$y_{\mu\omicron\nu}(t) = C, \quad t \rightarrow \infty$$

$$y(t) = y_{\mu\epsilon\tau}(t) + y_{\mu\omicron\nu}(t)$$

ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ

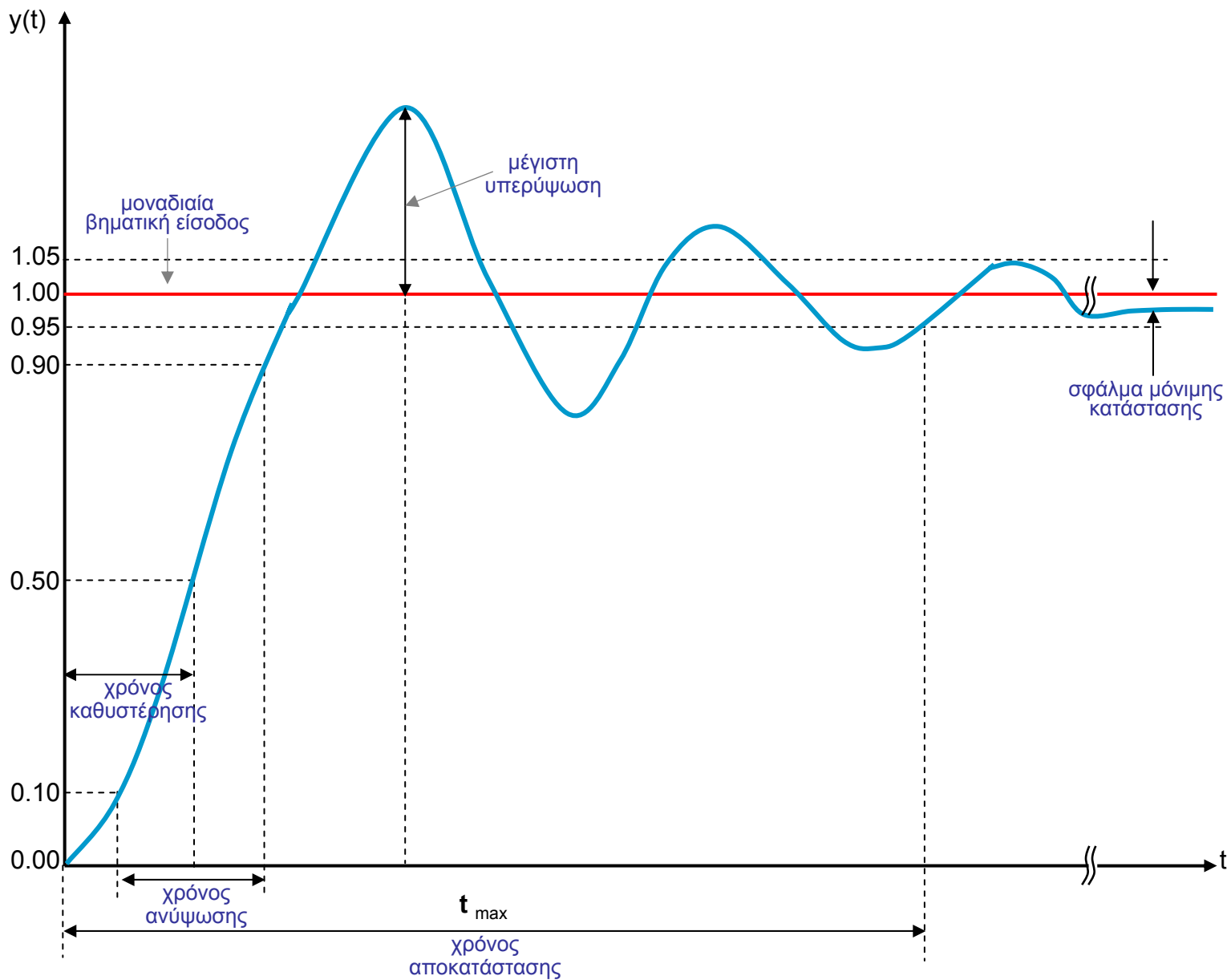
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ:

- μέγιστη υπερέψωση
- χρόνος καθυστέρησης
- χρόνος ανύψωσης
- χρόνος αποκατάστασης

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΟΝΙΜΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ:

- σφάλμα μόνιμης κατάστασης

ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΥ



Μοναδιαία βηματική απόκριση συστήματος ελέγχου

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 1ης ΤΑΞΗΣ

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

T=χρονική σταθερά

s=-1/T πόλος

ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΕΙΣΟΔΟΣ: $R(s) = \frac{1}{s}$

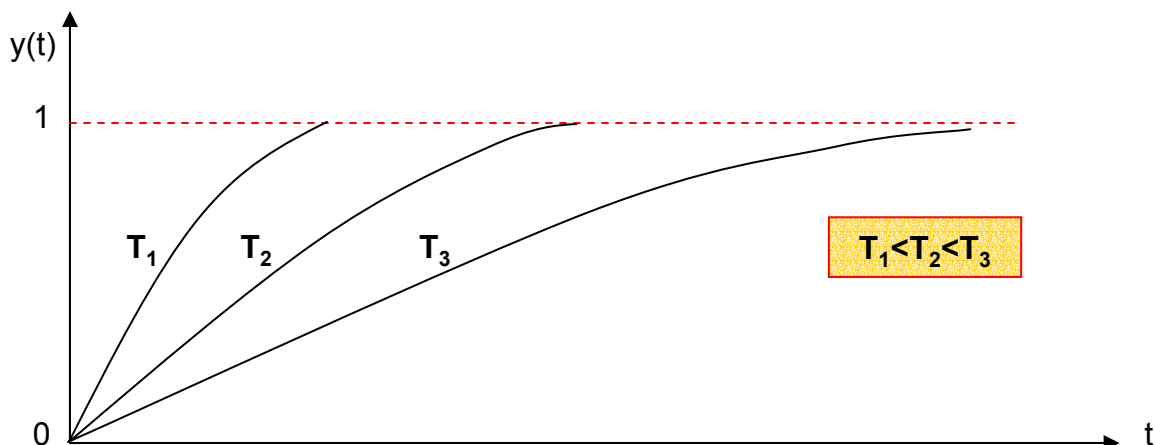
ΕΞΟΔΟΣ: $Y(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s}$

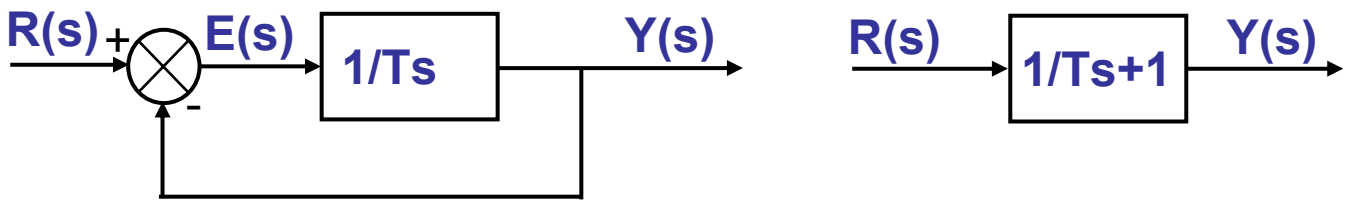
ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΣΕ ΑΠΛΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/T)} \quad \begin{matrix} L^{-1} \\ \rightarrow \end{matrix}$$

$$y(t) = 1 - e^{(-1/T)t} = 1 - e^{-t/T}, t \geq 0$$

$$y(0) = 1 - 1 = 0, \quad y(T) = 1 - e^{-1} = 0.632, \quad y(t) \rightarrow 1 \\ t \rightarrow \infty$$



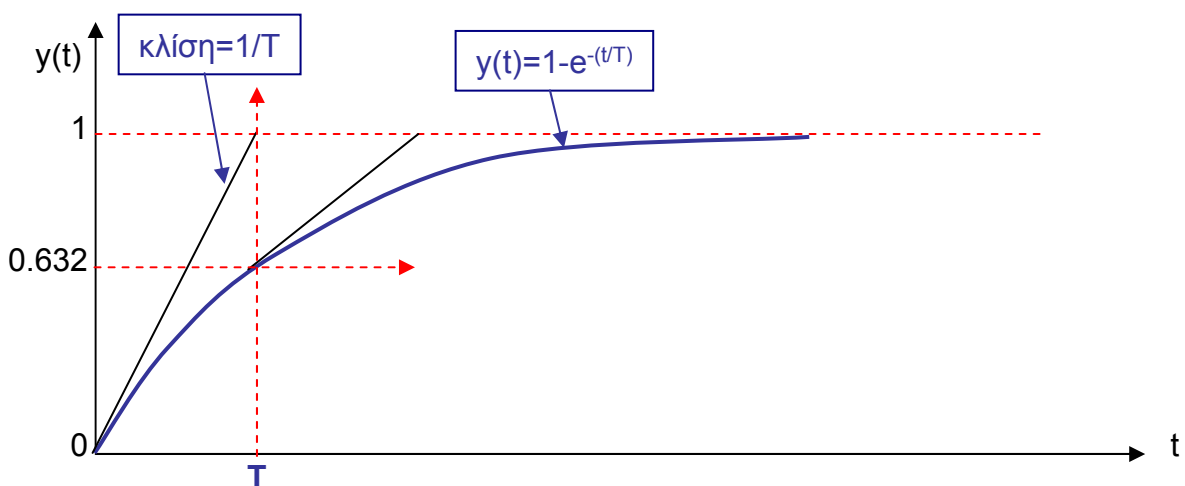


RC κύκλωμα, θερμικό σύστημα ...

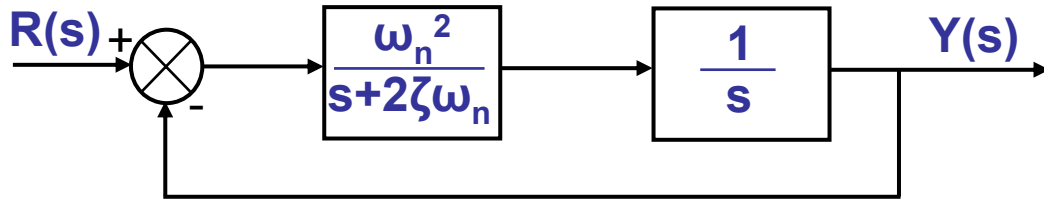
Κλίση της εφαπτομένης στο σημείο $t=0$:

$$\left. \frac{dy}{dt} = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

↓
φθίνει εκθετικά από το $1/T$ (για $t=0$)
 στο 0 (για $t \rightarrow \infty$)



ΣΥΣΤΗΜΑ 2ης ΤΑΞΗΣ



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}}{1 + \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2ης ΤΑΞΗΣ

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{συνάρτηση μεταφοράς}$$

$$p(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad \text{χαρακτηριστικό πολυώνυμο}$$

$$R(s) = \frac{1}{s} \quad \text{βηματική είσοδος}$$

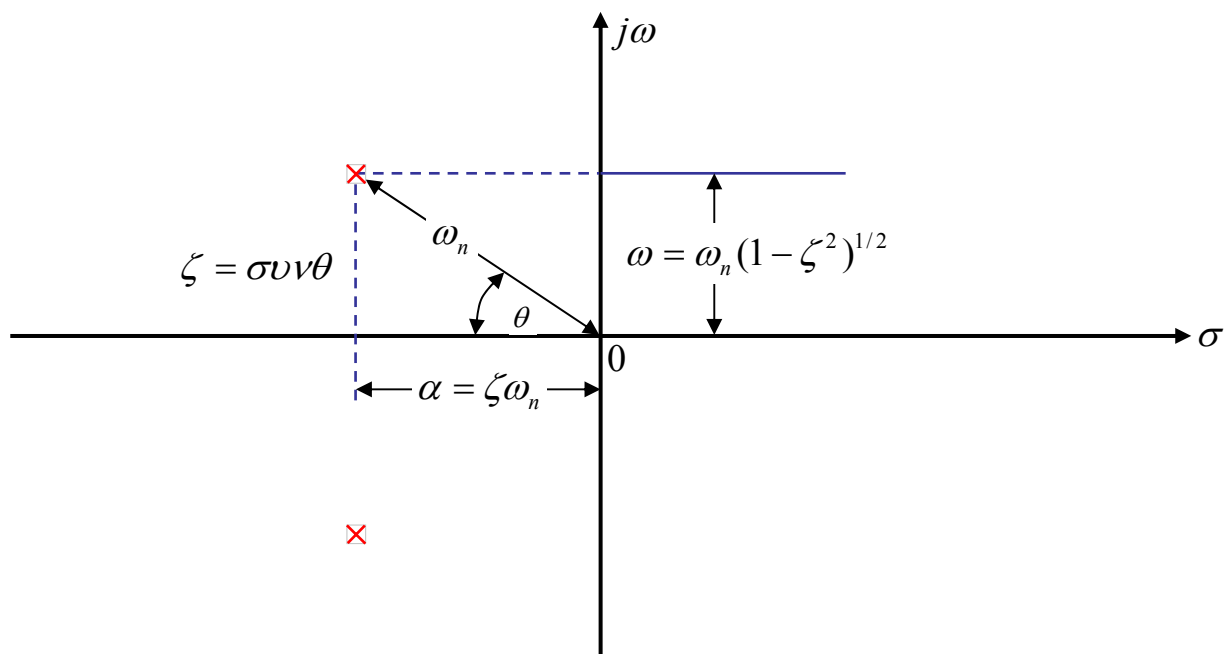
$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$y(t) = 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{(1-\zeta^2)^{1/2}} \eta\mu \left[\omega_n (1-\zeta^2)^{1/2} t - \varepsilon\phi^{-1} \frac{(1-\zeta^2)^{1/2}}{-\zeta} \right]$$

$$p(s) \begin{cases} s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2} = a + j\omega \\ s_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2} = a - j\omega \end{cases}$$

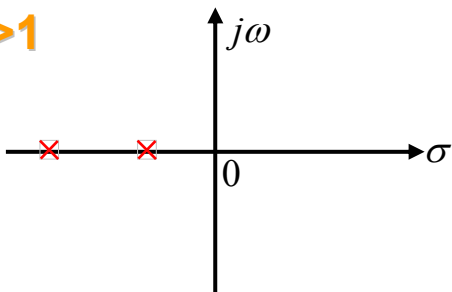
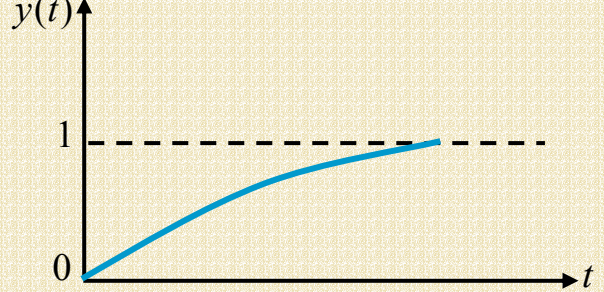
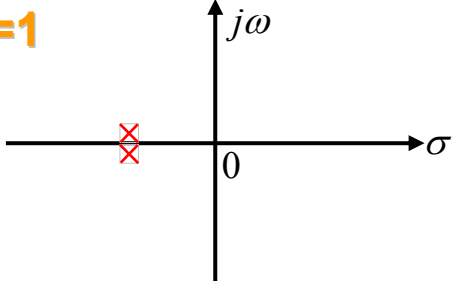
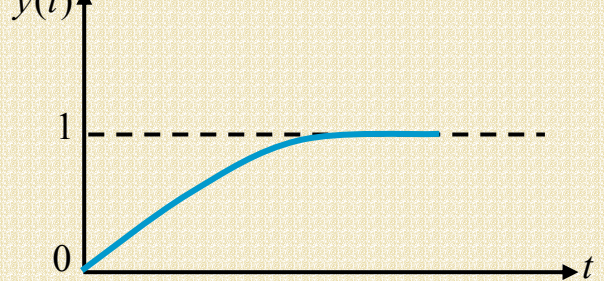
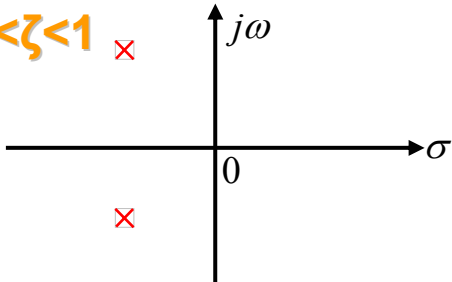
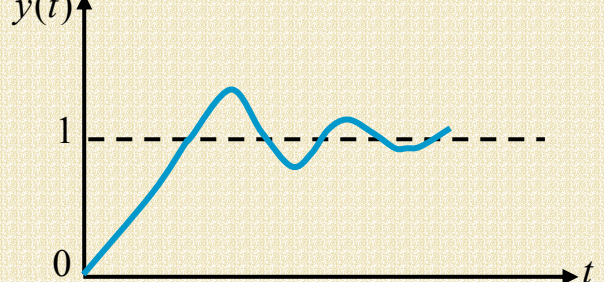
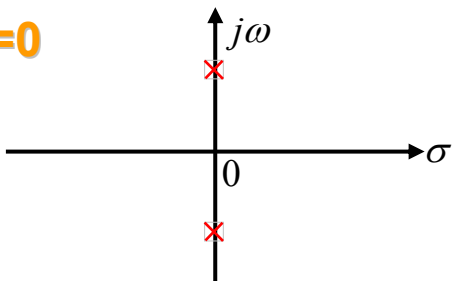
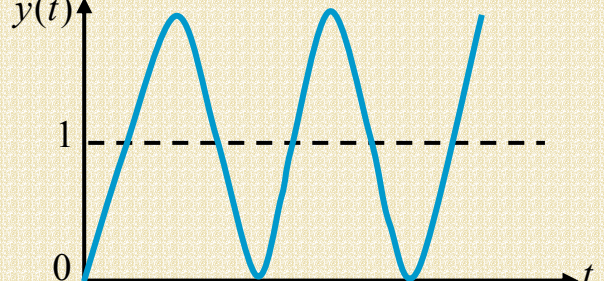
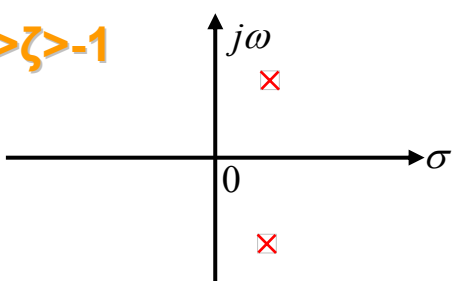
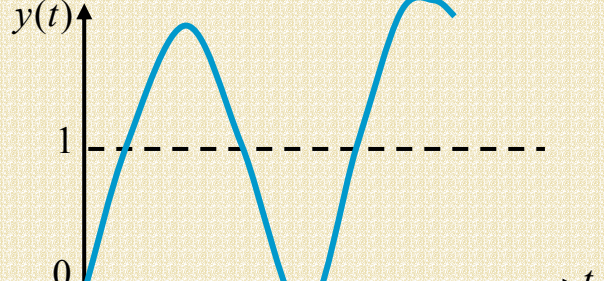
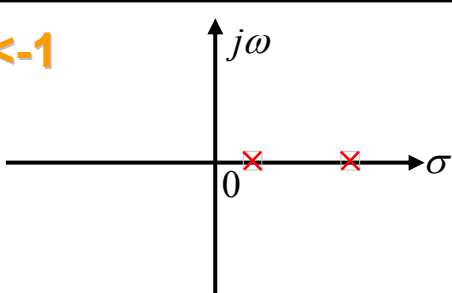
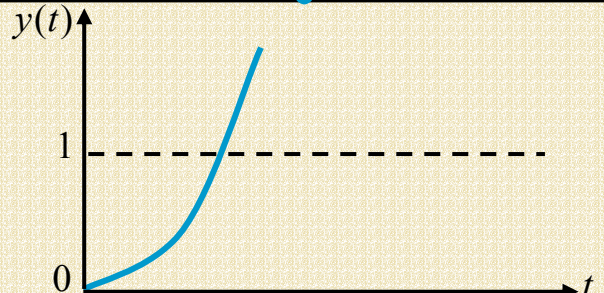
$$a = -\zeta\omega_n$$

$$\omega = \omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}$$

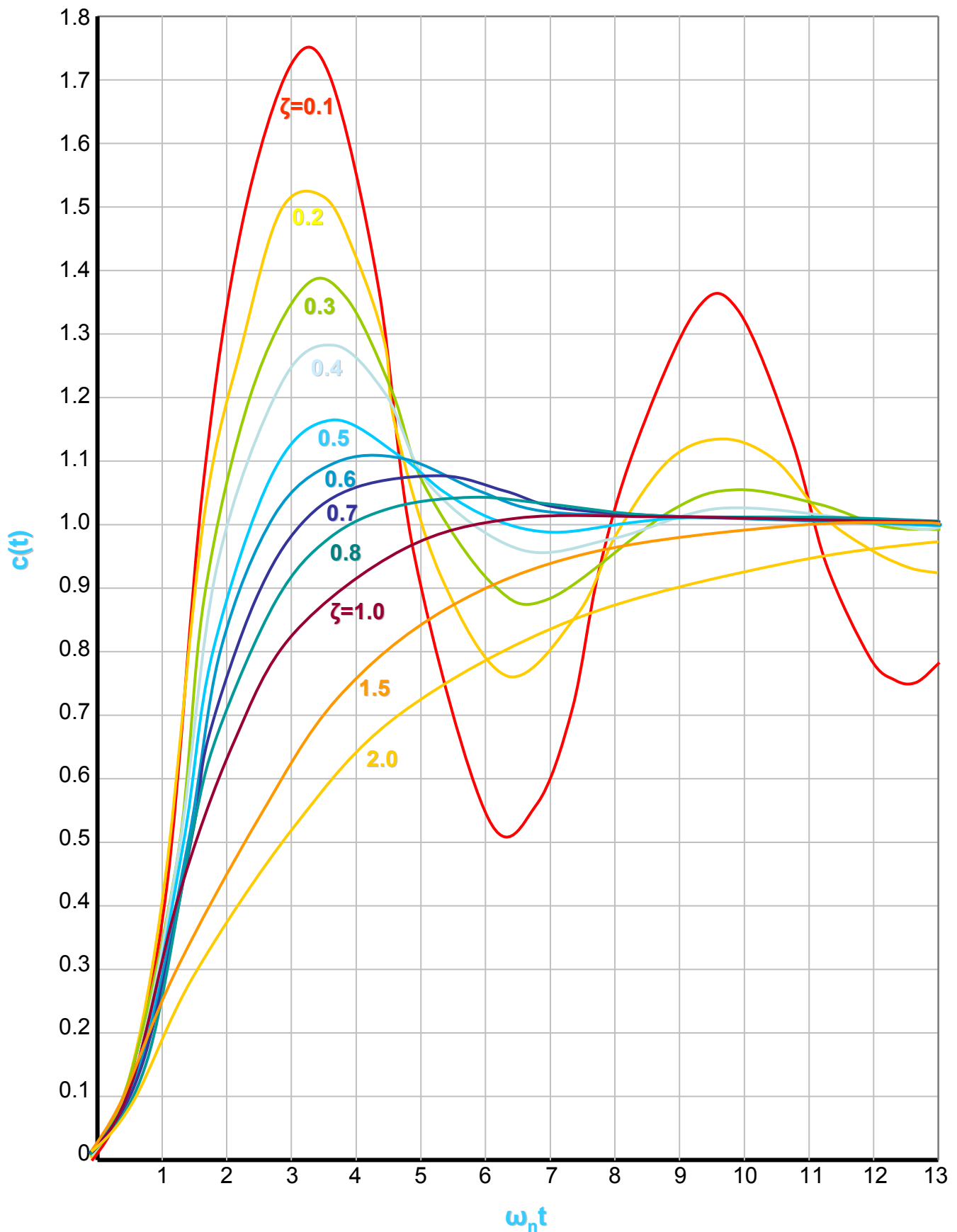


ΘΕΣΕΙΣ ΠΟΛΩΝ

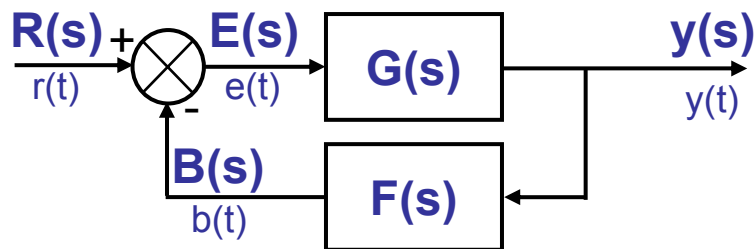
ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ

<p>$\zeta > 1$</p>  <p>A pole plot in the complex plane with a horizontal real axis σ and a vertical imaginary axis $j\omega$. The origin is marked with 0. Two red 'x' marks representing poles are located on the negative σ axis, one to the left and one to the right of the imaginary axis.</p>	 <p>A graph of the time response $y(t)$ versus time t. The vertical axis $y(t)$ has a dashed horizontal line at 1. The curve starts at the origin (0,0) and rises smoothly, asymptotically approaching the value 1 without oscillations.</p>
<p>$\zeta = 1$</p>  <p>A pole plot in the complex plane with a horizontal real axis σ and a vertical imaginary axis $j\omega$. The origin is marked with 0. A single red 'x' mark representing a pole is located on the negative σ axis.</p>	 <p>A graph of the time response $y(t)$ versus time t. The vertical axis $y(t)$ has a dashed horizontal line at 1. The curve starts at the origin (0,0) and rises smoothly, asymptotically approaching the value 1 without oscillations.</p>
<p>$0 < \zeta < 1$</p>  <p>A pole plot in the complex plane with a horizontal real axis σ and a vertical imaginary axis $j\omega$. The origin is marked with 0. Two red 'x' marks representing poles are located in the left half-plane, forming a complex conjugate pair.</p>	 <p>A graph of the time response $y(t)$ versus time t. The vertical axis $y(t)$ has a dashed horizontal line at 1. The curve starts at the origin (0,0) and exhibits damped oscillations, eventually settling to the steady-state value of 1.</p>
<p>$\zeta = 0$</p>  <p>A pole plot in the complex plane with a horizontal real axis σ and a vertical imaginary axis $j\omega$. The origin is marked with 0. Two red 'x' marks representing poles are located on the imaginary axis, one in the positive and one in the negative $j\omega$ direction.</p>	 <p>A graph of the time response $y(t)$ versus time t. The vertical axis $y(t)$ has a dashed horizontal line at 1. The curve starts at the origin (0,0) and exhibits sustained, undamped oscillations around the value 1.</p>
<p>$0 > \zeta > -1$</p>  <p>A pole plot in the complex plane with a horizontal real axis σ and a vertical imaginary axis $j\omega$. The origin is marked with 0. Two red 'x' marks representing poles are located in the right half-plane, forming a complex conjugate pair.</p>	 <p>A graph of the time response $y(t)$ versus time t. The vertical axis $y(t)$ has a dashed horizontal line at 1. The curve starts at the origin (0,0) and exhibits oscillations that grow in amplitude over time, eventually settling to the steady-state value of 1.</p>
<p>$\zeta < -1$</p>  <p>A pole plot in the complex plane with a horizontal real axis σ and a vertical imaginary axis $j\omega$. The origin is marked with 0. Two red 'x' marks representing poles are located on the real axis: one on the negative σ axis and one on the positive σ axis.</p>	 <p>A graph of the time response $y(t)$ versus time t. The vertical axis $y(t)$ has a dashed horizontal line at 1. The curve starts at the origin (0,0) and rises smoothly, increasing without bound as time increases.</p>

ΧΡΟΝΙΚΕΣ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ ζ



ΣΦΑΛΜΑ ΜΟΝΙΜΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ



$$\left. \begin{array}{l} E(s) = R(s) - B(s) \\ e(t) = r(t) - b(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow E(s) = R(s) - F(s)Y(s) \\ Y(s) = G(s)E(s) \end{array} \Rightarrow$$

$$E(s)(1 + G(s)F(s)) = R(s) \Rightarrow$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)F(s)}$$

ΑΠΟ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΕΛΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ:

$$e_{\mu\omicron\nu}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ



ΣΤΑΘΕΡΑ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΘΕΣΗΣ

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \rho G(s)F(s)$$



ΣΤΑΘΕΡΑ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \rho s G(s)F(s)$$



ΣΤΑΘΕΡΑ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \rho s^2 G(s)F(s)$$

ΣΦΑΛΜΑ ΣΤΗ ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΓΙΑ ΕΙΔΙΚΕΣ ΔΙΕΓΕΡΣΕΙΣ

$$r(t) = Pu(t)$$

$$e_{\mu\omicron\nu}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \left(\frac{P}{s} \right)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{P}{\lim_{s \rightarrow 0} 1 + G(s)F(s)} =$$

$$= \frac{P}{1 + K_p} = \begin{cases} \frac{P}{1 + K}, & j = 0 \\ 0, & j > 0 \end{cases}$$

ΣΦΑΛΜΑ ΘΕΣΕΩΣ

$$r(t) = Vtu(t)$$

συνάρτηση αναρριχήσεως με κλίση V

$$e_{\mu\omicron\nu}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \left(\frac{V}{s^2} \right)}{1 + G(s)F(s)} =$$

$$= \frac{V}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)F(s)} = \frac{V}{K_V} = \begin{cases} \infty, & j = 0 \\ \frac{V}{K}, & j = 1 \\ 0, & j > 1 \end{cases}$$

ΣΦΑΛΜΑ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ

ΣΦΑΛΜΑ ΣΤΗ ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΓΙΑ ΕΙΔΙΚΕΣ ΔΙΕΓΕΡΣΕΙΣ

$$r(t) = \frac{1}{2} At^2 u(t) \quad \text{παραβολική συνάρτηση}$$

$$e_{\mu\omicron\nu}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \left(\frac{A}{s^3} \right)}{1 + G(s)F(s)} =$$

$$= \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)F(s)} = \frac{A}{K_a} = \begin{cases} \infty, & j = 0, 1 \\ \frac{A}{K}, & j = 2 \\ 0, & j > 2 \end{cases}$$

ΣΦΑΛΜΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

$e_{\mu\sigma\nu}(t)$, για οποιαδήποτε είσοδο

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)F(s)} \quad W(s) = \frac{1}{1 + G(s)F(s)}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

$$E(s) = W(s)R(s)$$

$\downarrow L^{-1}$

$$e(t) = \int_{-\infty}^t w(\tau)r(t-\tau)d\tau$$

ΣΥΝΕΛΙΚΤΙΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

$$w(\tau) = L^{-1}[W(s)]$$

Y_1 : υπάρχουν οι πρώτες n παράγωγοι της $r(t)$, $\forall t$

Y_2 : η $r(t-\tau)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor

$$r(t - \tau) = r(t) - \tau r^{(1)}(t) + \frac{\tau^2}{2!} r^{(2)}(t) - \frac{\tau^3}{3!} r^{(3)}(t) + \dots$$

➤ Επειδή $r(t)=0$, $t<0$

το συνελικτικό ολοκλήρωμα θα ληφθεί για $t \in [0, t]$

$$e(t) = r(t) \int_0^t w(\tau) d\tau - r^{(1)}(t) \int_0^t \tau w(\tau) d\tau +$$

$$+ r^{(2)}(t) \int_0^t \frac{\tau^2}{2!} w(\tau) d\tau - r^{(3)}(t) \int_0^t \frac{\tau^3}{3!} w(\tau) d\tau \dots$$

$$e_{\mu\sigma\nu}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho e(t)$$

$$r_{\mu\sigma\nu}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho r(t)$$

$$\begin{aligned}
e_{\mu\sigma\nu}(t) &= r_{\mu\sigma\nu}(t) \int_0^{\infty} w(\tau) d\tau - r_{\mu\sigma\nu}^{(1)}(t) \int_0^{\infty} \tau w(\tau) d\tau + \\
&+ r_{\mu\sigma\nu}^{(2)}(t) \int_0^{\infty} \frac{\tau^2}{2!} w(\tau) d\tau - \\
&- r_{\mu\sigma\nu}^{(3)}(t) \int_0^{\infty} \frac{\tau^3}{3!} w(\tau) d\tau + \dots
\end{aligned}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

$$C_0 = \int_0^{\infty} w(\tau) d\tau$$

$$C_1 = - \int_0^{\infty} \tau w(\tau) d\tau$$

$$C_2 = \int_0^{\infty} \tau^2 w(\tau) d\tau$$

⋮

$$\begin{aligned}
e_{\mu\sigma\nu}(t) &= C_0 r_{\mu\sigma\nu}(t) + C_1 r_{\mu\sigma\nu}^{(1)}(t) + \frac{C_2}{2!} r_{\mu\sigma\nu}^{(2)}(t) + \\
&\dots + \frac{C_n}{n!} r_{\mu\sigma\nu}^{(n)}(t) + \dots
\end{aligned}$$

ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

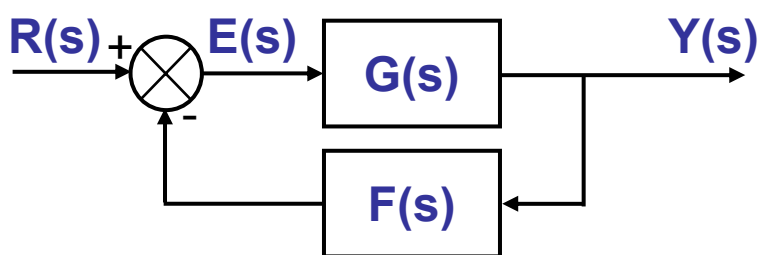
$$C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \rho W(s)$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \rho \frac{dW(s)}{ds}$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow 0} \rho \frac{d^2W(s)}{ds^2}$$

⋮

$$C_n = \lim_{s \rightarrow 0} \rho \frac{d^n W(s)}{ds^n}$$



$$G(s) = \frac{K}{2s + 1}$$

$$F(s) = 1$$

Σύστημα τύπου 0.

$$e_{\mu\omicron\nu}(t) = \begin{cases} \frac{P}{1 + K_p} & \text{όταν } r(t) = Pu(t) \\ \infty, & \text{όταν } r(t) = Vtu(t) \\ \infty, & \text{όταν } r(t) = \frac{1}{2} At^2 u(t) \end{cases}$$

Γενικευμένο σφάλμα

$$e_{\mu\omicron\nu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{k!} r_{\mu\omicron\nu}^{(k)}(t)$$

$s \rightarrow 0$

$$W(s) = \frac{1}{1 + G(s)F(s)} = \frac{2s + 1}{2s + K + 1}$$

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s W(s) = \frac{1}{K + 1}$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s W^{(1)}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2K}{(2s + K + 1)^2} = \frac{2K}{(K + 1)^2}$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow 0} s W^{(2)}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-8K}{(2s + K + 1)^3} = \frac{-8K}{(K + 1)^3}$$

$$e_{\mu\sigma\nu}(t) = \frac{1}{K+1} r_{\mu\sigma\nu}(t) + \frac{2K}{(K+1)^2} r_{\mu\sigma\nu}^{(1)}(t) + \frac{-4K}{(K+1)^3} r_{\mu\sigma\nu}^{(2)}(t) \dots$$

1) $r(t) = Pu(t) \Rightarrow r^{(1)}(t) = r^{(2)}(t) = 0 \Rightarrow$

$$e_{\mu\sigma\nu}(t) = \frac{P}{K+1} \quad \text{ανεξάρτητο του χρόνου}$$

2) $r(t) = Vtu(t), \quad r^{(1)}(t) = Vu(t), \quad r^{(2)}(t) = 0$

$$e_{\mu\sigma\nu}(t) = \left[\frac{V}{K+1} t + \frac{2KV}{(K+1)^2} \right] u(t)$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow e_{\mu\sigma\nu}(t) \rightarrow \infty$$

3) $r(t) = \frac{1}{2} At^2 u(t), \quad r^{(1)}(t) = Atu(t), \quad r^{(2)}(t) = Au(t)$

$$e_{\mu\sigma\nu}(t) = \left[\frac{A}{2(K+1)} t^2 + \frac{2AK}{(K+1)^2} t - \frac{4AK}{(K+1)^3} \right] u(t)$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow e_{\mu\sigma\nu}(t) \rightarrow \infty$$

Παράδειγμα 2

Έστω: $G(s) = \frac{K}{s+1}, \quad F(s) = 1$

Σύστημα τύπου 0: $K_p = K, \quad K_v = 0, \quad K_a = 0$

$$e_{\mu\sigma\nu}(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+K} & \text{όταν } r(t) = u(t) \\ \infty, & \text{όταν } r(t) = tu(t) \\ \infty, & \text{όταν } r(t) = t^2u(t) \end{cases}$$

$$e_{\mu\sigma\nu}(t) = \frac{1}{1+K} r_{\mu\sigma\nu}(t) + \frac{K}{(1+K)^2} r_{\mu\sigma\nu}^{(1)}(t) + \frac{-K}{(1+K)^3} r_{\mu\sigma\nu}^{(2)}(t) \dots$$

Έστω: η είσοδος της μορφής

$$r(t) = \left[a_0 + a_1 t + \frac{a_2 t^2}{2} + e^{-a_3 t} \right] u(t)$$

$$r_{\mu\sigma\nu}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[a_0 + a_1 t + \frac{a_2 t^2}{2} \right] u(t) = r_s(t)$$

$$r_{\mu\sigma\nu}^{(1)}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [a_1 + a_2 t] u(t) = \dot{r}_s(t)$$

$$r_{\mu\sigma\nu}^{(2)}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} a_2 u(t) = \ddot{r}_s(t)$$

$$e_{\mu\sigma\nu}(t) = \frac{1}{1+K} r_s(t) + \frac{K}{(1+K)^2} \dot{r}_s(t) - \frac{K}{(1+K)^3} \ddot{r}_s(t)$$

Για το ίδιο σύστημα έστω:

$$r(t) = \sin \omega_0 t$$

$$r_{\mu\sigma\nu}(t) = \sin \omega_0 t$$

$$r_{\mu\sigma\nu}^{(1)}(t) = \omega_0 \cos \omega_0 t$$

$$r_{\mu\sigma\nu}^{(2)}(t) = -\omega_0^2 \sin \omega_0 t$$

$$r_{\mu\sigma\nu}^{(3)}(t) = -\omega_0^3 \cos \omega_0 t$$

⋮

$$e_{\mu\sigma\nu}(t) = \left[C_0 - \frac{C_2}{2!} \omega_0^2 + \frac{C_4}{4!} \omega_0^4 - \dots \right] \sin \omega_0 t + \\ + \left[C_1 \omega_0 - \frac{C_3}{3!} \omega_0^3 + \dots \right] \cos \omega_0 t$$

ΣΕΙΡΑ ΑΠΕΙΡΩΝ ΟΡΩΝ: ΣΥΓΚΛΙΣΗ;

εξαρτάται από τις τιμές των ω_0 , K

έστω $\omega_0=2$, $K=100$

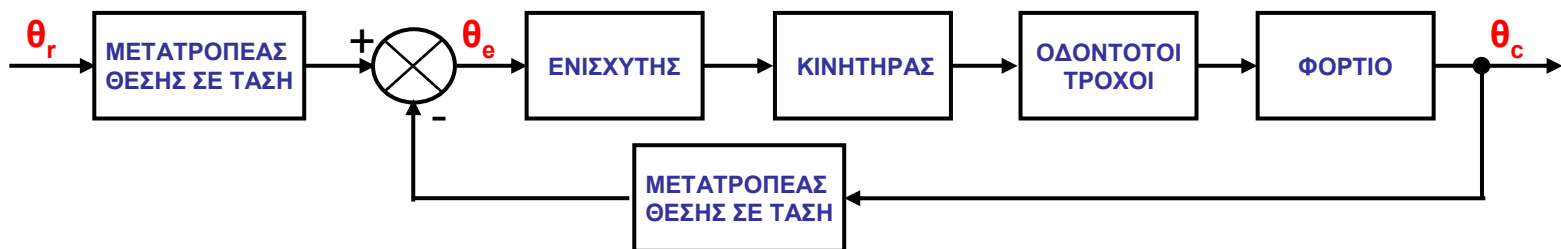
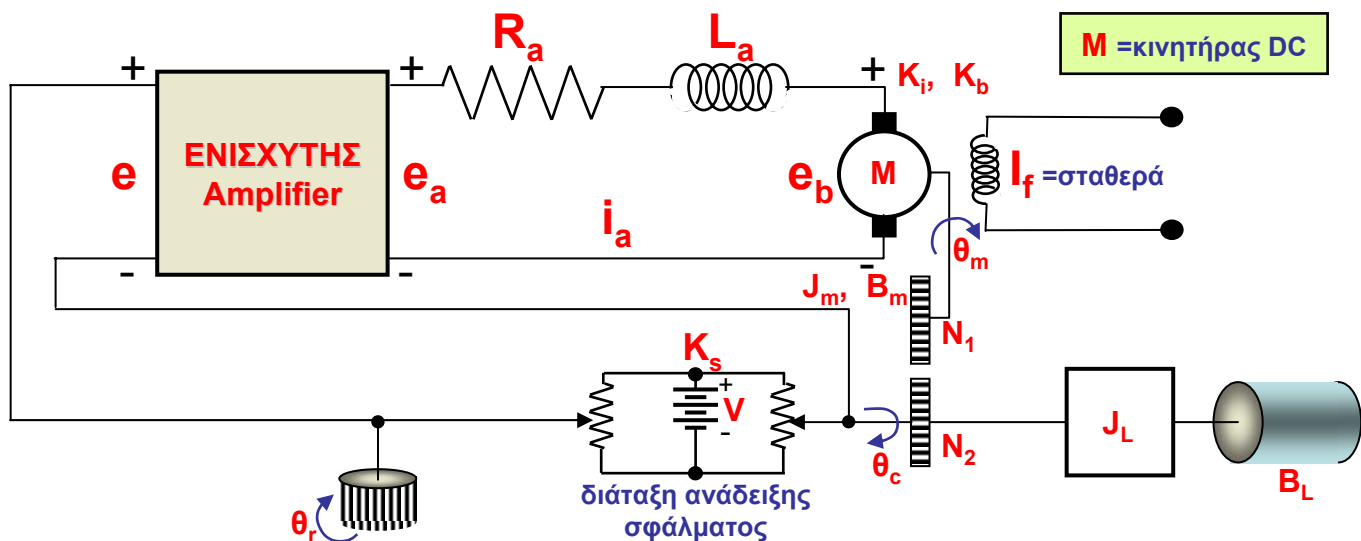
$$C_0 = \frac{1}{1+K} = 0.0099 \quad C_1 = \frac{K}{(1+K)^2} = 0.0098$$

$$C_2 = -\frac{2K}{(1+K)^3} = -0.000194 \quad C_3 = \frac{6K}{(1+K)^5} = 5.65 \times 10^{-8}$$

$$e_{\mu\sigma\nu}(t) = [0.0099 + \dots] \sin 2t + 0.00196 \cos 2t = \\ = 0.01029 \sin 2t + 0.0196 \cos 2t$$

$$e_{\mu\sigma\nu}(t) \approx 0.02215 \sin(2t + 62.3^\circ)$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΘΕΣΕΩΣ



ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

$K_s = 1 \text{ volt/rad}$: ευαισθησία διατ. αναδ. σφάλματος (σταθερά ποτενσιομέτρων)
A : μεταβλητό	: κέρδος ενισχυτή
$R_a = 5\Omega$: αντίσταση τυλίγματος δρομέα
L_a : αμελητέα	: επαγωγή
$J_m = 10^{-3} \text{ lb.ft.sec}^2$: αδράνεια ρότορα κινητήρα
$B_m = \text{αμελητέα}$: τριβή ατράκτου κινητήρα
$B_L = 0.1 \text{ lb.ft.sec}$: τριβή ατράκτου φορτίου
$J_L = 0.1 \text{ lb.ft.sec}^2$: αδράνεια φορτίου
$n = N_1/N_2 = 1/10$: λόγος μετάδοσης κίνησης
$k_i = 0.5 \text{ lb.ft./amb}$: σταθερά ροπής κινητήρα

1) Διάταξη ανάδειξης σφάλματος

$$\theta_e(t) = \theta_r(t) - \theta_c(t)$$

$$e(t) = K_s \theta_e(t)$$

2) Ενισχυτής

$$e_a(t) = A e(t)$$

3) Τύλιγμα δρομέα - κινητήρα

$$L_a \frac{di_a(t)}{dt} = -R_a i_a(t) + e_a(t) - e_b(t)$$

$$e_b(t) = K_b \omega_m(t)$$

4) Έξοδος

$$\frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t)$$

$$\theta_c(t) = n\theta_m(t)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{di_a(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \\ \frac{d\theta_m(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & -\frac{nAK_s}{L_a} \\ \frac{K_i}{J_{me}} & -\frac{B_{me}}{J_{me}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega_m(t) \\ \theta_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{AK_s}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \theta_r(t)$$

όπου : J_{me} = συντελεστής ισοδ. αδράνειας = $2 \times 10^{-3} \text{ lb.ft.sec}^2$

B_{me} = συντελεστής ιξώδους τριβής = $10^{-3} \text{ lb.ft.sec}$

και $T_m(t) = K_i i_a(t)$

$$J_{me} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = -B_{me} \omega_m(t) + T_m(t)$$

□ Εξίσωση εξόδου:

$$\theta_c(t) = n\theta_m(t)$$

□ Αρχικές συνθήκες: μηδενικές

$$y(t) = Cx(t)$$

$$\theta_c(t) = [0 \quad 0 \quad n] \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega_m(t) \\ \theta_m(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\theta_c(s)}{\theta_r(s)} = \frac{K_s AK_i n}{R_a B_{me} s(1 + \tau_a s)(1 + \tau_{me} s) + K_b K_i s + K_s AK_i n}$$

$$\tau_a = \frac{L_a}{R_a} : \text{αμελητέα}, \quad \tau_{me} = \frac{J_{me}}{B_{me}} = 2 \text{ sec}$$

$$\frac{\theta_c(s)}{\theta_r(s)} = \frac{K_s AK_i n}{R_a J_{me} s^2 + (K_b K_i + R_a B_{me})s + K_s AK_i n}$$

σύστημα 2ης τάξης

$$\omega_0 = \pm \sqrt{\frac{K_s AK_i n}{R_a J_{me}}} \quad J = \frac{K_b K_i + R_a B_{me}}{2\sqrt{K_s AK_i R_a J_{me} n}}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραμέτρων:

$$\frac{\theta_c(s)}{\theta_r(s)} = \frac{5A}{s^2 + 34.5s + 5A}$$

Έστω **A=200** (αυθαίρετα). Τότε:

$$\omega_0 = \pm 31.6 \text{ rad / sec}, \quad \zeta = 0.546$$

$$s^2 + 34.5s + 1000 = 0 \Rightarrow$$

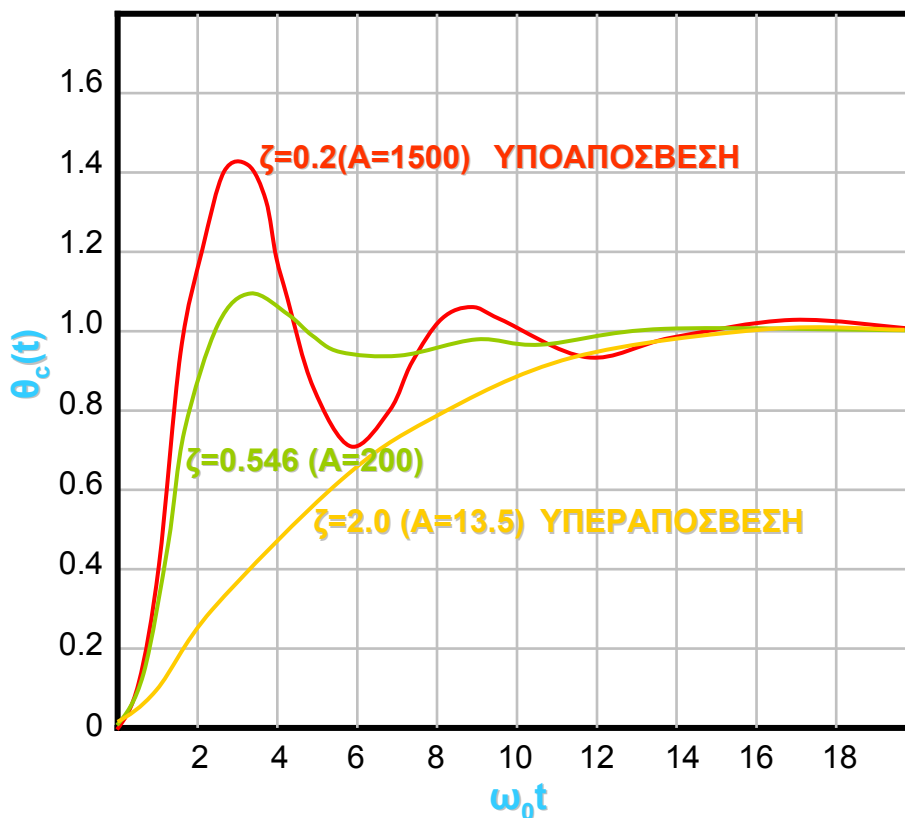
$$s_1, s_2 = -17.25 \pm j26.5$$

ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΓΙΑ ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΕΙΣΟΔΟ

$$\theta_r = u(t) \text{rad}$$

$$\theta_c(t) = L^{-1} \left[\frac{1000}{s(s^2 + 34.5s + 1000)} \right] =$$

$$= 1 + 1.2e^{-17.25t} \sin(26.5t + 236.8^\circ)$$

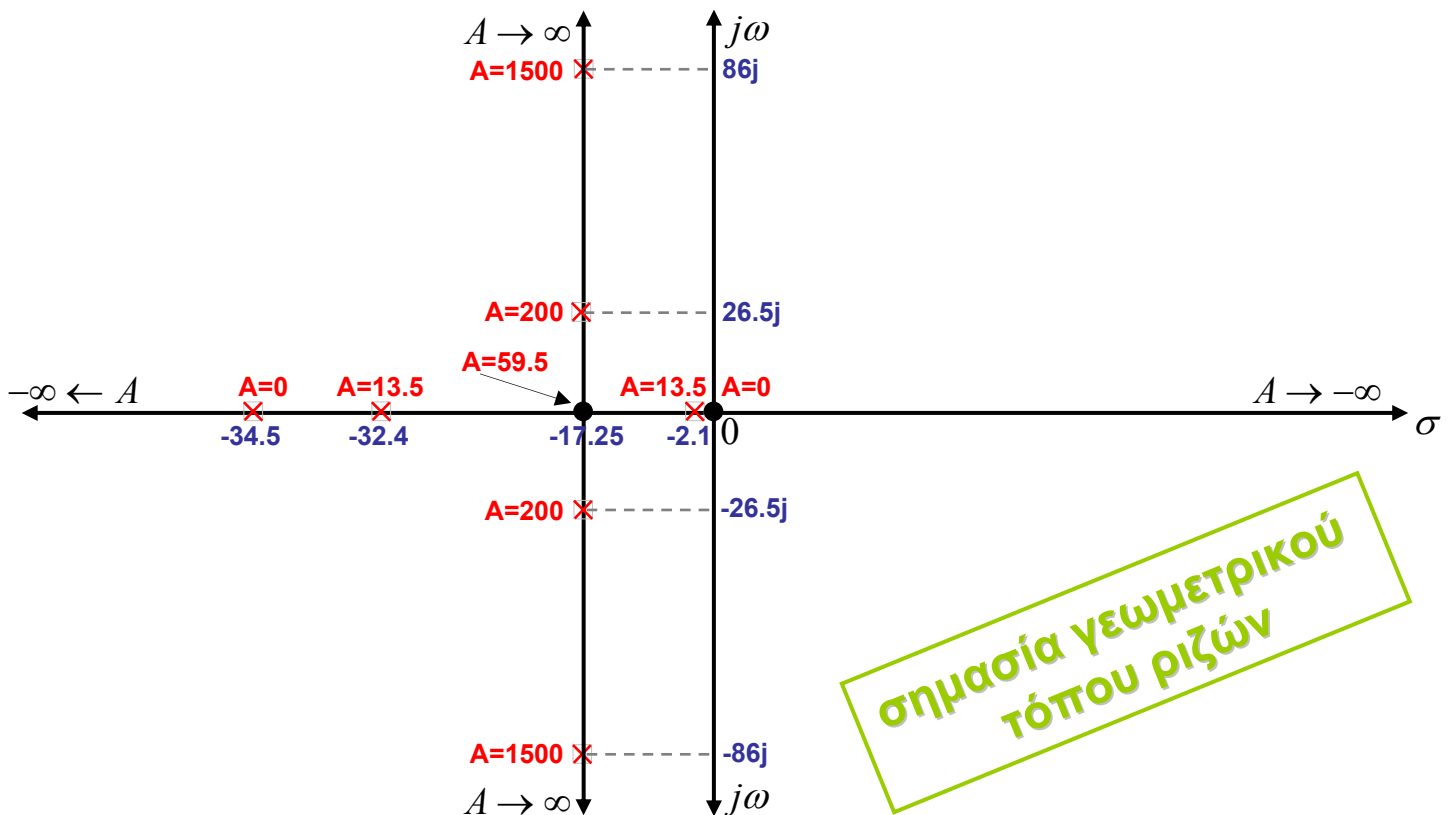


ΚΕΡΔΟΣ	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ	ΚΥΚΛΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΜΕΓΙΣΤΗ ΥΠΕΡΥΨΩΣΗ	ΧΡΟΝΟΣ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗΣ	ΧΡΟΝΟΣ ΑΝΥΨΩΣΗΣ	ΧΡΟΝΟΣ ΑΠΟΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ
A	ζ	ω₀	M	T_d	T_r	T_s
13.5	2.1	8.22	0	0.325	1.02	1.51
200	0.546	31.6	0.13	0.043	0.064	0.174
1500	0.2	86.6	0.52	0.013	0.015	0.17

ΡΙΖΕΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ (ΠΟΛΟΙ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ)

Γενικά: $s_1, s_2 = -17.25 \pm \frac{1}{2} \sqrt{1190 - 20A}$

A=13.5	$s_1 = -2.1, \quad s_2 = -32.4$
A=200	$s_1, s_2 = -17.25 \pm j26.5$
A=1500	$s_1, s_2 = -17.25 \pm j86$



σημασία γεωμετρικού τόπου ριζών



ΚΕΡΔΟΣ	ΠΟΛΟΙ	ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ
$0 < A < 59.5$	ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ – ΔΙΑΚΕΚΡΙΜΕΝΟΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ	ΥΠΕΡΑΠΟΣΒΕΣΗ ($\zeta > 1$)
$A = 59.5$	ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΙΣΟΙ	ΚΡΙΣΙΜΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ ($\zeta = 1$)
$59.5 < A < \infty$	ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΑΡΝΗΤΙΚΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΜΕΡΗ	ΥΠΟΑΠΟΣΒΕΣΗ ($\zeta < 1$)
$-\infty < A < 0$	ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ – ΔΙΑΚΕΚΡΙΜΕΝΟΙ ΕΝΑΣ ΘΕΤΙΚΟΣ ΕΝΑΣ ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ	ΑΣΤΑΘΕΙΑ ($\zeta < 0$)

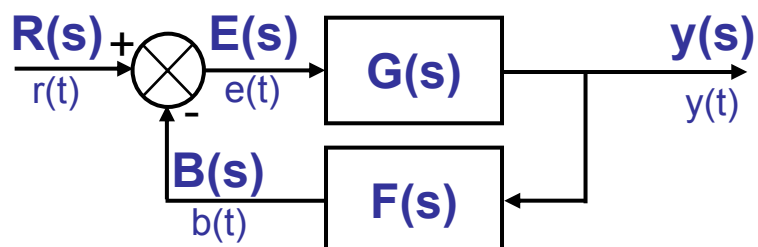
ΣΦΑΛΜΑ ΣΤΗ ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

$$H(s) = \frac{\theta_c(s)}{\theta_r(s)} \quad \text{κλειστού βρόχου}$$

$$G(s) = \frac{H(s)}{1 - H(s)} \quad \text{ανοικτού βρόχου}$$

$$G(s) = \frac{K_s A K_i n}{R_a B_{me} s (1 + \tau_a s) (1 + \tau_{me} s) + K_b K_i s}$$

$$F(s) = 1$$



Είσοδος $u(t) \Rightarrow$ Σφάλμα θέσης

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{5A}{s(s+34.5)} = \infty$$

$$e(t) = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΥΠΟΥ 1.

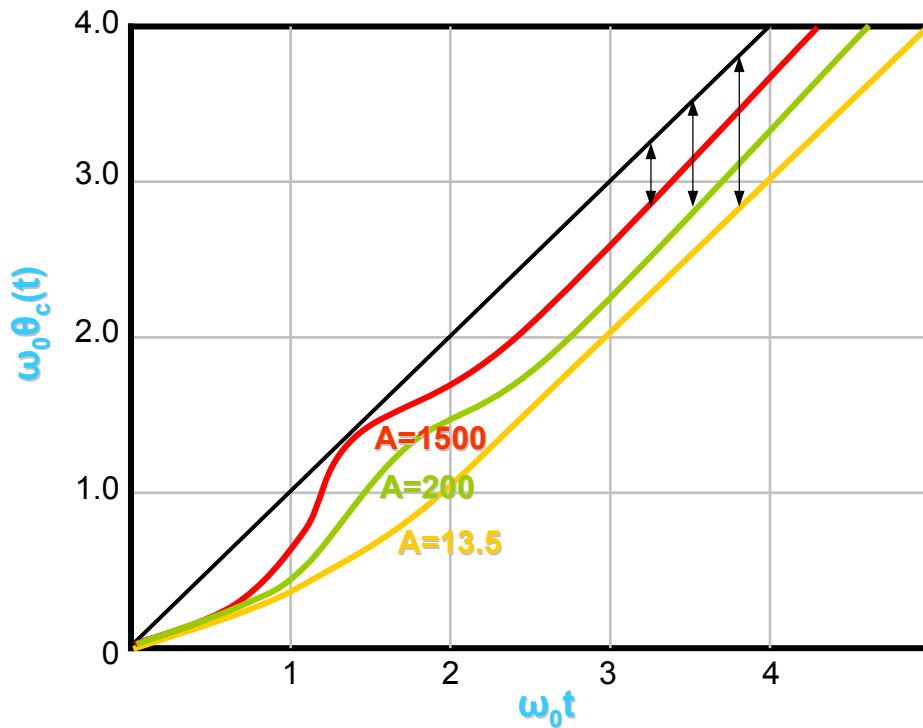
ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΜΕ ΕΙΣΟΔΟ ΤΗ ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΝΑΡΙΧΗΣΕΩΣ

$$\theta_r(t) = tu(t)$$

$$\theta_c(t) = L^{-1} \left[\frac{\omega_0^2}{s^2 (s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)} \right] =$$

$$t - \frac{2\zeta}{\omega_0} + \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin \left[\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi \right]$$

$$\phi = 2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta}$$



ΣΦΑΛΜΑ ΣΤΗ ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

Σφάλμα ταχύτητας

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5A}{s + 34.5} = \frac{5A}{34.5}$$

$$e(t) = \frac{1}{K_v} = \frac{34.5}{5A}$$

- αντιστρόφως ανάλογο του A
- ταλαντώσεις
- σύστημα τάξης μεγαλύτερης του 2: ΜΕΓΑΛΗ τιμή A → ΑΣΤΑΘΕΙΑ