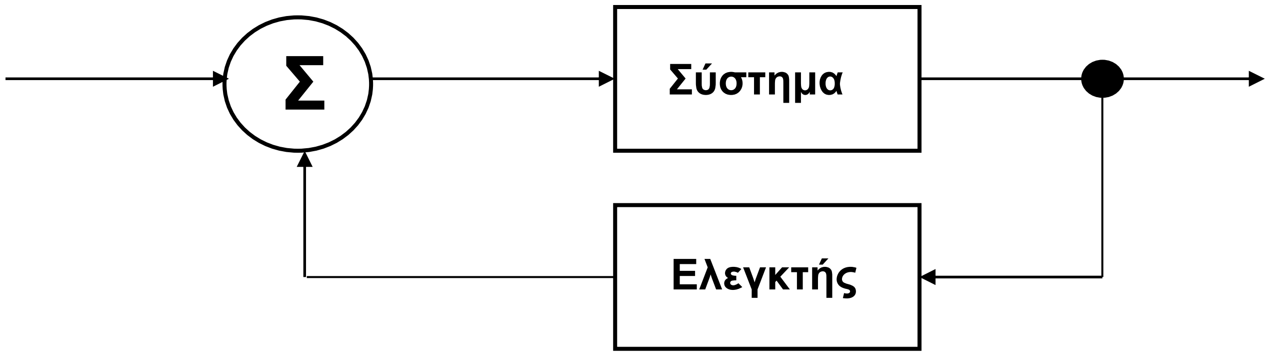
Ανάλυση και σύνθεση
Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου

(Συνοπτικές σημειώσεις με παραδείγματα)

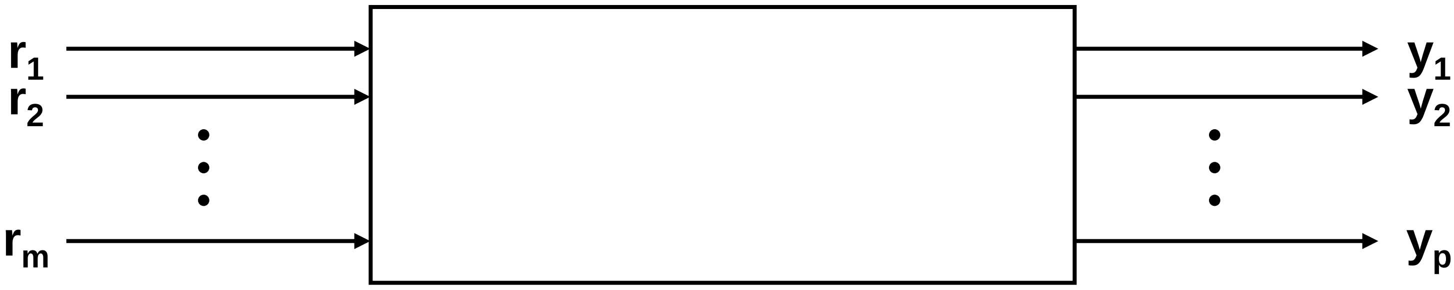


Διδάσκων : Χρήστος Κόρκας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΔΟΜΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ



ΕΙΔΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Γραμμικά – Μη γραμμικά (ως προς τις εισόδους – εξόδους)

Συνεχούς – διακριτού χρόνου (ως προς τις μεταβλητές)

Χρονικά αμετάβλητα – μεταβαλλόμενα (ως προς τις παραμέτρους)

Προσδιοριστικά – Στοχαστικά (ως προς τις εισόδους)

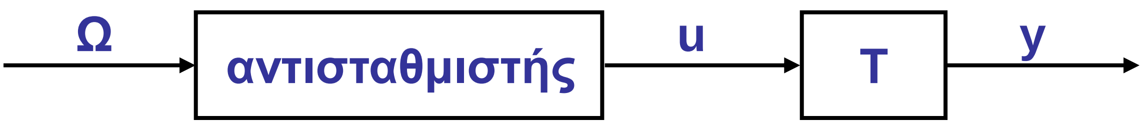
ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΑΝΑΛΥΣΗ:

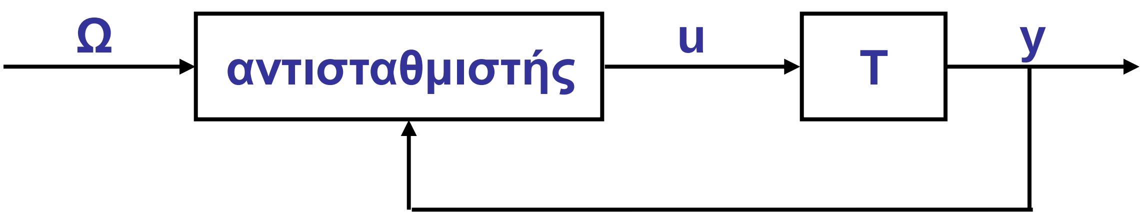
- Καθορισμός εισόδων – εξόδων
- Εύρεση μαθηματικού προτύπου (μοντέλο)
- Χρονική απόκριση, απόκριση συχνότητας
- Ευστάθεια, σχετική ευστάθεια

ΣΥΝΘΕΣΗ:

- Εύρεση αντισταθμιστή



Ανοικτό σύστημα



Σύστημα με ανάδραση

ΣΗΜΑΣΙΑ

ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΥΘΜΙΣΗΣ

ΕΛΕΓΧΟΣ ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΤΡΟΧΙΑΣ

ΣΥΣΤΗΜΑ: Πλήθος πραγμάτων συνδεδεμένων (από τη φύση ή τον άνθρωπο), ώστε να αποτελούν ένα ολοκληρωμένο και σύνθετο σύνολο.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ: Μελέτη των αλληλεπιδράσεων και της συμπεριφοράς ενός συνόλου στοιχείων, όταν υπόκειται σε κάποιες συνθήκες - εισόδους. Μαθηματικές ιδιότητες.

ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ: Φυσικές εφαρμογές.

ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ: Ρύθμιση ή έλεγχος κάποιων ποσοτήτων με επιθυμητό τρόπο.

Σύνδεση πολλών στοιχείων ή διατάξεων ώστε να παράγουν ένα επιθυμητό αποτέλεσμα.

ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΑΝΟΙΚΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ

έξοδος = Κ x είσοδος

είσοδος (στροφή μανιβέλας) → **σύστημα ελέγχου** → **έξοδος** (στροφή μηχανικού μέρους)

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΒΑΘΜΙΔΑΣ

ΒΕΛΗ = ΦΥΣΙΚΕΣ ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΟ = ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ

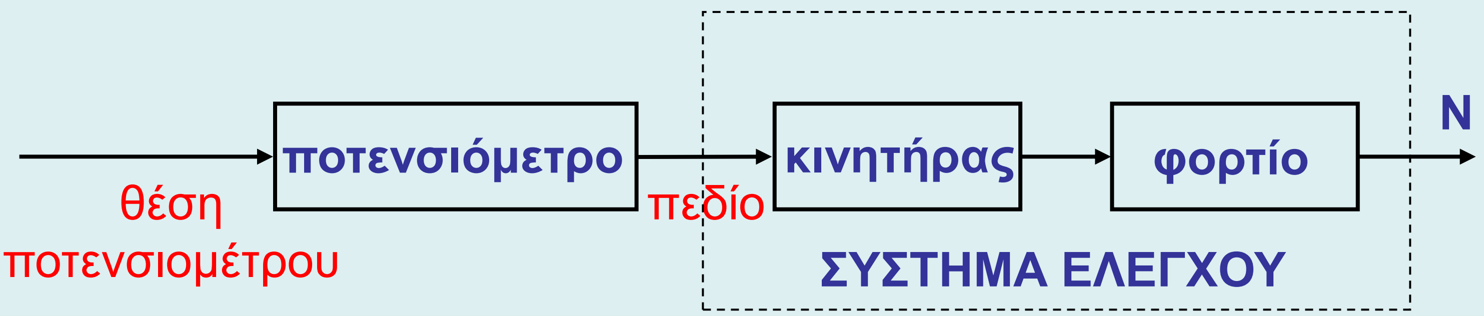
Έλεγχος χωρίς ενίσχυση ισχύος:

Αεροπλάνο: θέση μοχλού $\xrightarrow{\text{ή}}$ θέση πηδαλίου → κατεύθυνση πορείας

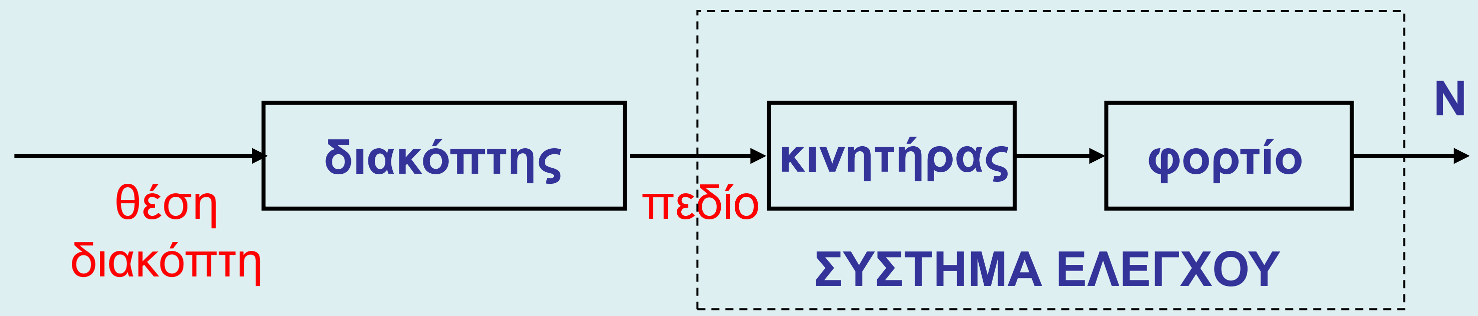
Αυτοκίνητο: στροφή τιμονιού → στροφή τροχών

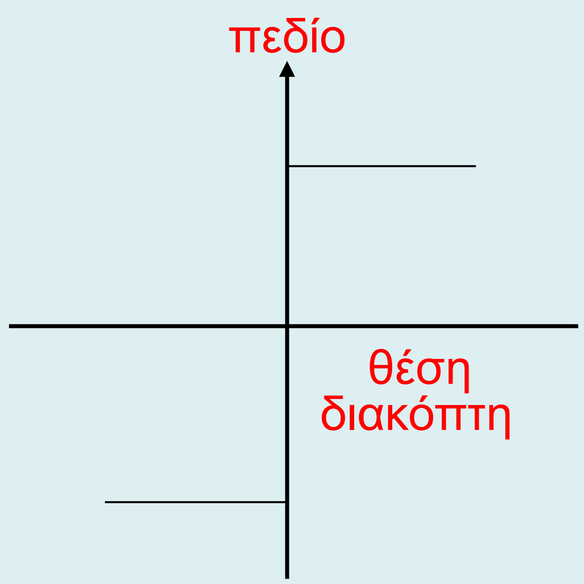
Η είσοδος «ελέγχει» - (οδηγεί) – την έξοδο

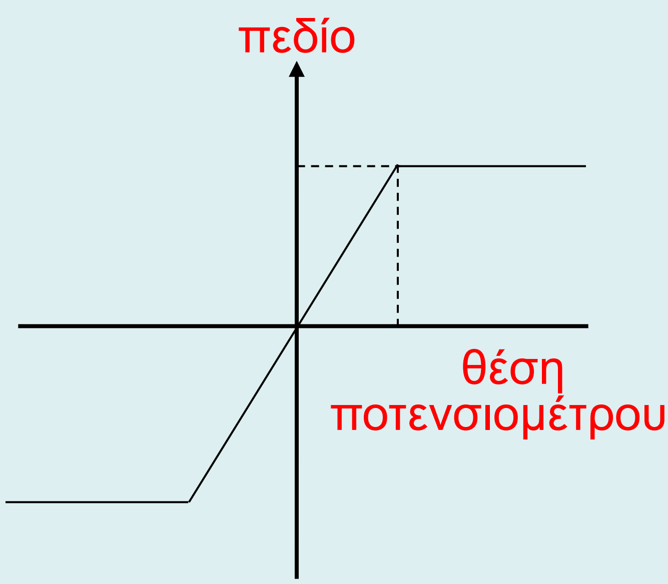
Έλεγχος με ενίσχυση ισχύος:



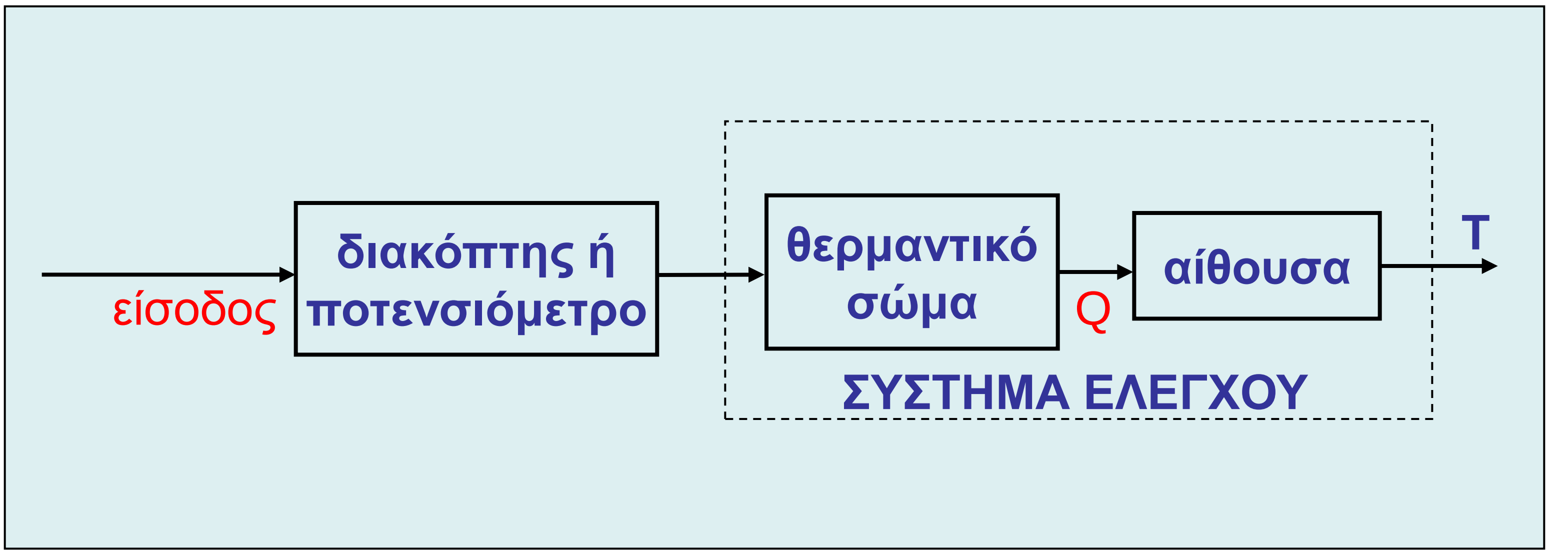
Το ποτενσιόμετρο «ελέγχει» - (οδηγεί) – τον κινητήρα







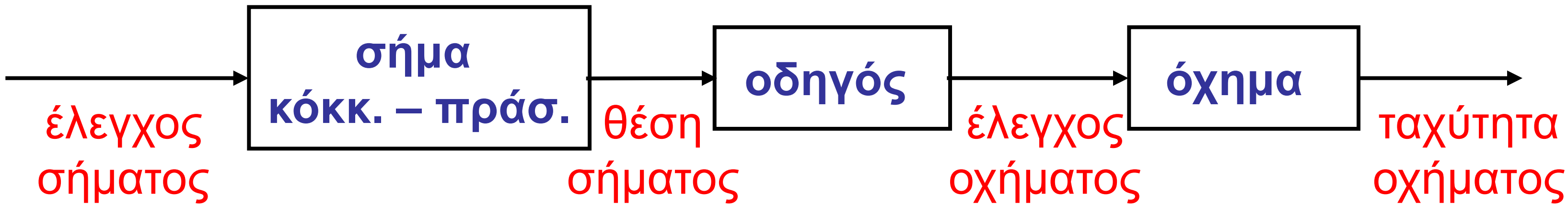
ασυνεχής **συνεχής**



ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

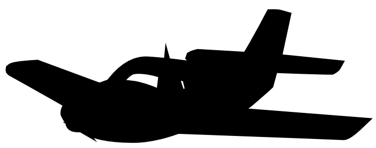
ΤΕΛΕΣΤΗΣ

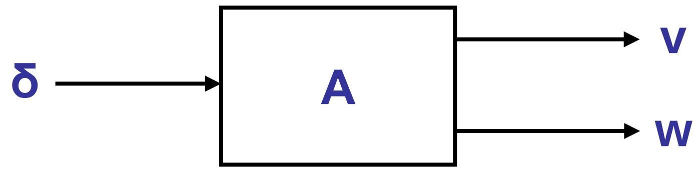
Ο ΑΝΘΡΩΠΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΩΝ



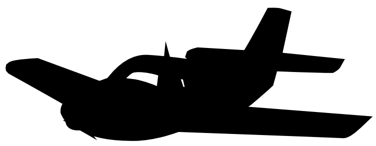
ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΥΣΕΣ ΕΙΣΟΔΟΙ = ΔΙΑΤΑΡΑΧΕΣ

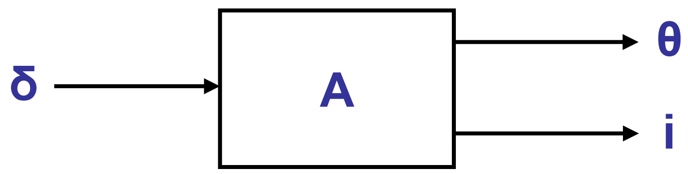
ΕΠΙΛΟΓΗ ΕΞΟΔΩΝ





(α) ενδιαφερόμαστε για τη μετατόπιση του Κέντρου Βάρους:
v, w = συνιστώσες της ταχύτητας





(β) ενδιαφερόμαστε για την κίνηση του Α γύρω από το κέντρο βάρους:
θ = γωνία με τον οριζόντιο άξονα
i = γωνία με την ταχύτητα

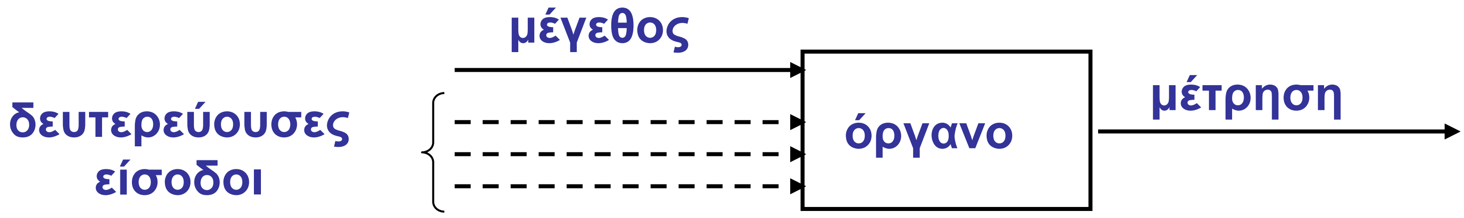
ΕΠΙΛΟΓΗ ΕΙΣΟΔΩΝ

Κύριες (έλεγχος)

Δευτερεύουσες (διαταραχές)

Παράδειγμα 1

ΟΡΓΑΝΟ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

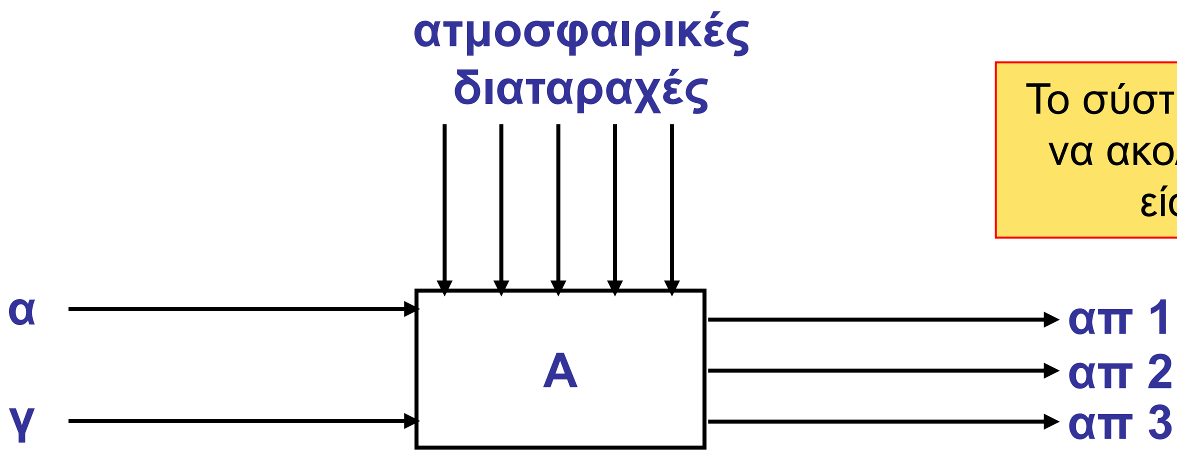


Παράδειγμα 2

ΑΕΡΟΠΛΑΝΟ

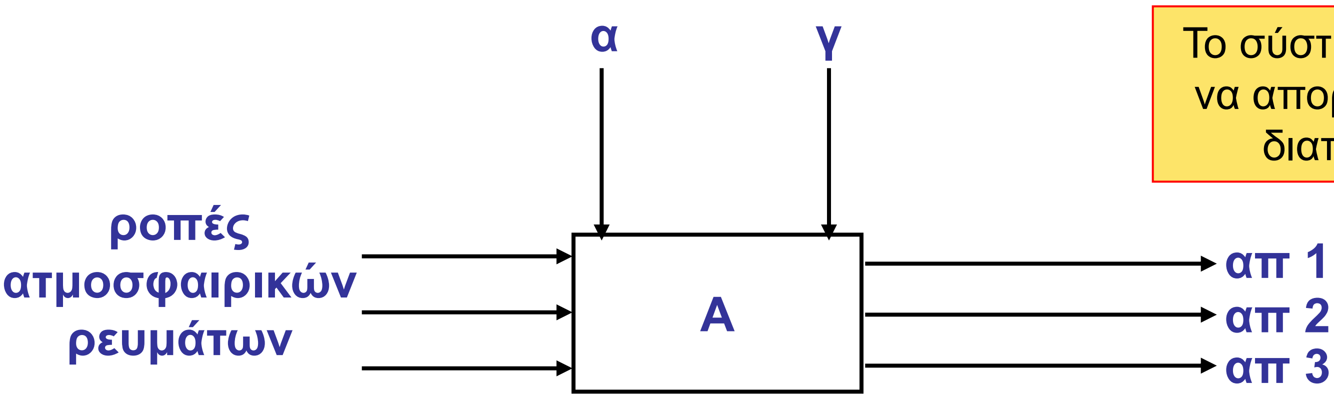
α: κατεύθυνση πτερυγίου
γ: κατεύθυνση ουράς

απ 1: πλευρικές ταλαντώσεις
απ 2: ταλαντώσεις σε σχέση με την πορεία
απ 3: απόκλιση από την πορεία



Το σύστημα πρέπει να ακολουθεί την είσοδο.

ή



Το σύστημα πρέπει να απορρίπτει την διαταραχή.

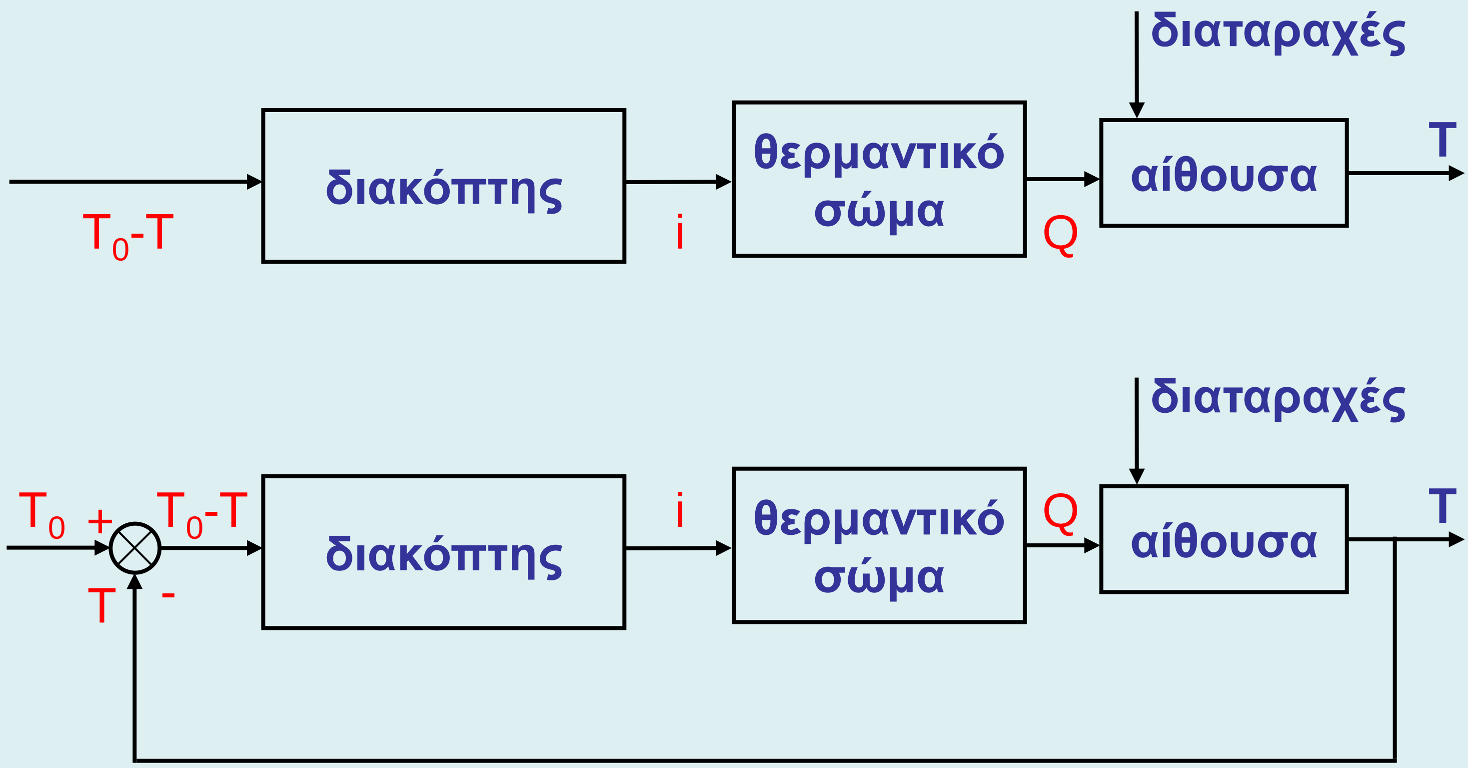
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ

ΑΝΕΠΑΡΚΕΙΑ ΑΝΟΙΚΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ

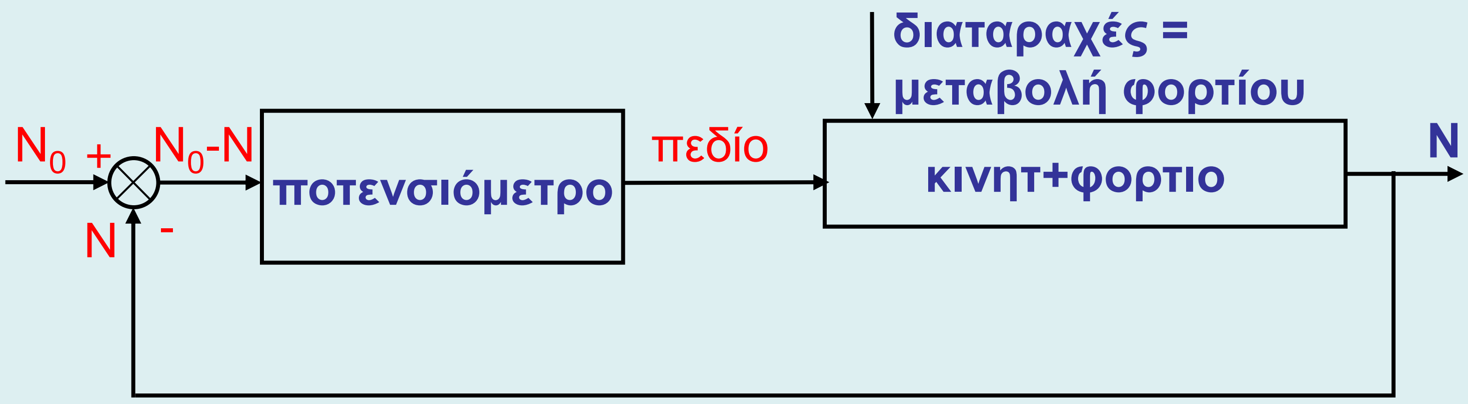
ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΕΣΩΤΕΡΙΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ

ΔΙΑΤΑΡΑΧΕΣ

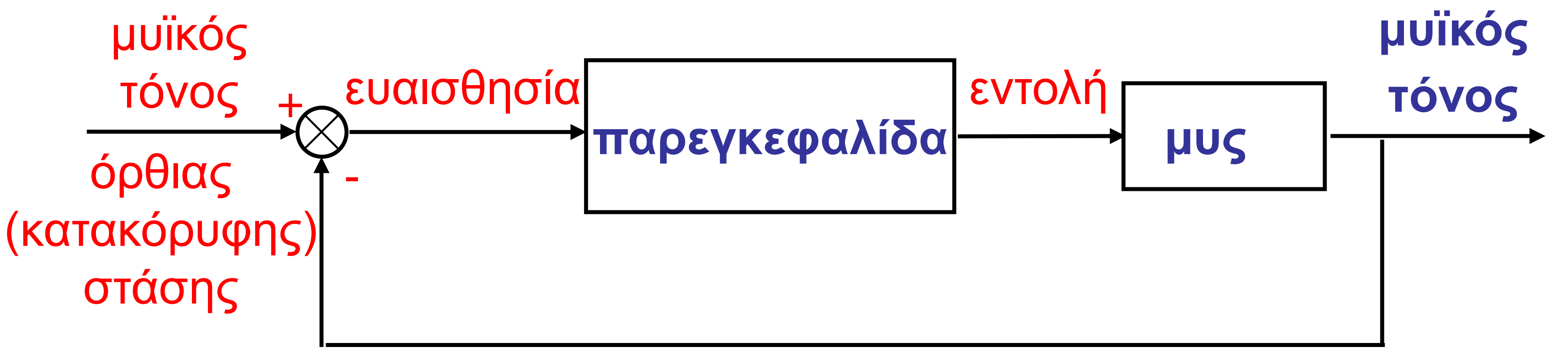
1) Έλεγχος θερμοκρασίας χώρου



2) Έλεγχος στροφών κινητήρα



ΒΙΟΛΟΓΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ: ΟΡΘΙΑ ΣΤΑΣΗ



ΑΛΛΑ ΒΙΟΛΟΓΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ

- ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ
- ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ ή ΑΝΑΔΡΑΣΗ / FEEDBACK
- ΚΛΑΔΟΣ ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗΣ
- ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΡΥΘΜΙΣΗΣ

έξοδος = είσοδος = σταθερή

- Σταθερή θερμοκρασία χώρου
- Σταθερή ταχύτητα οχήματος
- Σταθερή ταχύτητα περιστροφής τουρμπίνας
- . . . κλπ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΟΔΗΓΗΣΗΣ

έξοδος (t) ακολουθεί είσοδος (t)

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ:

- Ήρων ο Αλεξανδρεύς

18ος ΑΙΩΝΑΣ:

- James Watt φυγοκεντρικός ρυθμιστής ταχύτητας

ΜΕΧΡΙ ΤΟΝ 19ο ΑΙΩΝΑ:

- Εμπειρική ανάπτυξη

19ος ΑΙΩΝΑΣ:

- Maxwell-Vyshnegradskii.

Πρώτες μαθηματικές θεωρίες με εφαρμογές στο ρυθμιστή Watt.

ΔΕΚΑΕΤΙΑ 1920:

- Black, Nyquist, Bode (έννοια ανατροφοδότησης)

1934:

- Hanzen: Θεωρία σερβομηχανισμών
- Black: Ενισχυτές ανατροφοδότησης

ΔΕΚΑΕΤΙΑ 1940:

- Κλασική θεωρία Σ.Α.Ε.

ΔΕΚΑΕΤΙΑ 1960 ΕΩΣ ΣΗΜΕΡΑ:

- Μοντέρνα θεωρία Σ.Α.Ε.
- Αεροδιαστημική
- Έλεγχος διαδικασιών παραγωγής
- Έλεγχος πυρηνικών αντιδραστήρων
- Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ

- ΑΙΤΙΟΚΡΑΤΙΚΑ
- ΓΡΑΜΜΙΚΑ
- ΣΥΝΕΧΗ
- ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

↓ Θεωρητικό υπόβαθρο

↓ ΣΑΕ Ι : Ανάλυση

↓

Εισαγωγή - Μαθηματικές έννοιες

Περιγραφή - Μοντελοποίηση

Χρονική απόκριση (κλασική)

Χρονική απόκριση χώρου κατάστασης (μοντέρνα)

Ευστάθεια – Μέθοδοι μελέτης ευστάθειας

Κλασικές μέθοδοι ελέγχου

Έλεγχος P.I.D.

↓ Πρακτικές εφαρμογές

↓ ΣΑΕ ΙΙ : Σύνθεση άμεσες εφαρμογές

ΣΥΓΧΡΟΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΤΩΝ Σ.Α.Ε.

Πολυμεταβλητός έλεγχος

Εύρωστος έλεγχος

Προσαρμοστικός έλεγχος

Ανίχνευση και ανοχή βλαβών - Αξιοπιστία

Στοχαστικός έλεγχος

Μη γραμμικά συστήματα

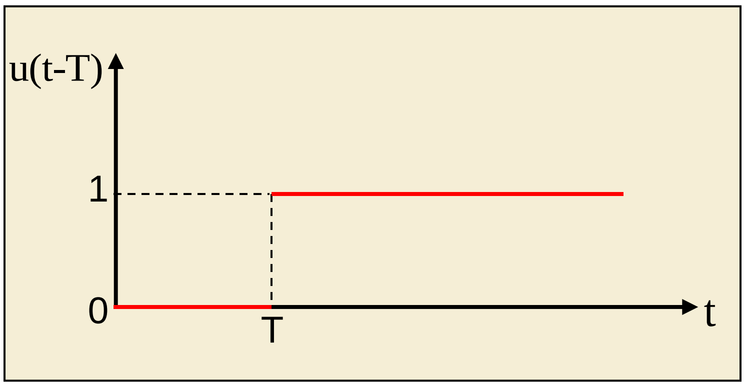
Συστήματα με κατανεμημένες παραμέτρους

Συστήματα μεγάλης κλίμακας

ΒΑΣΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Μοναδιαία βηματική συνάρτηση:

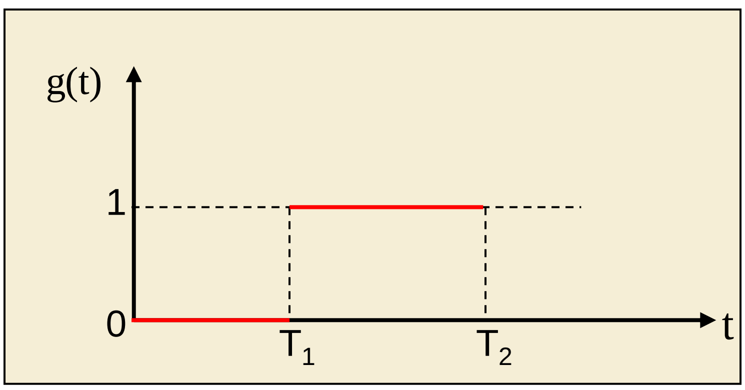
$$u(t-T)=\begin{cases} 1 & , t > T \\ 0 & , t < T \\ \text{απροσδ.} & , t = T \end{cases}$$



Μοναδιαία συνάρτηση πύλης:

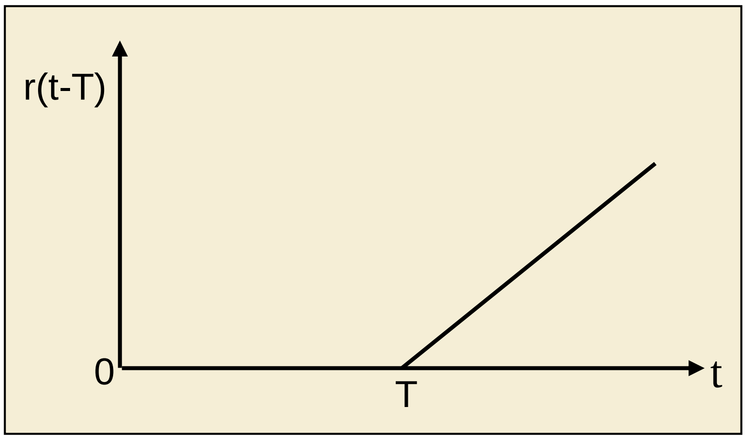
$$g(t)= u(t-T_1) - u(t-T_2) \;,\; T_1<T_2$$

$$g(t)=\begin{cases} 1 & , t \in (T_1, T_2) \\ 0 & , t \notin (T_1, T_2) \\ \text{απροσδ.} & , t = T_1, t=T_2 \end{cases}$$



Συνάρτηση αναρριχήσεως:

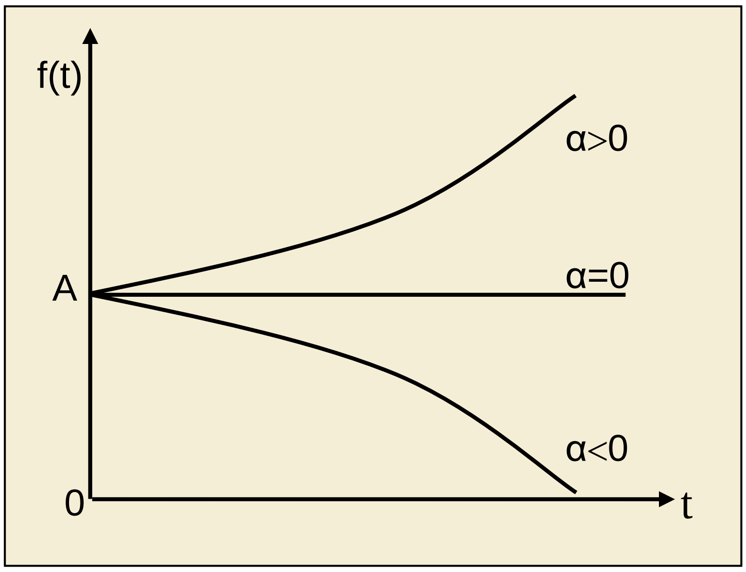
$$\mathbf{r(t\text{-}T)} = \begin{cases} \mathbf{t}, & \mathbf{t>T} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{t\leq T} \end{cases}$$



$$u(t\text{-}T) = \frac{dr(t\text{-}T)}{dt}, \qquad r(t\text{-}T) = \int_{-\infty}^{t} u(t\text{-}T)dt$$

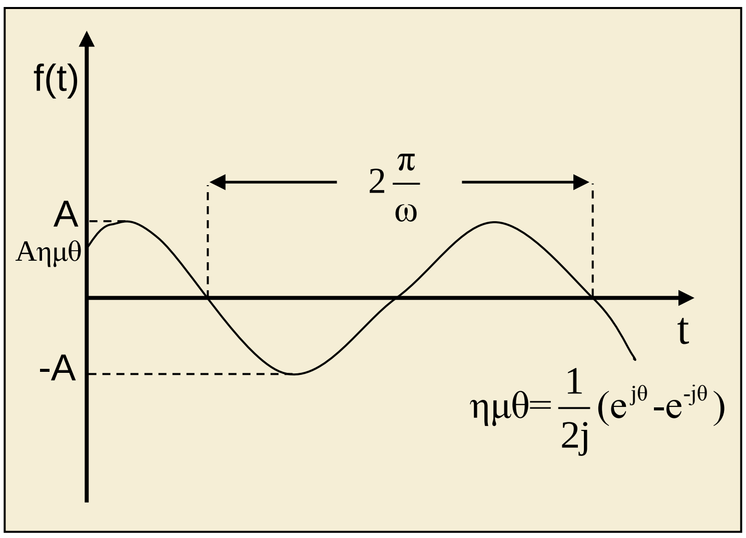
Εκθετική συνάρτηση:

$$f(t) = Ae^{at}$$



Ημιτονοειδής συνάρτηση:

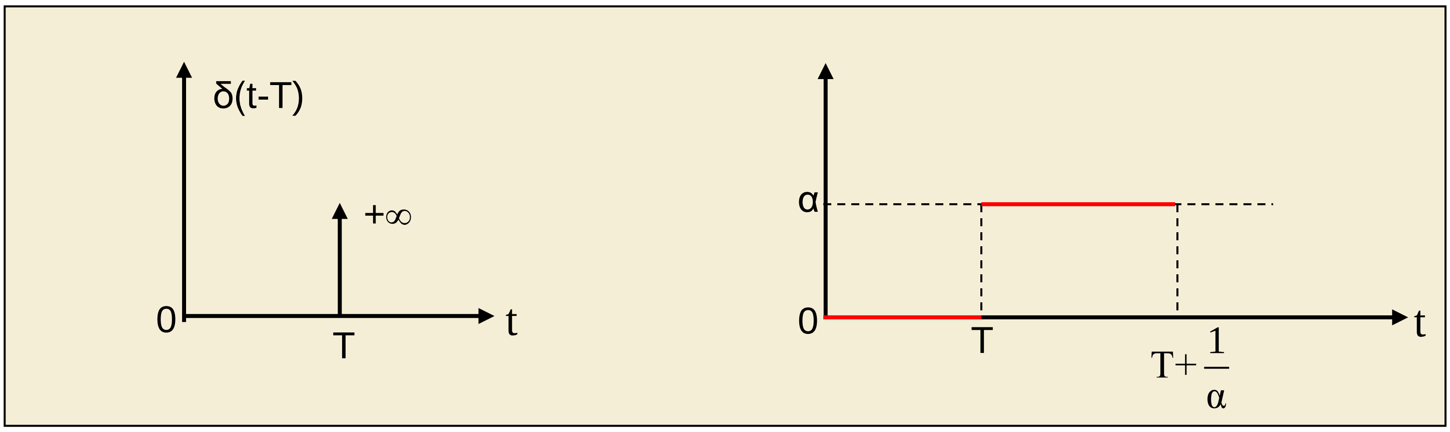
$$f(t) = A\eta\mu(\omega t+\theta)$$



Μοναδιαία κρουστική συνάρτηση (Dirac):

$$\delta(t-T)=\begin{cases} 0\,, & \forall t \text{ πλην } t=T \\ \propto\,, & t=T \end{cases}$$

$T+\frac{1}{\alpha}$



Άλλος ορισμός: **εμβαδόν e(t) = (1/α)α = 1**

$$\delta(t-T)= \underset{\alpha\to\infty}{\text{ορ}}\; e(t)$$

Ιδιότητες:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-T)dt = 1,$$

$$\delta(t-T)=\frac{du(t-T)}{dt},$$

$$u(t-T)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t-T)dt$$

$$|x(t)|<\infty \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-T)dt = x(T)$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

$$(\gamma.\gamma.o.\mu):F(s)=\int_a^b f(t)k(s,t)dt$$

πυρήνας, διάστημα, συνθήκες σύγκλισης του ολοκληρώματος

$$F(s_1,s_2,\dots s_n)=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\dots\int_{a_n}^{b_n} f(t_1,\dots,t_n)k(s_1,\dots,s_n,t_1,\dots,t_n)$$

$$dt_1,\dots,dt_n$$

LAPLACE: $k(s,t)=e^{-st}$, $\quad (a,b)=(0,\infty)$

$$Lf(t)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=F(s), \qquad s=\sigma+j\omega$$

ΣΥΝΘΗΚΗ: $\int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma t}dt\leq M$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ LAPLACE:

$$L^{-1}F(s)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\omega}^{c+j\omega}F(s)e^{st}ds=f(t),$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

$$L\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] = L\left[c_1 f_1(t)\right] + L\left[c_2 f_2(t)\right] =$$
$$= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

$$L\left[f^{(1)}(t) \right] = sF(s) - f(0)$$

$$L\left[f^{(n)}(t) \right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - f(0)$$

$$L\left[\int_{-\gamma}^{t} f(t)dt \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s}$$

$$f^{(-1)}(0) = \int_{-\gamma}^{0} f(t)dt$$

$$L\left[\underbrace{\int_{-\gamma}^{t} \ldots \int_{-\gamma}^{t}}_{\text{n - φορές}} f(t)(dt)^n \right] = \frac{F(s)}{s^n} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s^{n-1}} + \ldots + \frac{f^{(-n)}(0)}{s}$$

$$f^{(-k)}(0) = \underbrace{\int_{-\gamma}^{0} \ldots \int_{-\gamma}^{0}}_{\text{k - φορές}} f(t)(dt)^k$$

αλλαγή κλίμακας χρόνου:

$$L\left[f(at)\right]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

μετατόπιση στο πεδίο της συχνότητας:

$$L\left[e^{-at}f(t)\right]=F(s+a)$$

μετατόπιση στο πεδίο του χρόνου:

$$L\left[f(t-T)u(t-T)\right]=L\left[f(\tau)u(\tau)\right]=$$

$$=\int_{0}^{\infty}f(\tau)u(\tau)e^{-s(\tau-T)}d\tau=e^{-sT}F(s)$$

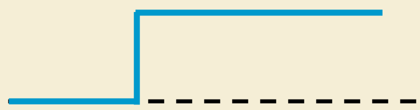
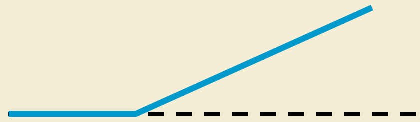
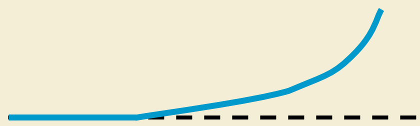
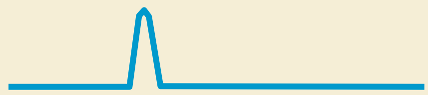
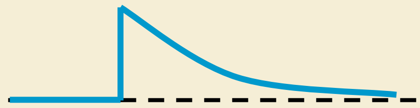
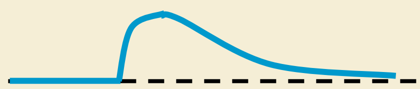
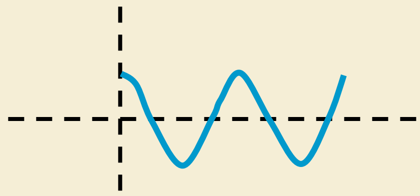
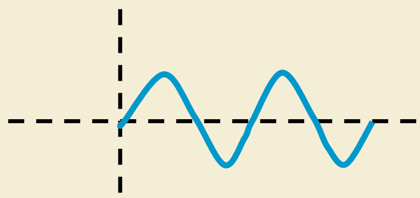
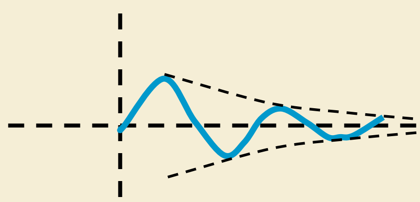
θεώρημα αρχικής τιμής:

$$\underset{t\to 0}{o\rho}\quad f(t)=\underset{s\to\infty}{o\rho}\quad\left[sF(s)\right]$$

θεώρημα τελικής τιμής:

$$\underset{t\to\infty}{o\rho}\quad f(t)=\underset{s\to 0}{o\rho}\quad\left[sF(s)\right]$$

Ζεύγη μετασχηματισμών Laplace γνωστών συναρτήσεων

$F(s)$	$f(t),\ t>0$	ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ
$\dfrac{1}{s}$	1	
$\dfrac{1}{s^2}$	t	
$\dfrac{1}{s^n}$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	
1	$\delta(t)$	
$\dfrac{1}{s+a}$	e^{-at}	
$\dfrac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	
$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$	
$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	
$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos \omega t$	

- **πολλαπλασιασμός:** $$L\left[tf(t)\right] = -\frac{d}{ds}F(s)$$

- **διαίρεση:** $$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(s)\,ds$$

- **περιοδική συνάρτηση:** $$L\left[f(t)\right] = \frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$$

$$F_1(s) = L\left[f_1(t)\right] \quad , \quad F_1(t) \;\; \eta \;\; f(t)$$ **στην πρώτη περίοδο**

❑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Ανάλυση κυκλωμάτων

ΠΙΝΑΚΕΣ

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix}$$

$$\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \left[a_{ij} \right]$$

- Διάνυσμα στήλης
- Διάνυσμα γραμμής
- Τετραγωνικός πίνακας
- Διαγώνιος πίνακας
- Μοναδιαίος πίνακας
- Μηδενικός πίνακας
- Ιδιόρρυθμος – ομαλός πίνακας

- Ανάστροφος πίνακας, A^T
- Συμμετρικός πίνακας, $A^T = A$
- Τριγωνικός πίνακας
- Συζυγής πίνακας, $\bar{A}$
- Ερμιτιανός πίνακας, $A = \bar{A}^T$
- Ορθογώνιος πίνακας, $A^T A = A A^T = I$
- Αντίστροφος πίνακας, $A A^{-1} = I = A^{-1} A$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

$$A, B \qquad , \exists T: \qquad B = T^{-1} A T$$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

$$g(\underline{x}) = \underline{x}^T \, \underline{A} \, \underline{x} = < \underline{x}, \underline{A} \, \underline{x} > \qquad , \mathrm{A} : \sigma\upsilon\mu\mu\varepsilon\tau\rho\iota\kappa\acute{o}\varsigma$$

ΘΕΤΙΚΑ – ΑΡΝΗΤΙΚΑ ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ (ΗΜΙΟΡΙΣΜΕΝΕΣ)

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ SYLVESTER