Ψηφιακή Σχεδίαση

Ενότητα 2: Αλγεβρα Boole, Δυαδική Λογική, Ελαχιστόροι, Μεγιστόροι

Δρ. Ζιούζιος Δημήτρης
dziouzios@uowm.gr

Ιστορικά στοιχεία

- Η **άλγεβρα Boole** είναι θεμελιώδους σημασίας για την επιστήμη της Πληροφορικής και αποτελεί τη βάση για τη θεωρητική μελέτη του πεδίου της λογικής σχεδίασης. Επιπλέον, είναι σημαντική σε άλλα πεδία όπως η Στατιστική, η Θεωρία συνόλων και ο προγραμματισμός.
- 1854 Boole συστηματική αντιμετώπιση λογικής.
- 1938 Shannon δημιούργησε άλγεβρα Boole με 2 τιμές.

Συναρτήσεις Δυαδικής Λογική

- F(vars) = έκφραση
  - vars: Σύνολο δυαδικών μεταβλητών.
  - Έκφραση:
    - Τελεστές(+, *, ΄)
    - Μεταβλητές (0, 1)
    - Σταθερές (0, 1)
    - Ομαδοποίηση (παρενθέσεις)
- Παράδειγμα: $F(a, b) = a' \bullet b' + b'$

$$G(x, y, z) = x \bullet (y + z')$$

Βασικοί λογικοί Τελεστές

- Δυαδικοί (Binary):
  - AND (Επίσης: •, Λ)
  - OR (Επίσης: +, V)
- Μοναδιαίοι (Unary):
  - NOT (Επίσης: ΄, −)

F(a, b) = a • b διαβ. F = 1 **αν και μόνο αν** a = b = 1

G(a, b) = a + b διαβ. G = 1 αν a = 1 ή αν b = 1

H(a) = a΄ διαβ. H = 1 αν a = 0

Βασικοί Λογικοί Τελεστές (συνέχεια)

- Λογικό AND ενός bit (1-bit), μοιάζει με δυαδικό πολλαπλασιασμό:

  $0 \bullet 0 = 0, \quad 0 \bullet 1 = 0, \quad 1 \bullet 0 = 0$

  $1 \bullet 1 = 1$

- Λογικό OR ενός bit (1-bit), μοιάζει με δυαδική πρόσθεση, εκτός από μία πράξη:

  $0 + 0 = 0$

  $0 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 1 \; (\neq 10_2)$

Πίνακες Αληθείας για Λογικές Πύλες

- Ένας πίνακας αληθείας είναι ένας πίνακας από τιμές μηδέν 0 (ψευδές) ή ένα 1 (αληθές), που δίνει τις τιμές μίας λογικής πρότασης για όλες τις δυνατές τιμές των μεταβλητών που περιέχει
- Ο πίνακας αληθείας αποτελείται από στήλες που περιέχουν όλες τις μεταβλητές και το αποτέλεσμα ενώ οι γραμμές του περιέχουν όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των τιμών των μεταβλητών.
- Πόσες γραμμές υπάρχουν στον αληθοπίνακα του F( ); 2^n γραμμές, αφού υπάρχουν 2^n πιθανοί δυαδικοί συνδυασμοί (patterns) για n μεταβλητές.

Παράδειγμα (1)

- Ένας πίνακας αληθείας παριστάνει τη συνάρτηση μεταξύ των εισόδων και της εξόδου ενός λογικού συστήματος. Για δυο εισόδους υπάρχουν τέσσερις πιθανοί συνδυασμοί πραγματικών τιμών:

  FF, FT, TF, TT

- Επειδή κάθε δυνατή είσοδος μπορεί να δώσει δύο διαφορετικές εξόδους ***F*** *(false)*, ***T****(true)* συνεπάγεται ότι οι δυνατοί πίνακες αληθείας για ένα λογικό σύστημα δύο εισόδων είναι

  $\mathbf{2^4 = 16}$.

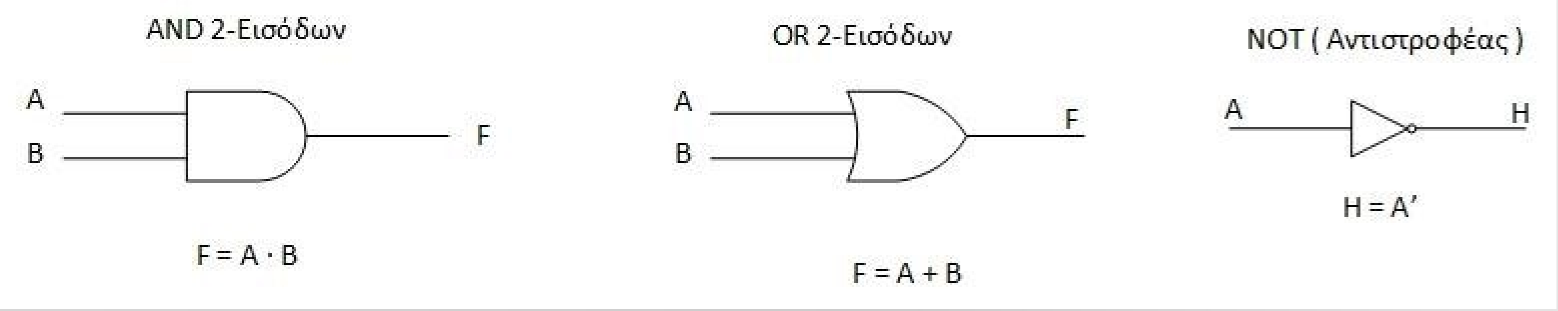
Παράδειγμα (2)

Όλοι οι πίνακες αληθείας για δύο εισόδους A. B και μία έξοδο Z

	τιμές εισόδου					
A	F	F	T	T		
B	F	T	F	T	Συνάρτηση (έξοδος Z)	Σύμβολο
0	F	F	F	F	πάντοτε 0	0
1	F	F	F	T	AND	$A \cdot B$
2	F	F	T	F	-	-
3	F	F	T	T	είσοδος A	A
4	F	T	F	F	-	-
5	F	T	F	T	είσοδος B	B
6	F	T	T	F	XOR	$A \oplus B$
7	F	T	T	T	OR	$A + B$
8	T	F	F	F	NOR	$\overline{A + B}$
9	T	F	F	T	XNOR	$\overline{A \oplus B}$
10	T	F	T	F	Not B	$\overline{B}$
11	T	F	T	T	-	-
12	T	T	F	F	Not A	$\overline{A}$
13	T	T	F	T	-	-
14	T	T	T	F	NAND	$\overline{A \cdot B}$
15	T	T	T	T	πάντοτε 1	1

Λογικές Πύλες

- Οι λογικές πύλες είναι **αφαιρετικά μοντέλα** στοιχείων ηλεκτρονικών κυκλωμάτων που λειτουργούν με ένα ή περισσότερα σήματα εισόδου και παράγουν ένα σήμα εξόδου.



Άλγεβρα Boole

- Χρήσιμος μηχανισμός για τον χειρισμό / μετασχηματισμό (απλοποίηση) δυαδικών συναρτήσεων.
- George Boole (1815 – 1864): «Μια έρευνα για τους νόμους της σκέψης».
- Ορολογία:
  - Παράγοντας (Literal): Μεταβλητή ή το συμπλήρωμα της
  - Όρος παραγόντω (Term): Υλοποιούν μια πύλη.
    - Πολλαπλασιαστικός όρος (Product term): παράγοντες ενωμένοι με • (AND).
    - Αθροιστικός όρος (Sum term): παράγωντες ενωμένεοι με + (OR)

Αξιώματα Άλγεβρας Boole

X: Δυαδική μεταβλητή, 0, 1: σταθεροί

1. X + 0 = X – Αξίωμα μηδενικότητας (ουδέτερο στοιχείο ως προς +)
2. X • 1 = X – Μοναδιαίο αξιωμα (ουδέτερο στοιχείο ως προς •)
3. X + 1 = 1 – Μοναδιαία ισότητα
4. X • 0 = 0 – Ιδιότητα μηδενικότητας
5. X + X΄= 1 – Συμπληρωμα (ως προς +)
6. X • X΄ = 0 – Συμπλήρωμα (ως προς •)
7. X + X = X – Idempotence (ταυτοδυναμία) (ως προς +)
8. X • X = X – Idempotence (ταυτοδυναμία) (ως προς •)
9. (X΄)΄= X – Involution (δυο αρνησεις)

Βασικά Θεωρήματα άλγεβρας Boole (1)

X: δυαδική μεταβλητή, 0,1: σταθεροί

- X + X = X -- Idempotence (ταυτοδυναμία) (ως προς +)
- X · X = X -- Idempotence (ταυτοδυναμία) (ως προς ·)
- (X’)’ = X -- Involution (δυο αρνήσεις)

Βασικά Θεωρήματα άλγεβρας Boole (2)

- Αντιμεταθετική

$$x + y = y + x$$

$$x * y = y * x$$

- Προσεταιριστική

$$x + (y + z) = (x + y) + z \quad x * (yz) = (xy) * z$$

- Επιμεριστική

$$x (y + z) = xy + xz \quad x + yz = (x + y)(x+z)$$

Ιδιότητες Άλγεβρας Boole

- Αντιμεταθετική ιδιότητα

  $A + B = B + A, \quad A \bullet B = B \bullet A$
- Απορροφητική ιδιότητα

  $A + (A \bullet B) = A, \quad A \bullet (A + B) = A$
- Προσεταιριστική ιδιότητα

  $A + (B + C) = (A + B) + C, \quad A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C$
- Επιμεριστική ιδιότητα

  $A \bullet (B + C) = (A \bullet B) + (A \bullet C), \quad A + (B \bullet C) = (A + B) \bullet (A + C)$

- Κανόνες De Morgan

$\overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$

$\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$

Άλλες ιδιότητες

- Κανόνας ελαχιστοποίησης

$$A \bullet B + A \bullet \overline{B} = A$$

$$(A + B) \bullet (A + \overline{B}) = A$$

- $$(A + B)(A + \overline{B}) = AA + A\overline{B} + AB + B\overline{B}$$

$$= A + A\overline{B} + AB + 0$$

$$= A + A(\overline{B} + B)$$

$$= A + A$$

$$= A$$

Άλλες ιδιότητες (2)

- Να αποδειχθεί ότι:
  - $AB + A\overline{B} = A$
  - $A + (AB) = A(A + B) = A$

- Απάντηση:
  - $AB + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = A \bullet 1 = A$

    $A + (AB) = AA + AB = A(A + B)$

    $A + (AB) = A(1 + B) = A \bullet 1 = A$

A	A • B	A + (A • B)
0	0	0
1	B	1

  - Χρήση του πίνακα αληθείας

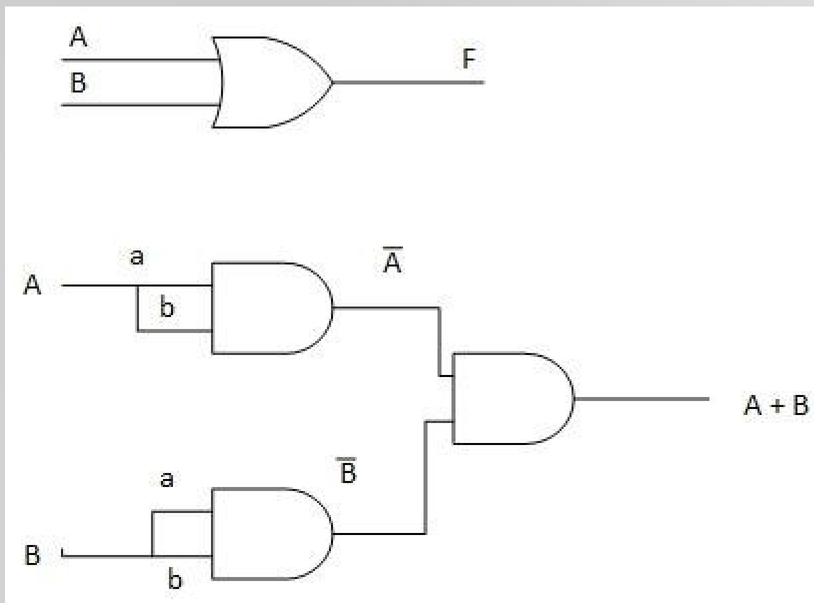
Θεώρημα De Morgan (1)

- Τα θεωρήματα De Morgan είναι πιο σημαντικά στην λογική σχεδίαση όπου συσχετίζονται **AND** και **NOR** πύλες, ή **OR** και **NAND** πύλες.
- Για παράδειγμα χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα De Morgan για να σχεδιάσουμε ένα συνδυασμό πυλών **NAND** που είναι ισοδύναμος με μια πύλη **OR** δύο εισόδων.

Θεώρημα De Morgan (2)

- Για μια πύλη OR ισχύει: $f = A + B = \overline{\overline{A} \bullet \overline{B}}$

  επίσης: $\overline{A \bullet A} = \overline{A}$



Προτεραιότητα Τελεστών

1. Παρενθέσεις ( )
2. Όχι (NOT)
3. ΚΑΙ (AND)
4. Ή (OR)

Πίνακες Αληθείας

- Απαριθμεί όλους τους πιθανούς συνδυασμούς τιμών μεταβλητών και την ανάλογη τιμή συνάρτησης.
- Στα δεξιά βλέπουμε πίνακες αληθείας για τις τυχαίες συναρτήσεις F_1 (x, y, z), F_2 (x, y , z), και F_3 (x, y, z).

x	y	z	F_1	F_2	F_3
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1

Πίνακες Αληθείας (2)

- Πίνακας Αληθείας: **μοναδική (κανονική = canonical)** αναπαράσταση δυαδικών συναρτήσεων.
- Εάν οι 2 συναρτήσεις έχουν τους ίδιους πίνακες αληθείας, οι συναρτήσεις είναι ισοδύναμες (ισχύει και αντιστρόφως).
- Οι πίνακες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την απόδειξη θεωρημάτων ισοδυναμίας.
- Το μέγεθος ενός πίνακα μεγαλώνει **εκθετικά** βάση του αριθμού των μεταβλητών που εμπλέκονται. Επομένως, η χρήση δυαδικής άλγεβρας είναι πιο ελκυστική.

Πίνακες αληθείας Λογικών Πύλών (1)

- **Πίνακας Αληθείας:** μορφή πίνακα που εκφράζει μοναδικά τη σχέση μεταξύ των μεταβλητών εισόδου μιας συνάρτησης και των εξόδων της.
- AND 2-Εισόδων

A	**B**	**F = A • B**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Πίνακες αληθείας Λογικών Πύλών (2)

- OR 2- Εισόδων

A	B	F = A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Πίνακες αληθείας Λογικών Πύλών (3)

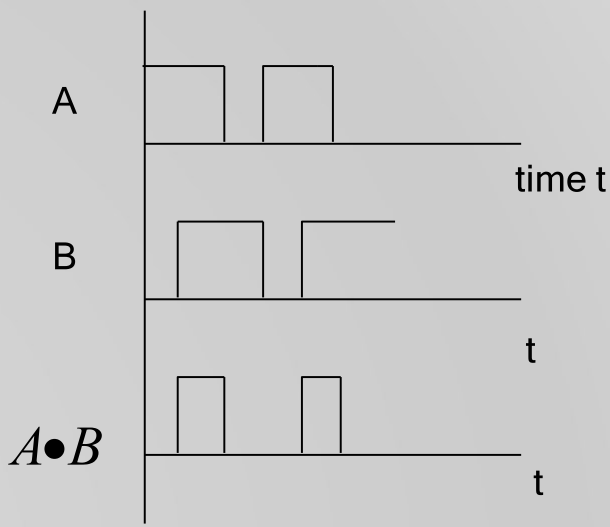
- NOT

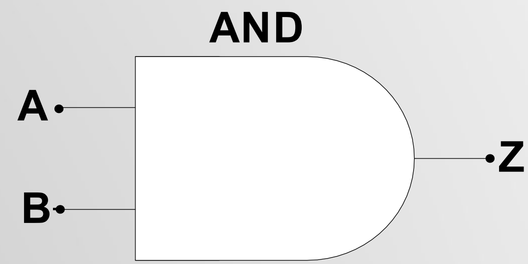
A	F = A′
0	1
1	0

Πύλη AND

- Η έξοδος είναι αληθής (1), όταν και οι δύο είσοδοι είναι αληθείς (1)

A	B	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



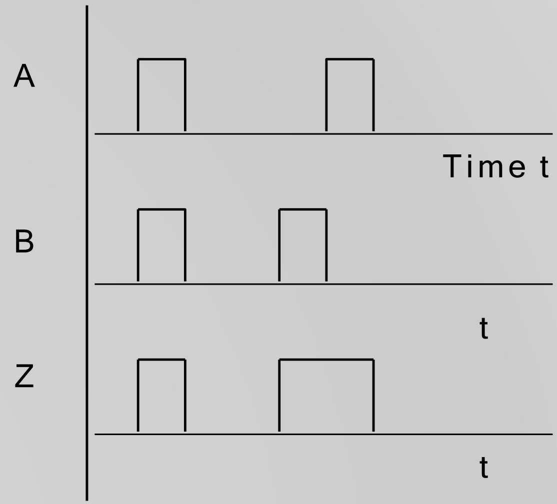


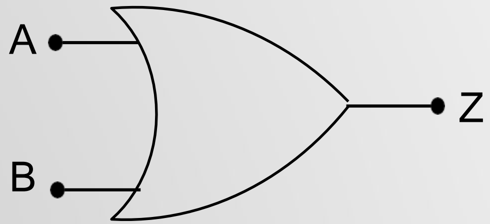
$$Z = A \cdot B$$

Πύλη OR

- Η έξοδος είναι αληθής (true) εάν μια από τις εισόδους ή και οι δύο είναι αληθείς (1)

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

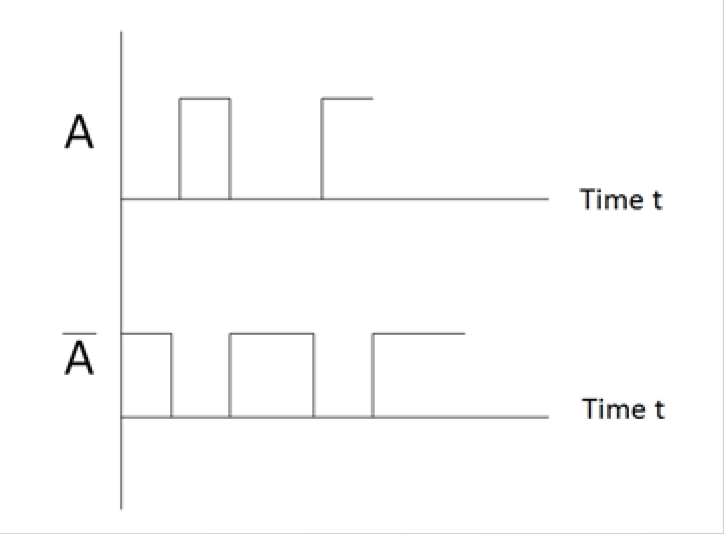


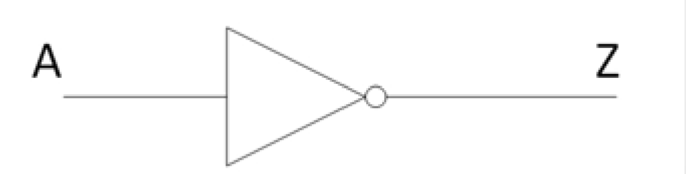


$$Z = A + B$$

Πύλη NOT

- Δημιουργεί αντιστροφή του σήματος εισόδου

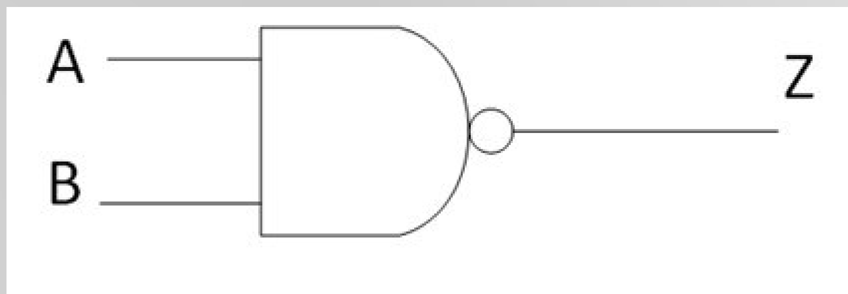




$$Z = \overline{A}$$

Πύλη NAND (1)

- Η έξοδος είναι ψευδής (0) μόνο όταν Α και Β είναι αληθείς (1)



$$Z = \overline{A \cdot B}$$

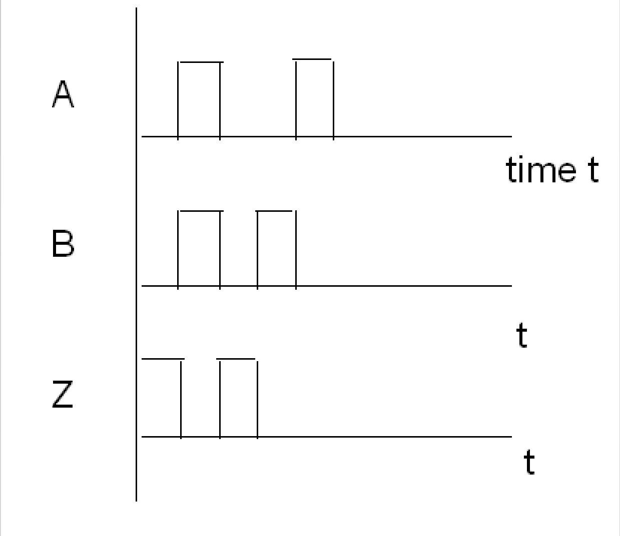
Πύλη NAND (2)

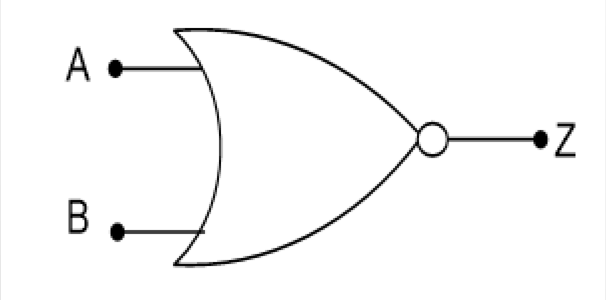
- NAND (NOT AND) 2-εισόδων

A	**B**	**Z**
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Πύλη NOR (1)

- Η έξοδος είναι αληθής (1), όταν και οι δύο είσοδοι είναι ψευδείς (0)





$$Z = \overline{A + B}$$

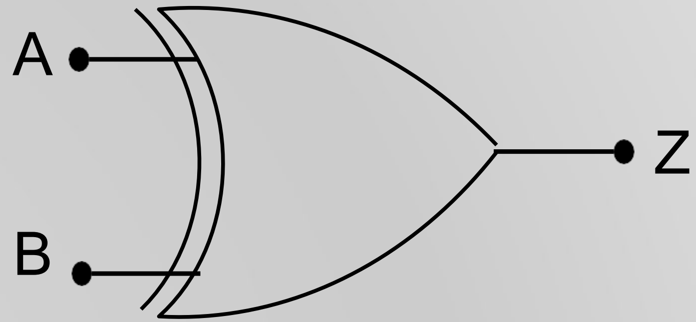
Πύλη NOR (2)

- Πύλη NOR (NOT OR)

A	**B**	**Z**
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Πύλη XOR (1)

- Η έξοδος είναι αληθής (1), όταν η μία εκ των δύο εισόδων είναι αληθής (1), αλλά όχι και οι δύο ταυτόχρονα



$$Z = A \oplus B$$

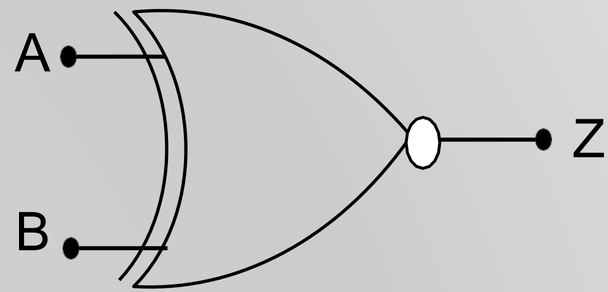
Πύλη XOR (2)

- Πύλη XOR

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Πύλη XNOR (NOT XOR) (1)

- Η έξοδος είναι αληθής (1) όταν και οι δύο είσοδοι είναι ψευδείς (0), ή και οι δύο είναι αληθείς (1)



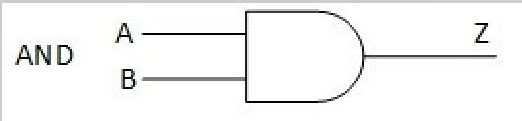
$$Z = \overline{A \oplus B}$$

Πύλη XNOR (2)

- Πύλη XNOR (NOT XOR)

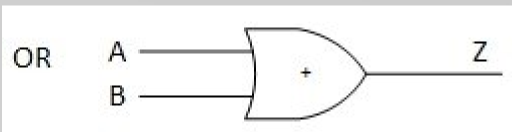
A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Συνοπτικός Πίνακας Πυλών



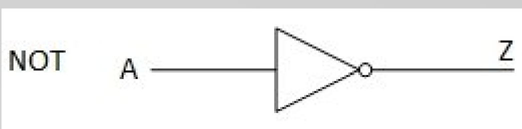
$Z = A \cdot B$

A	B	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



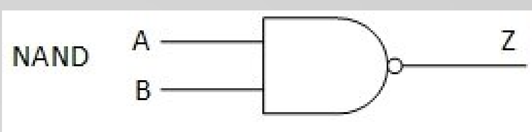
$Z = A + B$

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



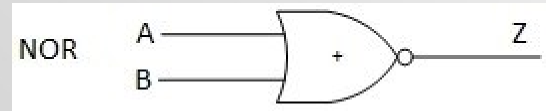
$Z = \overline{A}$

A	Z
0	1
1	0



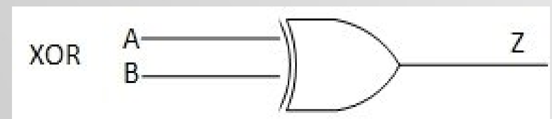
$Z = \overline{A \cdot B}$

A	B	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



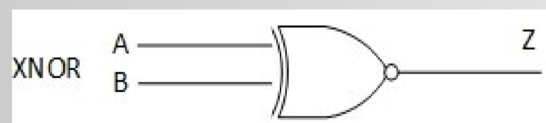
$Z = \overline{A + B}$

A	B	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



$Z = A \oplus B$

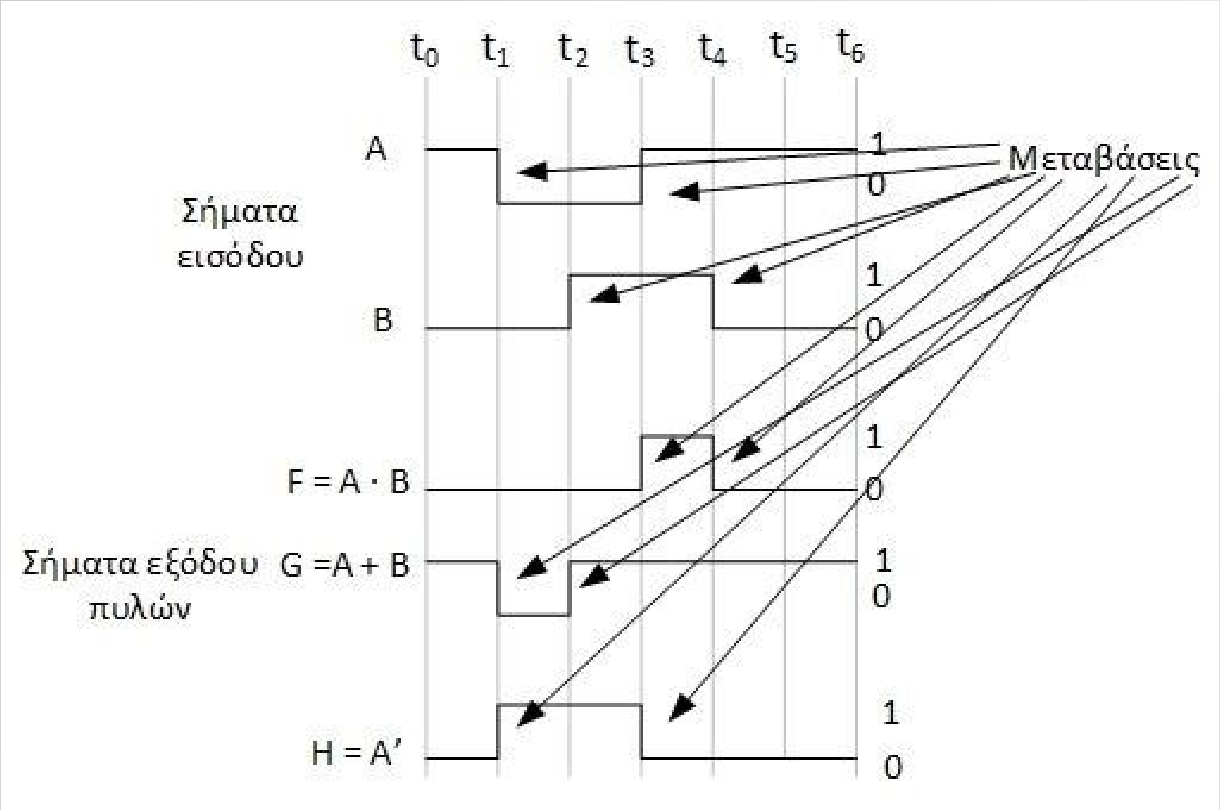
A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



$Z = \overline{A \oplus B}$

A	B	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

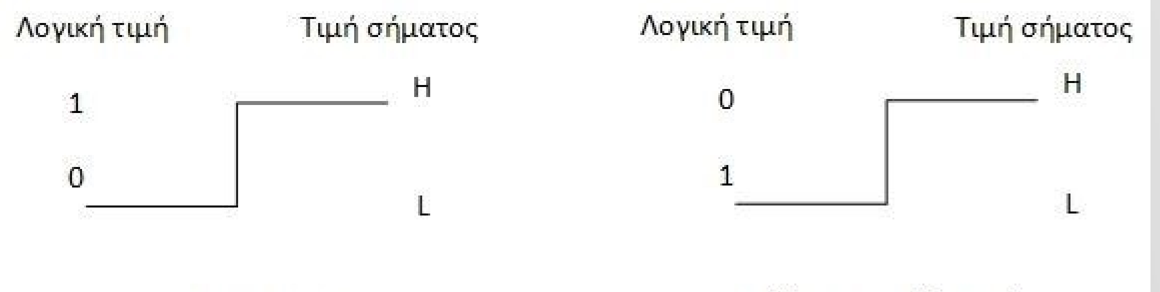
Waveforms (κυματομορφές)



Προϋπόθεση : Ο χρόνος μετάδοσης του σήματος μεταξύ πυλών είναι αμελητέος (0)

Θετική & Αρνητική Λογική

- Οι πύλες μπορεί να έχουν κατασκευαστεί ώστε να θεωρούν τη λογική τιμή 1 όταν υπάρχει H (θετική λογική) ή όταν υπάρχει L (αρνητική λογική)



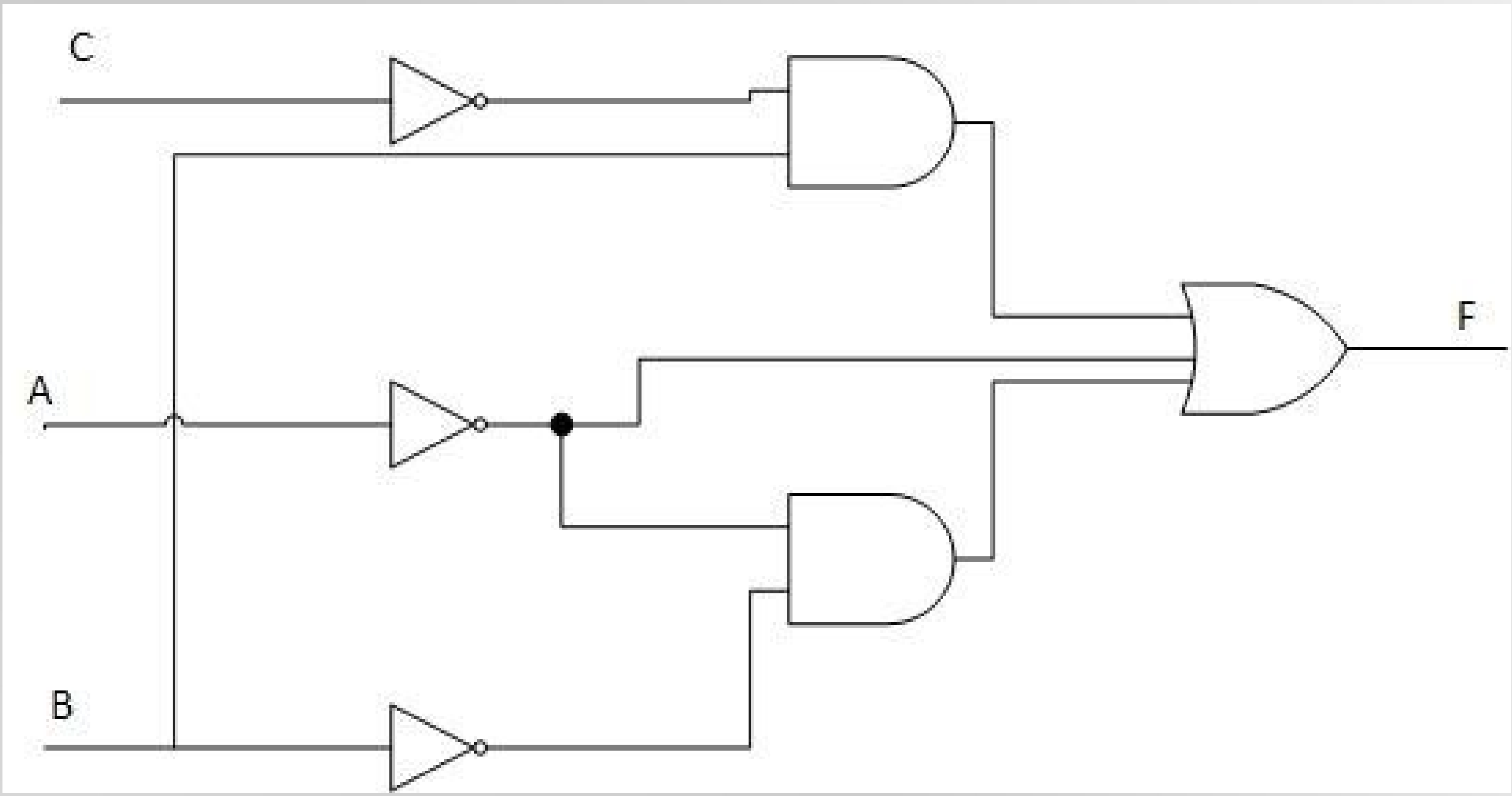
(α) Θετική λογική

(β) Αρνητική λογική

Συνδιαστικά Λογικά Κυκλωματα

- Θεωρήστε την συνάρτηση F = A + B • C′ + A • B′
- Ένα συνδυαστικό κύκλωμα μπορεί να κατασκευαστεί για την υλοποίηση της F, με την κατάλληλη ένωση σημάτων εισόδου και λογικών πυλών:
  - Σήματα εισόδου → από τις μεταβλητές της συνάρτησης (A, B, C).
  - Σήματα εξόδου → συνάρτηση εξόδου (F).
  - Λογικές Πύλες → από λογικές πράξεις.

Συνδιαστικά Λογικά Κυκλωματα (2)



Συνδιαστικά Λογικά Κυκλωματα (3)

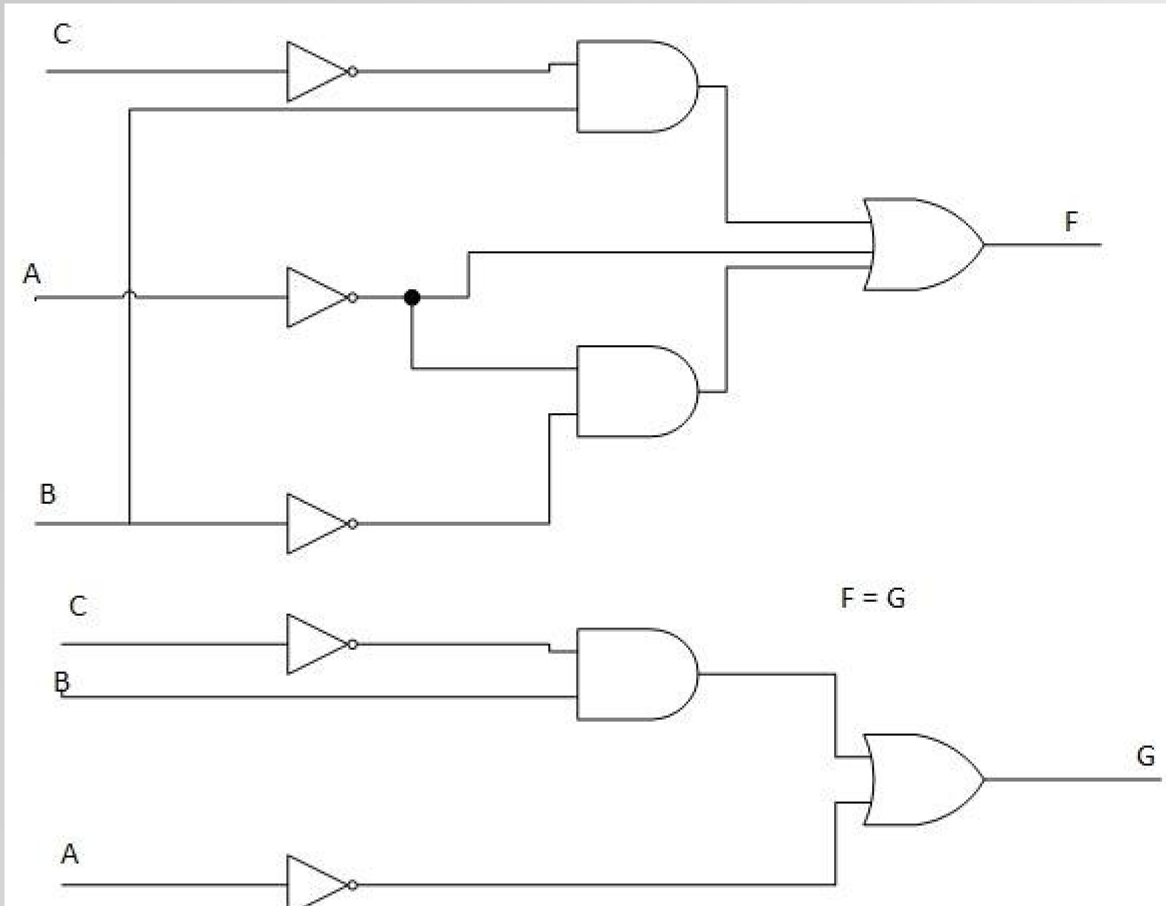
- Για να σχεδιάσουμε ένα αποδοτικό κλυκλωμα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το μέγεθος του κυκλωματος (circuit size) και την καθυστέρηση διάδοσης (propagation delay = χρόνος που χρειάζετα ένα σήμα εισόδου να αλλάξει για να γίνει αντιληπτό στην έξοδο).
- Στον πίνακα αληθείας δίπλα:

  $F = A' + B \bullet C' + A' \bullet B'$ και

  $G = A' + B \bullet C'$
- Οι πίνακες για τις F και G είναι οι ίδιοι → ίδια συνάρτηση (F = G).
- Η G υλοποιεί την λογική του κυκλώματος με λιγότερα στοιχεία.

A	B	C	F	G
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

Συνδιαστικά Λογικά Κυκλωματα (4)



Οι εκφράσεις Boole & μοναδικότητα

- Αντίθετα με τους πίνακες αληθείας, οι εκφράσεις που αντιπροσωπεύουν μία δυαδική συνάρτηση **δεν** είναι μοναδικές.
- Παράδειγμα:
  - $F(x, y, z) = x'y'z' + x'yz' + xyz'$
  - $G(x, y, z) = x'y'z' + yz'$
- Οι αντίστοιχοι πίνακες αληθείας για τις F ( ) και G ( ) φαίνονται στα δεξιά. Είναι ίδιοι!
- Άρα, F ( ) = G ( )

x	y	z	F	G
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

Αλγεβρικοί Μετασχηματισμοί

- Η δυαδική άλγεβρα είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για την απλοποίηση ψηφιακών κυκλωμάτων.
- Γιατί; Απλούστερο συνήθως σημαίνει πιο φτηνό, μικρότερο, γρηγορότερο.
- Παράδειγμα: Απλοποίηση $F = x'yz + x'yz' + xz$.

$$F = x'yz + x'yz' + xz$$
$$= x'y\,(z + z') + xz$$
$$= x'y \bullet 1 + xz$$
$$= x'z + xz$$

Αλγεβικοί μετασχηματισμοί (2)

- Παράδειγμα: Αποδείξετε ότι

  $x'y'z' + x'yz' + xyz' = x'z' + yz'$

- Απόδειξη:

  $x'y'z' + x'yz' + xyz'$

Προσθέτουμε $x'yz'$ $= x'y'z' + x'yz' + x'yz' + xyz'$

$= x'z'(y' + y) + yz'(x' + x)$

$= x'z' \bullet 1 + yz' \bullet 1$

$= x'z' + yz'$

Παράδεγμα απλοποίησης

- $x + x'y = (x + x')(x + y) = 1 \bullet (x + y) = x + y$
- $x (x' = y) = xx' + xy = 0 + xy = xy$

Η απλοποίηση στοχεύει είτε

- Απλοποίηση παραγόντων (εισόδων).
- Απλοποίηση όρων (πύλες).

Συμπλήρωμα συνάρτησης (F→F΄)

- Το συμπλήρωμα μιας συνάρτησης παράγεται από την ανταλλαγή (• and +) και (1 and 0) , και το συμπλήρωμα κάθε μεταβλητής (DeMorgan).
- Αλλιώς, η ανταλλαγή 1 ↔ 0 στην στήλη του πίνακα αληθείας της F δίνει την F΄.
- Το συμπλήρωμα μιας συνάρτησης **δεν είναι το ίδιο** με τον δυΐσμό (dual) μιας συνάρτησης.

Συμπλήρωμα Παραδείγματα

- Βρείτε την G (x, y, z), εάν αυτή είναι το συμπλήρωμα της $F(x, y, z) = xy'z' + x'yz$
- $G = F' = (xy'z' + x'yz')'$

  $= (xy'z')' \bullet (x'yz)'$ *DeMorgan*

  $= (x' + y + z) \bullet (x + y' + z')$ *DeMorgan ξανά*
- *Σημείωση: Το συμπλήρωμα μιας συνάρτησης μπορεί να παραχθεί με την με την εύρεση του δυϊσμού της συνάρτησης, και ακολούθως παίρνοντας το συμπλήρωμα όλων των literals (παραγόντων).*

Κανονικές & πρότυπες μορφές

- Χρειαζόμαστε τυποποιημένε τεχνικές για την απλοποίηση δυαδικών συναρτήσεως.
  - Ελαχιστόροι και Μεγιστόροι.
  - Άθροισμα ελαχιστόρων & Γινόμενο Μεγιστόρων.
  - Γινόμενο και Άθροισμα όρων.
  - Αθροισμα Γινομένων (Sum-of-Products – SOP) και Γινόμενο Αθροισμάτων (Product-of-Sums – POS).

Ορισμοί

- **Παράγοντας**: Μεταβλητή ή το συμπλήρωμα της.
- **Αθροιστικός όρος**: παράγοντες ενωμένοι με +
- **Πολ/σκός όρος**: παράγοντες ενωμένοι με •
- **Ελαχιστόρος** (Minterm): πολ/κός όρος • στον οποίο όλες οι μεταβλητες εμφανίζονται ακριβώς 1 φορά, με κανονική ή συμπληρωματικη μορφή.
- **Μεγιστόρος** (Maxterm):αθροιστικός όρος + στον οποίο όλες οι μεταβλητές εμφανίζονται ακριβώς 1 φορά, με κανονική ή συμπληρωματική μορφή.

Ελαχιστόρος (minterm)

- Αντιπροσωπεύει ακριβώς ένα συνδυασμό στον πίνακα αληθείας.
- Συμβολίζεται με m_j, όπου **j είναι το δεκαδικό ισοδύναμο του ελαχιστόρου του αντίστιχου δυαδικού συνδυασμού (b_j).**
- Μια μεταβλητή στο m_j είναι συμπληρωματική εάν η τιμή της στο b_j είναι 0, αλλιώς είναι κανονική.
- Παράδειγμα: Υποθέστε 3 μεταβλητές (A, B, C), και j = 3. Τότε, b_j = 011 και ο αντίστοιχος ελαχιστόρος συμβολίζεται με $m_j = A'BC$.

Μεγιστόρος (maxterm)

- Αντιπροσωπεύει ακριβώς ένα συνδυασμό στον πίνακα αληθείας.
- Συμβολίζεται με M_j, όπου **j είναι το δεκαδικό ισοδύναμο του μεγιστόρου του αντίστοιχου δυαδικού συνδυασμού (b_j)**
- Μια μεταβλητή στο M_j είναι συμπληρωματική εάν η τιμή της στο b_j είναι 1, αλλιώς είναι κανονική.
- Παράδειγμα: Υποθέστε 3 μεταβλητές (A, B, C), και j = 3. Τότε b_j = 011 και ο αντίστοιχος μεγιστόρος συμβολίζεται με $M_j = A + B' + C'$

Ορισμοί Πινάκων (1)

- Οι ελαχιστόροι και οι μεγιστόροι είναι εύκολο να αναπαρασταθούν χρησιμοποιώντας πίνακα αληθείας.

Παράδειγμα: Υποθέτουμε 3 μεταβλητές x < y< z (το σύμβολο " <" υπονοεί τη διάταξη των μεταβλητών).

Ορισμοί Πινάκων (2)

x	y	z	Minterm	Maxterm
0	0	0	$x'y'z' = m_0$	$x + y + z = M_0$
0	0	1	$x'y'z = m_1$	$x + y + z' = M_1$
0	1	0	$x'yz' = m_2$	$x + y' + z = M_2$
0	1	1	$x'yz = m_3$	$x + y' + z' = M_3$
1	0	0	$xy'z' = m_4$	$x' + y + z = M_4$
1	0	1	$xy'z = m_5$	$x' + y + z' = M_5$
1	1	0	$xyz' = m_6$	$x' + y' + z = M_6$
1	1	1	$xyz = m_7$	$x' + y' + z' = M_7$

Κανονικές Μορφές (1)

- Οποιαδήποτε δυαδική συνάρτηση F ( ) μπορεί να εκφραστεί ως ένα **μοναδικό αθροισμα ελαχιστόρων** και ένα **μοναδικό γινόμενο μεγιστόρων** (με μια συγκεκριμένη διάταξη μεταβλητών).
- Μα άλλα λόγια, κάθε συνάρτηση F ( ) έχει 2 κανονικές μορφές:
  - Κανονικό SOP (άθροισμα ελαχιστόρων- Sum Of Mintems)
  - Κανονικό POS (γινόμενο μεγιστόρων - Product Of Maxterms)

Κανονικές μορφές (2)

- Κανονικό SOP :

  Οι ελαχιστόροι που συμπεριλαμβάνονται είναι οι $m_{j,}$ έτσι ώστε F ( ) = 1 στην γραμμή j του πίνακα αληθείας της F ( ).

- Κανονικό POS :

  Οι μεγιστόροι που συμπεριλαμβάνονται είναι οι $M_{j,}$ Έτσι ώστε F ( ) = 0 στην γραμμή j του αληθοπίνακα της F ( ).

Παράδειγμα

- f_1 (a, b, c)
- Η κανονική SOP μορφή της f_1( ) είναι

f_1 (a, b, c) = $m_1 + m_2 + m_4 + m_6$

= a΄b΄c + a΄bc΄+ ab΄c΄+ abc΄

- Η κανονική μορφή POS μορφή της f_1( ) είναι

f_1 (a, b, c) = $M_0 \bullet M_3 \bullet M_5 \bullet M_7$

= (a + b + c) • (a + b΄+ c΄) •

(a΄+ b + c΄) • (a΄+ b΄+ c΄)

- Παρατηρείστε ότι: **m_j = (M_j)΄**

a	b	c	f_1
0	0	0	0 (M0)
0	0	1	1 (m1)
0	1	0	1 (m2)
0	1	1	0 (M3)
1	0	0	1 (m4)
1	0	1	0 (M5)
1	1	0	1 (m6)
1	1	1	0 (M7)

Χρήση των Σ και Π

- $f_1 (a, b, c) = \sum m(1, 2, 4, 6)$, όπου $\sum$ δείχνει ότι το f_1 είναι μια SOP μορφή, και $m (1, 2, 4, 6)$ δείχνει ότι οι ελαχιστόροι που συμπεριλαμβάνονται είναι οι $m_{1,}$ $m_{2,}$ m_4 και $m_{6.}$
- $f_1(a, b, c) = \prod \ M (0, 3, 5, 7)$, όπου $\prod$ δείχνει ότι το f_1 είναι μια POS μορφή, και $M (0, 3, 5, 7)$ δείχνει ότι οι μεγιστόροι που συμπεριλαμβάνονται είναι M_0, M_3, M_5 και M_7
- Αφού. $m_j = (M_j)'$ για κάθε j, τότε

$\sum m (1, 2, 4, 6) = \prod \ M (0, 3, 5, 7) = f_1 (a, b, c)$

Μετατροπή κανονικών μορφών

- Αντιστρέφουμε τα ∑ με ∏ (ή αντίθετα) και αντικαθιστούμε τα j που εμφανίζονται στην αρχική μορφή με αυτά που δεν εμφανίζονται.
- Παράδειγμα :

$f_1 (a, b, c) = a'b'c + a'bc' + ab'c' + abc'$

$= m_1 + m_2 + m_4 + m_6$

$= \sum (1, 2, 4, 6)$

$= \prod(0, 3, 5, 7)$

$= (a + b + c) \bullet (a + b'+c') \bullet (a'+ b + c') \bullet (a'+ b'+c')$

Πρότυπες μορφές

- Οι πρότυπες μορφές είναι «όπως» τις κανονικές μορφές, με εξαίρεση ότι δεν είναι απαραίτητο για όλες τις μεταβλητές να εμφανιστούν σε ένα γινόμενο (SOP) ή άθροισμα (POS) ορών.
- Παράδειγμα:
  - $f_1 (a, b, c) = a'b'c + bc' + ac'$

  είναι μια πρότυπη SOP μορφή $f_1(a, b, c)$
  - $f_1 (a, b, c) = (a + b + c) \bullet (b'+c') \bullet (a'+c')$

  είναι μια πρότυπη POS μορφή.

Μετατροπή POS από πρότυπη μορφή

- Επέκταση μη-κανονικών όρων με την εισαγωγή εκφράσεων ισοδύναμων σε 0, για κάθε μεταβλητή x που λείπει: (xx′) = 0.
- Επιμεριστική ιδιότητα.
- Αφαίρεση διπλότυπων μεγιστόρων.
- Π.χ. f_1 (a, b, c) = (a + b + c) • (b′+ c′) • (a′+ c′)

Προσθέσαμε αα′ ββ′

aa′+ b′+ c′= (a′+ b′+ c′) (a′+ b′+ c′)

= (a + b + c) • (aa′+b′+ c) • (a′+ bb′+ c′)

= (a′+ b + c′) • (a + b′+ c′) • (a′+ b′+ c′) • (a′+ b + c′) • (a′+ b′+ c′)

=(a + b + c) • (a + b′+ c′) • (a′+ b′+ c′) • (a′+ b + c′)

Μετατροπή σε άθροισμα minterms

- Εκφράστε την $F = A + B'C$ ως $\sum$ (minterms)

$A + A (B + B') = AB + AB'$

(Λείπει το C)

$AB (C + C') + AB (C + C') = ABC +$

$ABC' + AB'C + AB'C'$

Ομοίως

$B'C = B'C (A + A') = B'CA + B'CA'$

Σύνολο:

$F = ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + AB'C + A'B'C$

$= m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$

Μετατροπή σε γινόμενο Maxterms

- Εκφράστε την $F = xy+x'z$ ώς $\prod$ (Maxterms)

$= (xy + x') (xy + z) = (x + x') (y + x') (x + z) (y + z)$

$= (x' + y) (x + z) (y + z)$

$x' + y = x'+ y + zz' = (x' + y + z) (x' + y + z')$

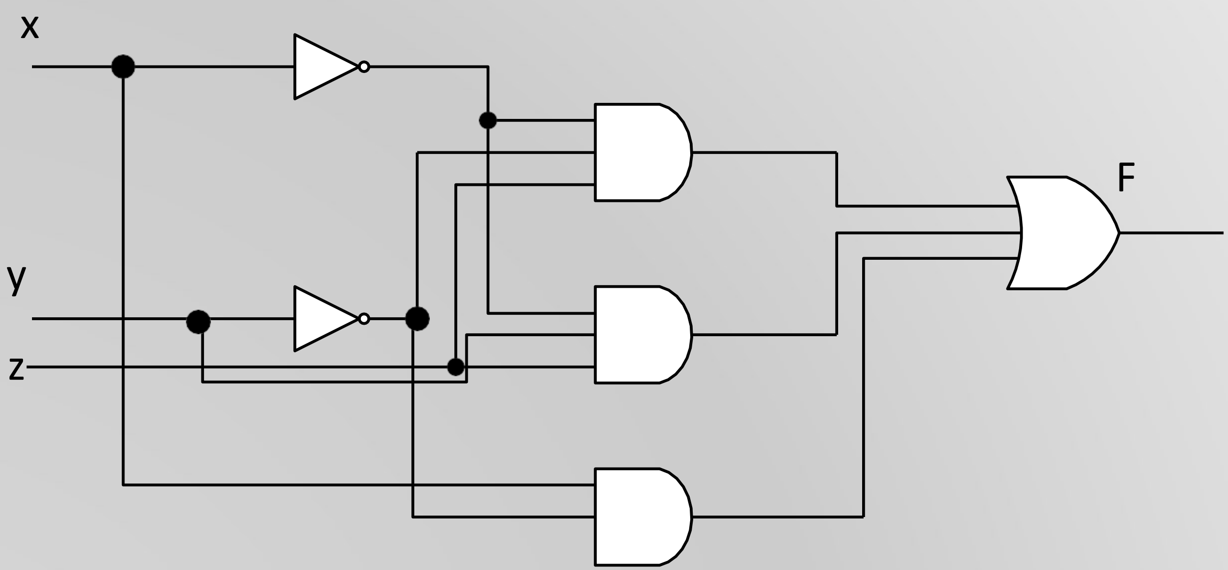
$x + z = x + z + yy' = (x + z + y) (x + z + y')$

$y + z = y + z + xx' = (x + y + z) (x' + z + y)$

Αν τα βάλουμε όλα μαζί…

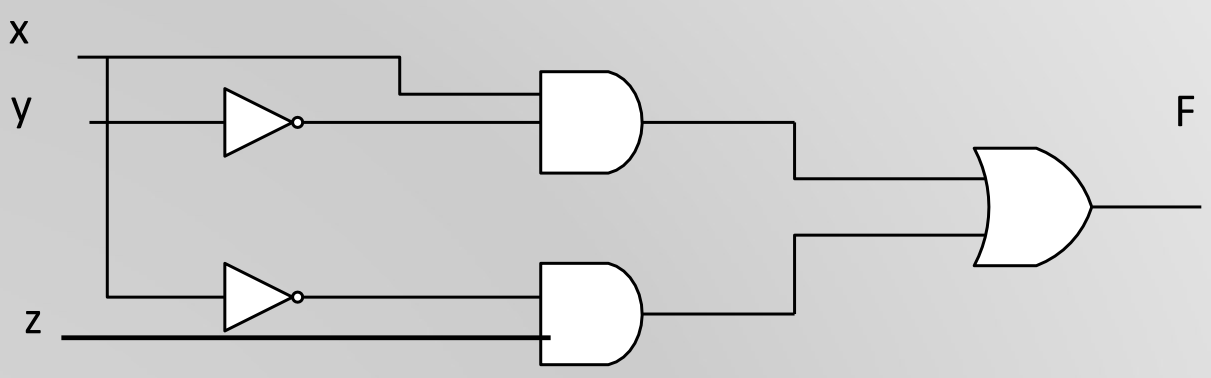
$M_0 * M_2 * M_4 * M_5 = \prod (0, 2, 4, 5)$

Υλοποίησης συνάρτησης (1)



F = x’y’z + x’yz + xy’

Υλοποίησης συνάρτησης (2)



$$F = xy' + x'z$$

Παράμετροι λογικών πυλών

- Ικανότητα οδήγησης (fanout): Πόσα τυπικά φορτία μπορεί να οδηγήσει.
- Τυπικό φορτίο (ποσό του ρεύματος που απαιτείται).
- Κατανάλωση ισχύος (power dissipation): ισχύς τροφοδοσίας για να λειτουργήσει.
- Καθυστέρηση διάδοσης (propagation delay). Μέσος χρόνος αλλαγής σήματος από είσοδο στην έξοδο.
- Περιθώριο θορύβου (noise margin): Ελάχιστη τάση εξωτερικού θορύβου που προκαλεί ανεπιθύμητη αλλαγή στην έξοδο.

Η αρχή του δυϊσμού

- Ο δυισμός (dual) μιας έκφρασης παράγεται με την ανταλλαγή (* και +) και (1 και 0) δεδομένου ότι η σειρά των πράξεων δεν αλλάζει.
- Δεν μπορεί να ανταλλαχθεί το x με x’.
- Παράδειγμα:
  - $F'(x, y, z) = x'yz' + x'y'z$
  - Ο δυϊσμός (dual) της F είναι
  - $F^{(\text{dual})} = (x' + y + z') + (x' + y' + z)$
- Το dual δεν ισούται πάντα με την αρχική έκφραση.
- Εάν μια λογική εξίσωση/ισότητα είναι έγκυρη, τότε το dual της είναι και αυτό έγκυρο.

Η αρχή του δυϊσμού (2)

- Βάση της αρχής του δυϊσμού, οι ιδιότητες/θεωρήματα 1-8 έχουν τις ακόλουθες σχέσεις:

1. $X + 0 = X$ 2. $X \cdot 1 = X$ (dual του 1)

3. $X + 1 = 1$ 4. $X \cdot 0 = 0$ (dual του 3)

5. $X + X = X$ 6. $X \cdot X = X$ (dual του 5)

7. $X + X' = 1$ 8. $X \cdot X' = 0$ (dual του 8)

Θεώρημα Απορρόφησης

1. $x + x \bullet y = x$
2. $x \bullet (x + y) = x$ (δυϊσμός του 1.)

- Απόδειξη:

$$
\begin{aligned}
x + x \bullet y &= x \bullet 1 + x \bullet y \\
&= x \bullet (1 + y) \\
&= x \bullet 1 \\
&= x
\end{aligned}
$$

Το 2 αληθές λόγω δυϊσμού από 1.

Θεώρημα ομοφωνίας

1. $xy + x'y + yz = xy + x'y$
2. $(x + y) \bullet (x' + z) \bullet (y + z) = (x + y) \bullet (x' + z)$ -- dual

- Απόδειξη:

$$xy + x'z + yz = xy + x'z = (x + x')\, yz$$
$$= xy + x'z + xyz + x'yz$$
$$= (xy + xyz) + (x'z + x'zy)$$
$$= xy + x'z$$

Το 2 αληθές λόγο δυϊσμού.

Τέλος Ενότητας