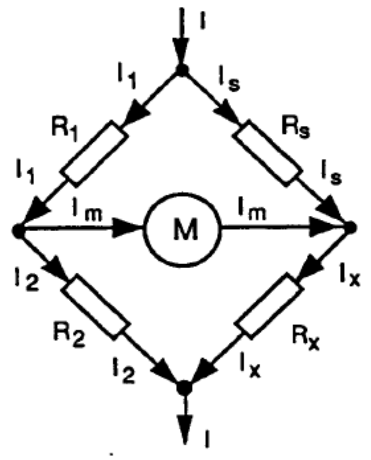


Εικ. Γ1

Χρησιμοποιώντας τον Κανόνα των Ρευμάτων του Kirchhoff, έχουμε:

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_S$$

$$\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_m + \mathrm{I}_2$$

$$\mathrm{I}_X = \mathrm{I}_S + \mathrm{I}_m$$

$$\mathrm{I}_S + \mathrm{I}_m = \mathrm{I}$$

Στην ισορροπία, $I_m = 0$ οπότε αυτές οι εξισώσεις απλοποιούνται σε:

$$\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_2$$

$$\mathrm{I}_S = \mathrm{I}_X.$$

Επίσης, στην ισορροπία, οι τάσεις είναι:

$$\mathrm{V}_{R1} = \mathrm{V}_{RS} \text{ και } \mathrm{V}_{R2} = \mathrm{V}_{Rx}$$

$$\mathrm{I}_{R1}\mathrm{R}_1 = \mathrm{I}_S\mathrm{R}_S \text{ και } \mathrm{I}_2\mathrm{R}_2 = \mathrm{I}_x\mathrm{R}_x$$

Διαιρώντας τις δυο εξισώσεις κατά μέλη, παίρνουμε:

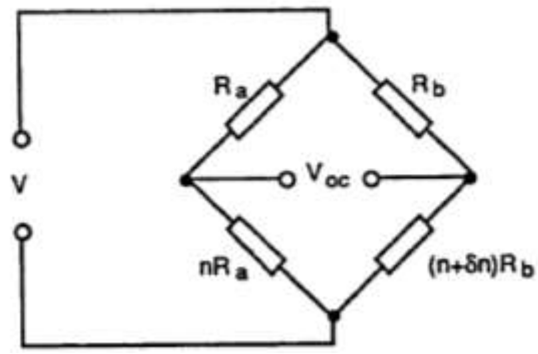
$$\frac{\mathrm{I}_1\mathrm{R}_1}{\mathrm{I}_2\mathrm{R}_2} = \frac{\mathrm{I}_S\mathrm{R}_S}{\mathrm{I}_X\mathrm{R}_X}$$

ή

$$\frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}_2} = \frac{\mathrm{R}_S}{\mathrm{R}_X}$$

Αυτή είναι η συνθήκη ισορροπίας μιας Γέφυρας Wheatstone.

Όταν η γέφυρα είναι εκτός ισορροπίας, θα υπάρχει ένα μη μηδενικό ρεύμα που θα διαρρέει το όργανο (I_m στην Εικ. Γ1). Η ανάλυση της εκτός ισορροπίας Γέφυρας Wheatstone είναι πιό σύνθετη αλλά θεωρήστε τη γέφυρα της Εικ. Γ2.



Εικ. Γ2

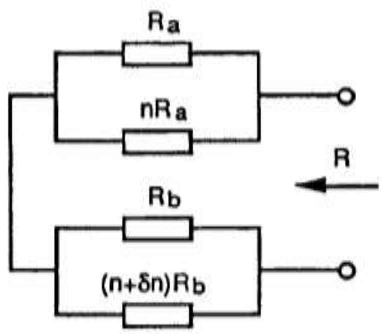
Θέλουμε να υπολογίσουμε το ρεύμα I στο φορτίο (που μπορεί να είναι ένα όργανο μέτρησης ή ένας ενισχυτής, κ.λ.π.) που αντιπροσωπεύεται από την αντίσταση R_L.

Οι αντιστάσεις R_a και nR_a είναι οι κλάδοι του λόγου της γέφυρας με λόγο n και η αντίσταση R_b είναι η πρότυπη αντίσταση.

Η άγνωστη αντίσταση είναι $(n+\delta n)R_b$ δηλώνοντας ότι δεν έχει την τιμή που θα ισορροπούσε τη γέφυρα καθώς διαφέρει από την τιμή ισορροπίας κατά δnR_b.

Για να βρούμε το ρεύμα I μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Thevenin.

Η αντίσταση της γέφυρας με την πηγή βραχυκυκλωμένη (αντίσταση Thevenin) μπορεί να βρεθεί καθώς το κύκλωμα ανάγεται στην Εικ. Γ3.



Εικ. Γ3

δηλαδή,

$$R = \frac{R_a \cdot nR_a}{R_a + nR_a} + \frac{R_b \cdot (n+\delta n)R_b}{R_b + (n+\delta n)R_b}$$

$$R = R_a\left(\frac{n}{1+n}\right) + R_b\left(\frac{n+\delta n}{1+n+\delta n}\right)$$

Η τάση ανοικτού κυκλώματος V_{OC} της γέφυρας (τάση Thevenin) μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τον τύπο του διαιρέτη τάσης.

Εικ. Γ4

Η τάση στα άκρα του αντιστάτη nR_a είναι:

$$V_{nRa} = \frac{nR_a}{R_a + nR_a} \cdot V$$

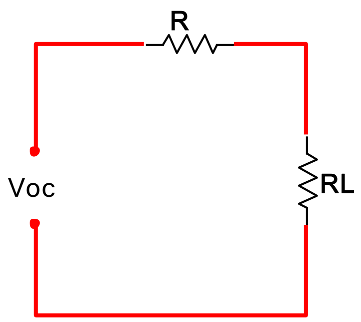
Η τάση στα άκρα του αντιστάτη $(n+\delta n)R_b$ είναι:

$$V_{(n+\delta n)}R_b = \frac{(n+\delta n)R_b}{R_b + (n+\delta n)R_b} \cdot V$$

και, επειδή, $V_{OC} = V_{nRa} - V_{(n+\delta n)Rb}$, παίρνουμε:

$$V_{OC} = \left(\frac{n}{1+n} - \frac{n+\delta n}{1+n+\delta n}\right) \cdot V$$

Οπότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα Thevenin[1], το κύκλωμα της γέφυρας (Εικ. Γ1) είναι ισοδύναμο με το κύκλωμα:



Από το νόμο του Ohm, γι'αυτό το κύκλωμα, έχουμε:

$$I = \frac{V_{OC}}{R + R_L}$$

και αντικαθιστώντας

$$I = \frac{\left(\frac{n}{1+n} - \frac{n+\delta n}{1+n+\delta n}\right)}{R_a\left(\frac{n}{1+n}\right) + R_b\left(\frac{n+\delta n}{1+n+\delta n}\right) + R_L} \cdot V$$

Η παραπάνω είναι μια μάλλον μπερδεμένη έκφραση και πολύ δύσχρηστη. Μπορεί, όμως, να απλοποιηθεί. Ας πούμε

$$\frac{n}{1+n} - \frac{n+\delta n}{1+n+\delta n} = \delta m$$

οπότε

$$\frac{n+\delta n}{1+n+\delta n} = \frac{n}{1+n} - \delta m$$

[1] βλ. Κεφ. 6 των σημειώσεων των παραδόσεων του μαθήματος ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΊΑ Ι.

Η παραπάνω έφραση για το ρεύμα γίνεται:

$$\mathrm{I} = \frac{\delta \mathrm{m}}{\mathrm{R_a}\left(\frac{\mathrm{n}}{1+\mathrm{n}}\right) + \mathrm{R_b}\left(\frac{\mathrm{n}}{1+\mathrm{n}} - \delta \mathrm{m}\right) + \mathrm{R_L}} \cdot \mathrm{V}$$

Τώρα,

$$\frac{\mathrm{n}}{1+\mathrm{n}} - \frac{\mathrm{n}+\delta\mathrm{n}}{1+\mathrm{n}+\delta\mathrm{n}} = \delta\mathrm{m}$$

$$\delta\mathrm{m} = \frac{\mathrm{n}(1+\mathrm{n}+\delta\mathrm{n}) - (1+\mathrm{n})(\mathrm{n}+\delta\mathrm{n})}{(1+\mathrm{n})(1+\mathrm{n}+\delta\mathrm{n})}$$

$$\delta\mathrm{m} = \frac{-\delta\mathrm{n}}{(1+\mathrm{n})(1+\mathrm{n}+\delta\mathrm{n})}$$

Τώρα, αν το $\delta\mathrm{n} << \mathrm{n}$, που είναι η περίπτωση της γέφυρας κοντά στην ισορροπία, τότε:

$$\delta\mathrm{m} = \frac{-\delta\mathrm{n}}{(1+\mathrm{n})^2}$$

Επομένως, η έκφραση για το ρεύμα γίνεται:

$$\mathrm{I} = \frac{\frac{-\mathrm{V}\cdot\delta\mathrm{n}}{(1+\mathrm{n})^2}}{\mathrm{R_a}\left(\frac{\mathrm{n}}{1+\mathrm{n}}\right) + \mathrm{R_b}\left(\frac{\mathrm{n}}{1+\mathrm{n}} + \frac{\delta\mathrm{n}}{(1+\mathrm{n})^2}\right) + \mathrm{R_L}}$$

$$= \frac{-\mathrm{V}\cdot\delta\mathrm{n}}{\mathrm{R_a}\ \mathrm{n}(1+\mathrm{n}) + \mathrm{R_b}\ [\mathrm{n}(1+\mathrm{n}) + \delta\mathrm{n}] + \mathrm{R_L}(1+\mathrm{n})^2}$$

Και πάλι, αν $\delta\mathrm{n} << \mathrm{n}$, αυτή απλοποιείται σε:

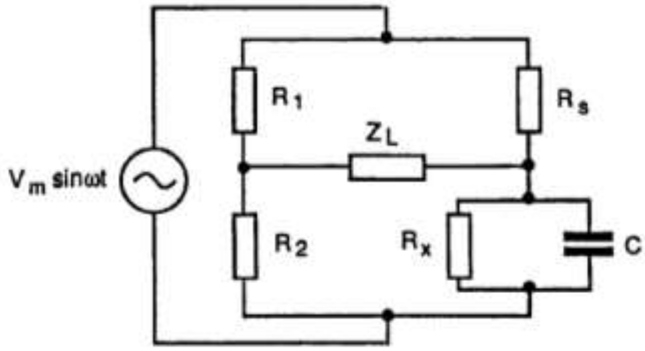
$$\mathrm{I} = \frac{-\mathrm{V}\cdot\delta\mathrm{n}}{\mathrm{n}(1+\mathrm{n})(\mathrm{R_a}+\mathrm{R_b}) + (1+\mathrm{n})^2\ \mathrm{R_L}}$$

Αυτή είναι η εξίσωση για το ρεύμα σε μια εκτός ισορροπίας Γέφυρα Wheatstone.

Παρασιτικές Αντιδράσεις (Reactive Strays)

Όταν το κύκλωμα της γέφυρας Wheatstone χρησιμοποιείται στο ac, είναι πιθανόν να υπάρχουν κάποιες παρασιτικές αντιδράσεις, για παράδειγμα, ο άγνωστος κλάδος μπορεί να έχει σημαντική παρασιτική χωρητικότητα. Οι παρασιτικές αυτές αντιδράσεις δημιουργούν σφάλματα καθώς μεταβάλλουν το σημείο ισορροπίας της γέφυρας αν δεν αντισταθμιστούν από μια άλλη ίση αντίδραση στον απέναντι κλάδο της γέφυρας.

Θεωρήστε το κύκλωμα της Εικ. Γ5.



Εικ. Γ5

Εδώ, η χωρητικότητα C παριστάνει την παρασιτική χωρητικότητα της άγνωστης αντίστασης R_X, η οποία δεν μπορεί να αντισταθμιστεί από την καθαρή αντίσταση της πρότυπης R_S.

Η τάση στα άκρα της R_S είναι (από τον τύπο του διαιρέτη τάσης):

$$R_S = V_m \sin\omega t \frac{R_S}{R_S + R_X//Z_C}$$

και η τάση στα άκρα της R_1 είναι:

$$V_{R1} = V_m \sin\omega t \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Οπότε, η τάση στα άκρα του φορτίου, $V_{ZL} = V_{RS} - V_{R1}$, θα δίνεται από την:

$$V_{Z_L} = V_m \sin\omega t \left(\frac{R_S}{R_S + R_X//Z_C} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$$