



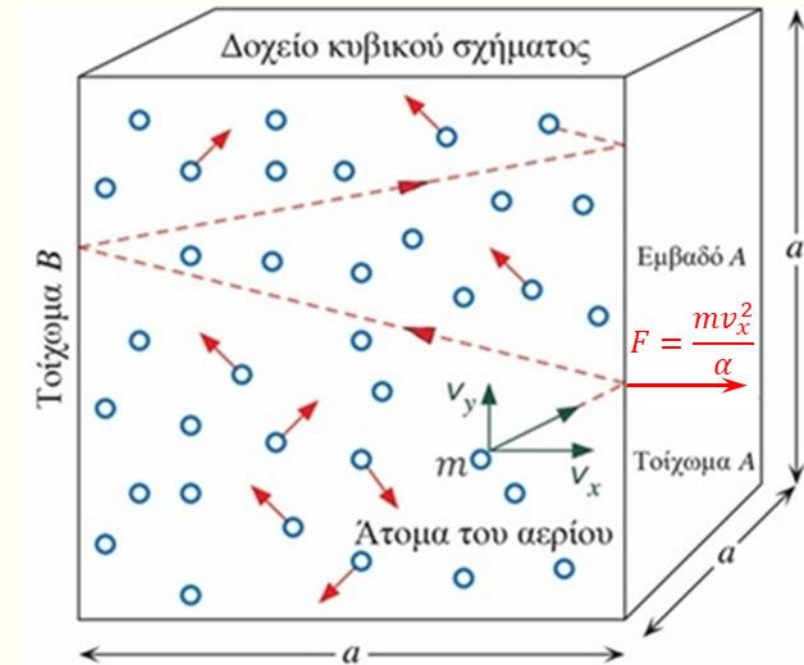
# ΜΟΡΙΑΚΗ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΥΛΗΣ

Θεωρία της κλασικής φυσικής που εξηγεί με απλότητα ένα ευρύ φάσμα φαινομένων: από την πίεση και θερμοχωρητικότητα αερίων και μετάλλων ως τη μέση ταχύτητα ηλεκτρονίων σε ημιαγωγό και τον ηλεκτρικό θόρυβο.

- **Μέση Κινητική Ενέργεια και Θερμοκρασία**
- **Θερμική Διαστολή**
- **Μοριακή Ταχύτητα και Κατανομή Ενέργειας (Boltzmann)**

# Μέση Κινητική Ενέργεια και Θερμοκρασία

- Τα μόρια ενός αερίου βρίσκονται σε διαρκή τυχαία κίνηση μέσα στο δοχείο\*
- Έστω δοχείο κυβικού σχήματος όγκου  $\alpha^3$  περιέχει  $N$  μόρια (εικ.). Η ταχύτητα ενός μορίου μάζας  $m$  κινούμενου προς το τοίχωμα εμβαδού  $A$  αναλύεται σε δύο συνιστώσες,  $v_x$  και  $v_y$
- Μεταβολή ορμής μορίου από την απόλυτα ελαστική\* κρούση με το τοίχωμα:  $\Delta p = 2mv_x$
- Στη συνέχεια, το μόριο κινείται αντίθετα, συγκρούεται με το τοίχωμα  $B$ , επιστρέφει και στο τοίχωμα εμβαδού  $A$
- Χρόνος ελεύθερης\* κίνησης μεταξύ διαδοχικών συγκρούσεων με το τοίχωμα  $A$ :  $\Delta t = \frac{2\alpha}{v_x}$
- Επομένως, η δύναμη που ασκείται από ένα μόριο στο τοίχωμα είναι



$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{2\alpha/v_x} = \frac{mv_x^2}{\alpha}$$

\* Παραδοχή της μοριακής κινητικής θεωρίας

## Μέση Κινητική Ενέργεια και Θερμοκρασία (συνέχεια)

- Συνολική πίεση που ασκείται από τα  $N$  μόρια στο τοίχωμα  $A$ :

$$P = \frac{\sum_i F_i}{a^2} = \frac{\sum_i m v_{xi}^2}{a^3} = \frac{Nm \overline{v_x^2}}{V}$$
$$P = \frac{Nm \overline{v_x^2}}{V}$$

όπου,  $\overline{v_x^2}$  η μέση τετραγωνική ταχύτητα των μορίων

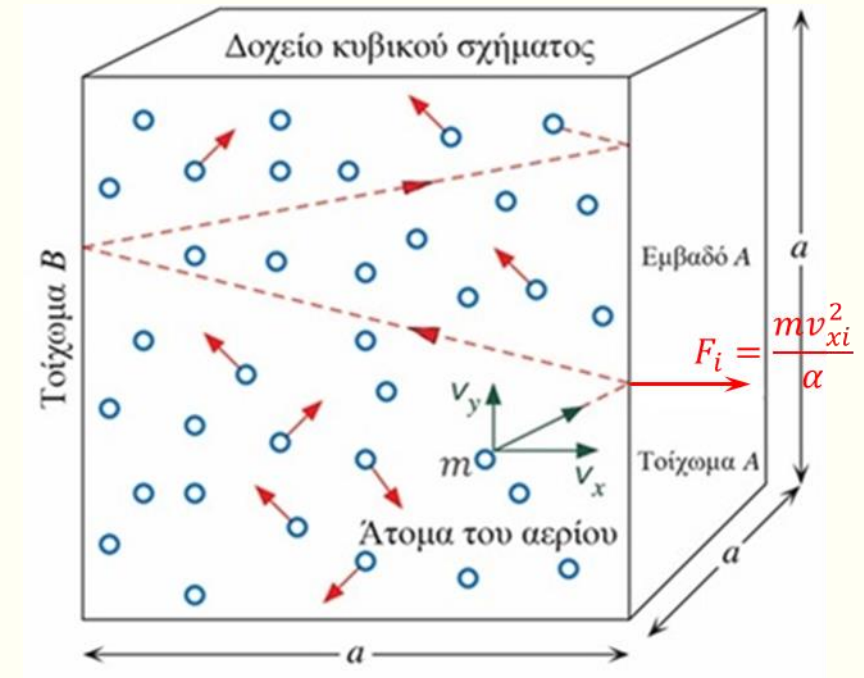
- Δεδομένου ότι τα μόρια κινούνται τυχαία στις 3 διευθύνσεις

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$
$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_x^2}$$

- Η πίεση αερίου στην κινητική θεωρία γράφεται

$$P = \frac{Nm \overline{v^2}}{3V} = \frac{1}{3} \left( \frac{Nm}{V} \right) \overline{v^2} = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2}$$

όπου,  $\rho = \frac{Nm}{V}$  η πυκνότητα του αερίου



## Μέση Κινητική Ενέργεια και Θερμοκρασία (συνέχεια)

---

- Εξάρτηση του μεγέθους  $PV^*$  από τη μέση κινητική ενέργεια των μορίων

$$P = \frac{Nm\overline{v^2}}{3V} \Rightarrow PV = \frac{2}{3}N \left( \frac{1}{2}m\overline{v^2} \right) = \frac{2}{3}N \cdot \overline{KE} \quad (1)$$

όπου,  $\overline{KE} = \frac{1}{2}m\overline{v^2}$  η μέση κινητική ενέργεια ανά μόριο

- Από την εμπειρική (πειραματική) **εξίσωση των (τέλειων) αερίων**, έχουμε  $PV = \left( \frac{N}{N_A} \right) RT \quad (2)$

όπου,  $R = 8.3145 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$  η παγκόσμια σταθερά των αερίων

- Από (1) και (2) προκύπτει η **εξάρτηση της μέσης κινητικής ενέργειας των μορίων από την (απόλυτη) θερμοκρασία**

$$\overline{KE} = \frac{3}{2} \left( \frac{R}{N_A} \right) T \Rightarrow \overline{KE} = \frac{3}{2} kT$$

όπου,  $k = R/N_A = 1.3807 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$  η **σταθερά Boltzmann**

\*Το μέγεθος  $PV$  έχει διαστάσεις ενέργειας. Γιατί;

## Η θερμοχωρητικότητα στη Μοριακή Κινητική Θεωρία

---

- Η εσωτερική ενέργεια 1 mol μονοατομικού(;;;) αερίου είναι

$$U = N_A \cdot \overline{KE} = N_A \left( \frac{3}{2} kT \right) = \frac{3}{2} N_A kT \quad (1)$$

- Δεδομένου ότι η **θερμοχωρητικότητα** (heat capacity),  $C$ , γενικά, ορίζεται σαν η αύξηση της εσωτερικής ενέργειας ανά μονάδα θερμοκρασίας

η **μοριακή θερμοχωρητικότητα** (molar heat capacity),  $C_m$ , δηλαδή, η θερμοχωρητικότητα ενός mole του υλικού είναι

$$C_m = \frac{dU}{dT}$$

- Από την (1), η **μοριακή θερμοχωρητικότητα μονοατομικού αερίου σε σταθερό όγκο\*** προκύπτει

$$C_m = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2} N_A k = \frac{3}{2} R$$

# Ισοκατανομή της ενέργειας - Η αρχή Maxwell

---

- **Αρχή του Maxwell για την ισοκατανομή της ενέργειας** (Maxwell's principle of equipartition of energy):

Στην έκφραση για τη συνολική εσωτερική ενέργεια ενός συστήματος, σε κάθε ανεξάρτητο όρο του αθροίσματος αντιστοιχεί μέση ενέργεια  $\frac{1}{2} kT$

- Κάθε όρος στο άθροισμα της ενέργειας αντιστοιχεί σε ένα ανεξάρτητο τρόπο κίνησης\* του μορίου (με τον οποίο το μόριο του συστήματος μπορεί να απορροφήσει ενέργεια).

\*Ανεξάρτητος τρόπος κίνησης ή **βαθμός ελευθερίας** (degree of freedom) του μορίου

# Ισοκατανομή της ενέργειας - Η αρχή Maxwell (συνέχεια)

## Θερμοχωρητικότητα διατομικού αερίου

Ένα άκαμπτο διατομικό μόριο αερίου (π.χ.,  $O_2$ ) μπορεί να έχει μεταφορική και περιστροφική κινητική ενέργεια. Η έκφραση της συνολικής του ενέργειας είναι

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_z\omega_z^2$$

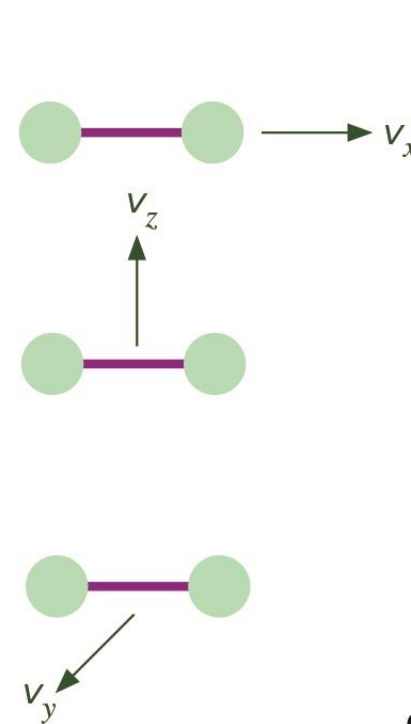
(5 βαθμοί ελευθερίας)

Επομένως, 1 mole αερίου  $O_2$  έχει εσωτερική ενέργεια

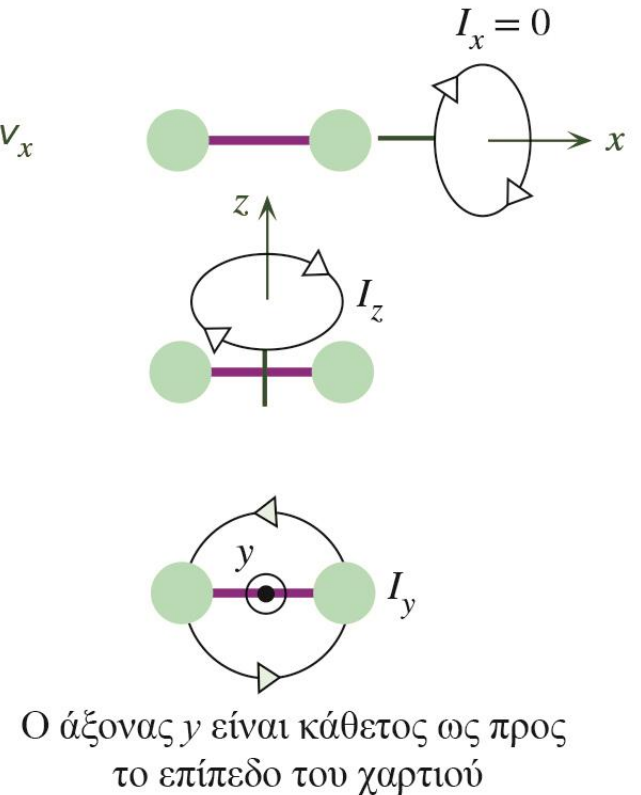
$$U = N_A \left( \frac{5}{2} kT \right) = \frac{5}{2} RT$$

και η μοριακή θερμοχωρητικότητά του είναι  $\frac{5}{2}R$

Κίνηση μετατόπισης



Κίνηση περιστροφής



# Ισοκατανομή της ενέργειας - Η αρχή Maxwell(συνέχεια)

## Θερμοχωρητικότητα κρυσταλλικού στερεού

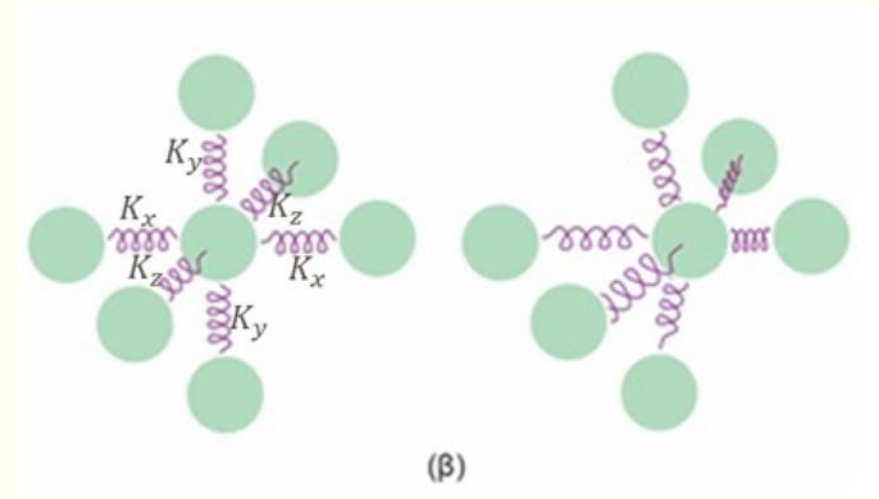
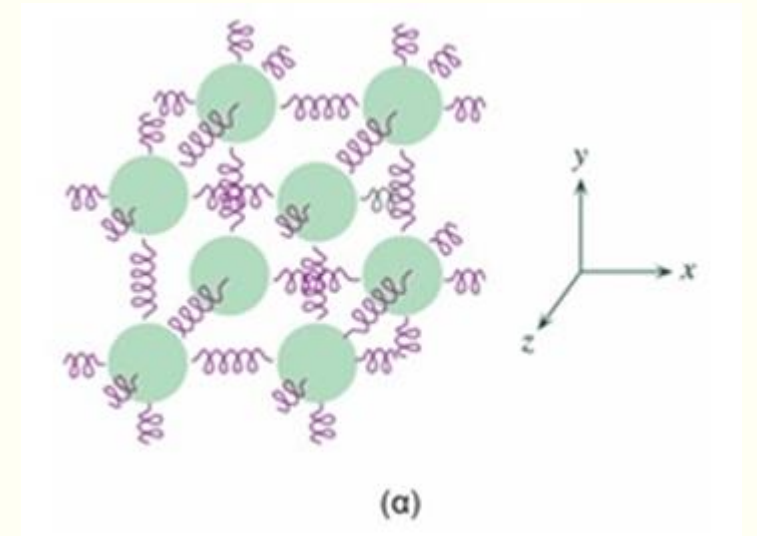
Σε ένα στερεό, τα άτομα συνδέονται μεταξύ τους μέσω δεσμών που θα μπορούσαν να αντιπροσωπευτούν με ελατήρα, εικ. (α)

Κάθε άτομο ταλαντώνεται γύρω από τη θέση ισορροπίας του, εικ. (β).

Η ενέργεια ταλάντωσης (κινητική και δυναμική) στις 3 διευθύνσεις  $x, y, z$  γράφεται

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}K_x x^2 + \frac{1}{2}K_y y^2 + \frac{1}{2}K_z z^2$$

(6 βαθμοί ελευθερίας)



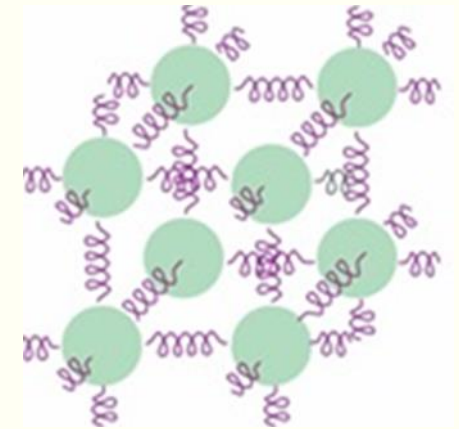


---

## Θερμοχωρητικότητα κρυσταλλικού στερεού (συνέχεια)

Οι 6 βαθμοί ελευθερίας ανά άτομο συνεπάγονται εσωτερική ενέργεια ανά mole κρυσταλλικού στερεού

$$U = N_A 6 \left( \frac{1}{2} kT \right) = 3RT$$



Η μοριακή θερμοχωρητικότητα σε σταθερό όγκο γίνεται (Κανόνας Dulong-Petit)

$$C_m = \frac{dU}{dT} = 3R = 25 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

Table of specific heat capacities at 25 °C (298 K)	
Substance	Molar heat capacity, J/(mol·K)
<a href="#">Aluminium</a>	24.2
<a href="#">Antimony</a>	25.2
<a href="#">Argon</a>	20.7862
<a href="#">Arsenic</a>	24.6
<a href="#">Bismuth</a> <sup>[3]</sup>	25.7
<a href="#">Cadmium</a>	26.02
<a href="#">Chromium</a>	23.35
<a href="#">Copper</a>	24.47
<a href="#">Gold</a>	25.42
<a href="#">Helium</a>	20.7862
<a href="#">Iron</a>	<a href="#">25.09</a>
<a href="#">Lead</a>	26.4
<a href="#">Lithium</a>	24.8
<a href="#">Magnesium</a>	24.9
<a href="#">Neon</a>	20.7862
<a href="#">Zinc</a> <sup>[3]</sup>	25.2

*[https://en.wikipedia.org/wiki/Table\\_of\\_specific\\_heat\\_capacities](https://en.wikipedia.org/wiki/Table_of_specific_heat_capacities)*

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.6

(α) Να υπολογιστεί η μέση ταχύτητα των μορίων  $N_2$  στον αέρα θερμοκρασίας  $27^\circ\text{C}$

### ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Από την κινητική θεωρία ξέρουμε

$$\overline{KE} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{3}{2}kT$$

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Η ατομική μάζα του αζώτου είναι  $M_{at} = 14 \text{ g/mol}$ , οπότε η μάζα  $m$  του μορίου είναι

$$m = \frac{2M_{at}}{N_A} \text{ (σε g)} = \frac{2M_{at}(10^{-3})}{N_A} \text{ (σε kg)}$$

Συνεπώς

$$v = \sqrt{\frac{3kN_A T}{2M_{at}(10^{-3})}} = \sqrt{\frac{3RT}{2M_{at}(10^{-3})}}$$

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{2M_{at}(10^{-3})}}$$

$$= \sqrt{\frac{3(8.314 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1})(300\text{K})}{2(14 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1})}} = 517 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή της  $x$  συνιστώσας της ταχύτητας των μορίων. Να συγκριθεί με την ταχύτητα του ήχου ( $\sim 350 \text{ m/s}$ ). Πως εξηγείται η διαφορά;

### ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 3v_x^2 \Rightarrow v_x = \frac{v}{\sqrt{3}} = \frac{517 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\sqrt{3}} \cong 300 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Τιμή λίγο μικρότερη της ταχύτητας του ήχου.
- Η διαφορά οφείλεται στο γεγονός ότι ο ήχος (διαμήκες κύμα) είναι μη ισόθερμη διαδικασία καθώς περιλαμβάνει σε κάθε σημείο διαδοχικές συμπιέσεις-αποσυμπιέσεις.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.7

Η ατομική μάζα του  $Cu$  είναι  $M_{at} = 63.6 \text{ g/mol}$ . Να υπολογιστεί η ειδική θερμοχωρητικότητα του ανά γραμμάριο και να συγκριθεί με την πειραματική τιμή  $0.387 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

### ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Από τον κανόνα Dulong-Petit

$$C_m = 3R = 25 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$$

Δεδομένου ότι  $1 \text{ mol Cu} = 63.6 \text{ g}$ , η ειδική θερμοχωρητικότητα είναι

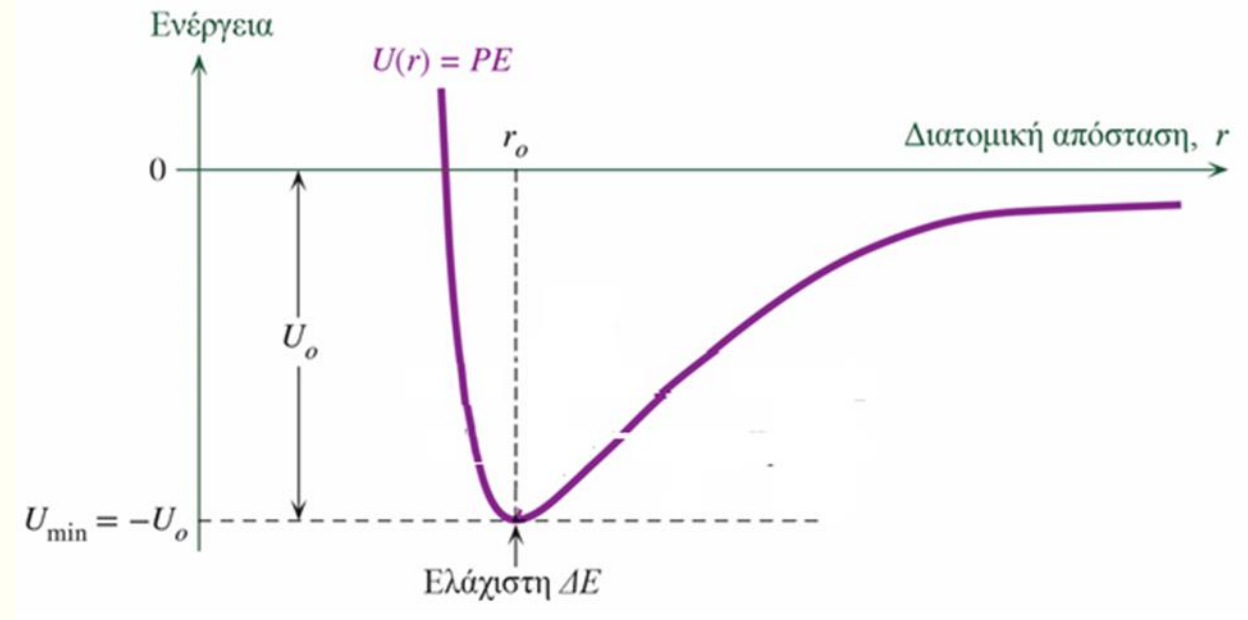
$$C_s = 25 \frac{\text{J}}{(63.6 \text{ g}) \text{ K}} = 0.393 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

- Η υπολογισμένη τιμή είναι πολύ κοντά στην πραγματική-πειραματική.
- Γενικά, ο κανόνας Dulong-Petit δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για όλα τα μέταλλα σε θερμοκρασία δωματίου.
- Αποτυγχάνει στους ημιαγωγούς (π.χ.  $Si$ ) και σε υψηλές θερμοκρασίες (απαιτείται προσέγγιση με την κβαντική φυσική)

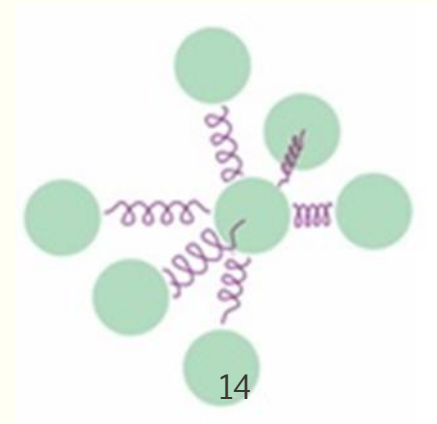
# Θερμική Διαστολή

- Είναι η μεταβολή (αύξηση) του όγκου με τη θερμοκρασία. Το φαινόμενο οφείλεται (εικ.)

- στην ασύμμετρη φύση των διατομικών δυνάμεων
- στην αύξηση του πλάτους των ατομικών ταλαντώσεων με τη θερμοκρασία



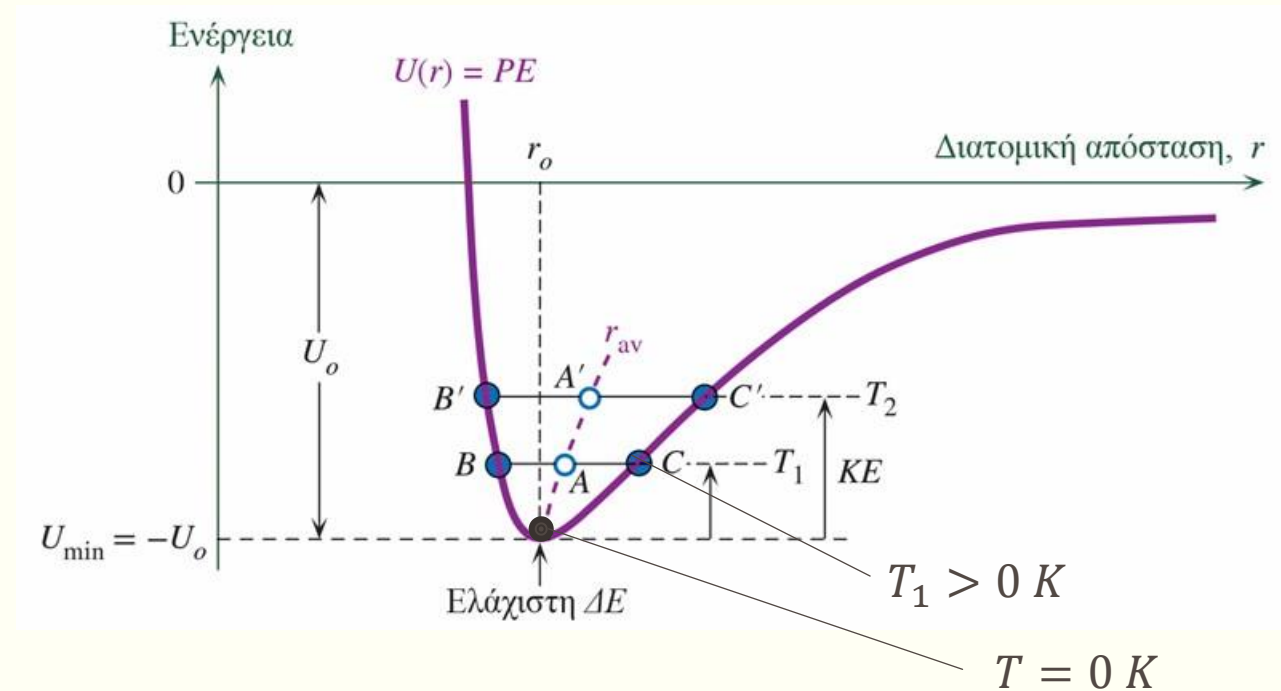
- Για  $T = 0\text{ K}$  (απόλυτο μηδέν),
  - $KE = 0$  και  $PE = U_{\min} = -U_0$
  - Η ολική ενέργεια του δεσμού είναι  $E = U + KE = -U_0$
  - Απόσταση ανάμεσα στα άτομα σταθερή  $r_0$  (άτομα ακίνητα)



## Θερμική Διαστολή (συνέχεια)

- Σε θερμοκρασία  $T_1$ , τα άτομα ταλαντώνονται μεταξύ  $B$  και  $C$  (εικ.)
- Η συνολική ενέργεια είναι
  - $E = U_B$  ή  $U_C$  στα άκρα  $B$  και  $C$
  - $E = KE$  στο κέντρο  $A$
- Η μέση απόσταση των ατόμων αντιστοιχεί στο σημείο  $A'$  (εικ.)

$$r_{av} = r_A = \frac{1}{2}(r_B + r_C) > r_o$$



- Αν η καμπύλη  $PE$  ήταν συμμετρική, δεν θα υπήρχε θερμική διαστολή

# Συντελεστής Θερμικής Διαστολής

---

- **Συντελεστής (γραμμικής) θερμικής διαστολής** (thermal expansion coefficient) = ποσοστιαία μεταβολή του μήκους ανά μονάδα θερμοκρασίας

$$\lambda = \frac{1}{L_0} \cdot \frac{\delta L}{\delta T}$$

όπου,  $L_0$  το αρχικό μήκος,  $\delta L$  η μεταβολή του μήκους σε μεταβολή θερμοκρασίας  $\delta T$

- **Θερμική διαστολή**

$$L = L_0[1 + \lambda(T - T_0)]$$

όπου,  $L_0$  το αρχικό μήκος σε θερμοκρασίας  $T_0$ ,  $L$  το τελικό μήκος σε θερμοκρασία  $T$



## Εξάρτηση του Συντελεστή Θερμικής Διαστολής από τη Θερμοκρασία

- Ο συντελεστής θερμικής διαστολής εξαρτάται από (αυξάνει με) τη θερμοκρασία,  
 $\lambda = \lambda(T)$
- Υπολογισμός διαστολής από  $T_o$  ως  $T$

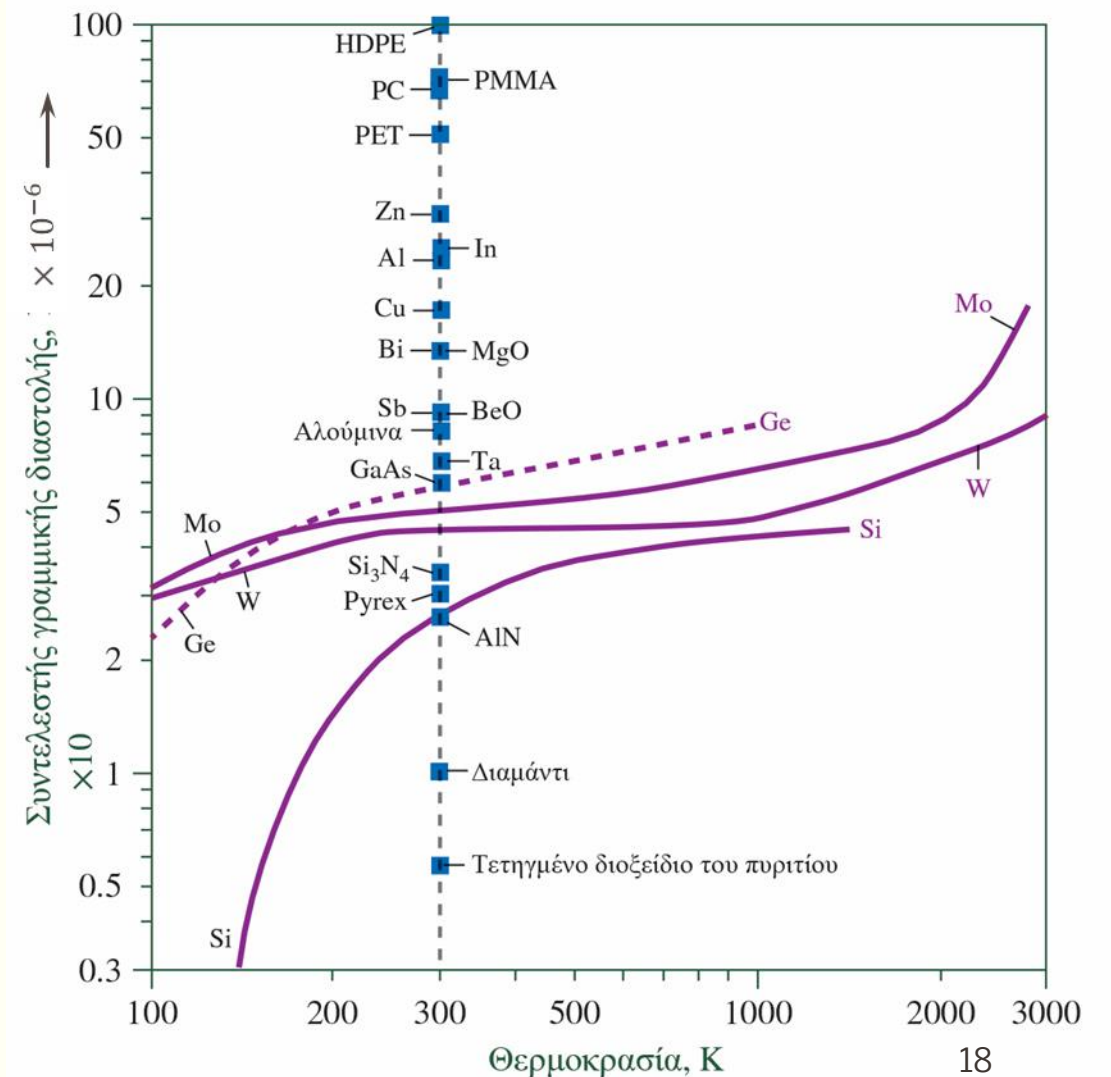
$$L = L_o [1 + \bar{\lambda}(T - T_o)]$$

όπου,  $\bar{\lambda}$  ο μέσος συντελεστής θερμικής διαστολής θερμοκρασιακό διάστημα  $(T_o, T)$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{(T - T_o)} \int_{T_o}^T \lambda(T) dT$$

# Θερμοκρασιακή εξάρτηση του $\lambda$ για διάφορα υλικά

- Για τα περισσότερα **μέταλλα**, για  $100\text{ K} < T < T_{MP}$  ( $T_{MP}$  = σημείο τήξης), το  $\lambda$  **δεν εξαρτάται ισχυρά** από την  $T$
- HDPE: υψηλής πυκνότητας πολυαιθυλένιο
- PMMA: ακρυλικό
- PC: πολυανθρακικό πολυμερές
- PET: πολυεστέρας (Poly Ethylene Terephthalate)



## Χωρική Διαστολή Στερεού

---

- Η μεταβολή του όγκου ενός στερεού από  $V_0$  σε  $V$ , λόγω αύξησης της θερμοκρασίας από  $T_0$  σε  $T$ , περιγράφεται από τη σχέση **χωρικής διαστολής**

$$V = V_0[1 + \alpha_V(T - T_0)]$$

όπου,  $\alpha_V$  είναι ο **συντελεστής χωρικής διαστολής του στερεού**.

- Αποδεικνύεται ότι με μεγάλη ακρίβεια  $\alpha_V = 3\lambda$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.8

Συντελεστής θερμικής διαστολής  $Si$  στο διάστημα θερμοκρασιών  $120 - 1500 K$  (Okada & Tokumaru, 1984)

$$\lambda = 3.725 \times 10^{-6} [1 - e^{-5.88 \times 10^{-3}(T-124)}] + 5.548 \times 10^{-10} T$$

όπου,  $\lambda$  σε  $K^{-1}$  (ή  $^{\circ}C^{-1}$ ) και η θερμοκρασία  $T$  σε *kelvin*.

Να υπολογιστεί η ποσοστιαία διαστολή  $\frac{\Delta L}{L_o}$  στο διάστημα θερμοκρασιών  $20 - 320^{\circ}C$  υποθέτοντας σταθερό  $\lambda$  ίσο με την τιμή σε θερμοκρασία δωματίου

### ΛΥΣΗ

Σε θερμοκρασία δωματίου ( $20^{\circ}C$ ),

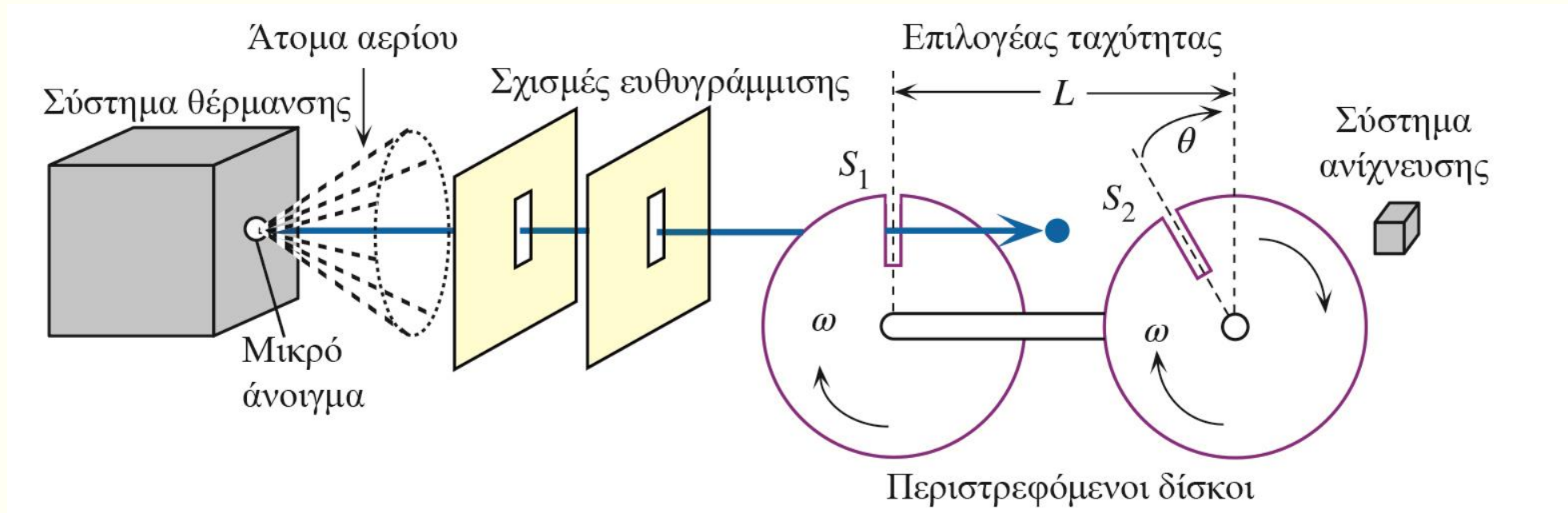
$$\lambda = 3.725 \times 10^{-6} [1 - e^{-5.88 \times 10^{-3}(293-124)}] + 5.548 \times 10^{-10}(293) = 2.51 \times 10^{-6} K^{-1}$$

Για σταθερό  $\lambda = 2.51 \times 10^{-6} K^{-1}$

$$\frac{\Delta L}{L_o} = \lambda(T - T_o) = (2.51 \times 10^{-6} C^{-1})(320 - 20) = 0.753 \times 10^{-3} \text{ ή } 0.075\%$$

# Μοριακή Ταχύτητα και Κατανομή Ενέργειας

- Η κινητική θεωρία επιτρέπει τον υπολογισμό της μέσης τιμής της ταχύτητας των μορίων ενός αερίου
- δεν μας λέει τίποτα για την κατανομή των ταχυτήτων
- Πείραμα Stern για τη μέτρηση της κατανομής των μοριακών ταχυτήτων



# Συνάρτηση Κατανομής Maxwell-Boltzmann

---

- Αν σε ένα αέριο με συνολικό αριθμό  $N$  μορίων, ορίσουμε  $dN$  το πλήθος (αριθμό) των μορίων με ταχύτητες μεταξύ  $v$  και  $v + dv$ ,

το κλάσμα  $\frac{dN}{dv}$ , που καλείται **συνάρτηση πυκνότητας ταχύτητας (velocity density function)**  $n_v$ , εκφράζει τον αριθμό μορίων ανά μονάδα ταχύτητας

$$n_v(v) = \frac{dN}{dv}$$

- Με πειράματα τύπου Stern, προέκυψε η **συνάρτηση κατανομής Maxwell-Boltzmann για τις μοριακές ταχύτητες ενός αερίου σε θερμική ισορροπία σε θερμοκρασία  $T$**

$$n_v = 4\pi N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\left( \frac{mv^2}{2kT} \right)}$$

$m$  η μοριακή μάζα.

$$\int_{v=0}^{\infty} n_v dv = ???$$

# Συνάρτηση Κατανομής Maxwell-Boltzmann (συνέχεια)

- Εικ., κατανομή Maxwell-Boltzmann των μοριακών ταχυτήτων για αέριο  $N_2$  σε δύο θερμοκρασίες.
- Η τεταγμένη (κατακόρυφος άξονας) αντιστοιχεί στο μέγεθος

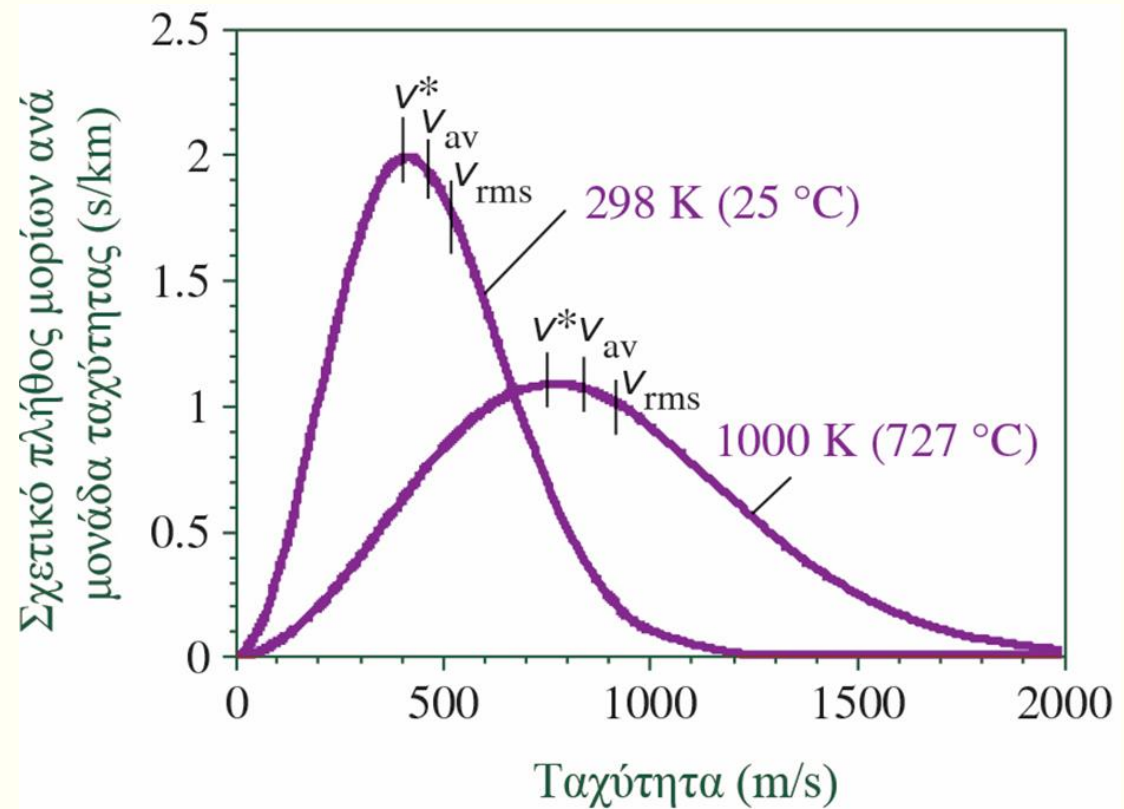
$$\frac{n_v}{N} = \frac{dN/N}{dv}$$

το ποσοστιαίο πλήθος των μορίων ανά μονάδα διαστήματος ταχύτητας σε  $(\text{km/s})^{-1}$

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ:** Αποδείξτε ότι  $\frac{1}{N} \int_{v=0}^{\infty} n_v dv = 1$

Δηλαδή,  $\frac{n_v}{N}$  αντιπροσωπεύει τη πιθανότητα η ταχύτητα ενός μορίου να έχει τιμή  $v$ . Η ολική πιθανότητα η μοριακή ταχύτητα να έχει οποιαδήποτε τιμή  $(0, \infty)$  είναι

$$\frac{1}{N} \int_{v=0}^{\infty} n_v dv = 1 \text{ (100\%)}$$



# Συνάρτηση Κατανομής Maxwell-Boltzmann (συνέχεια)

- $v^*$  η πιθανότερη τιμή της ταχύτητας,

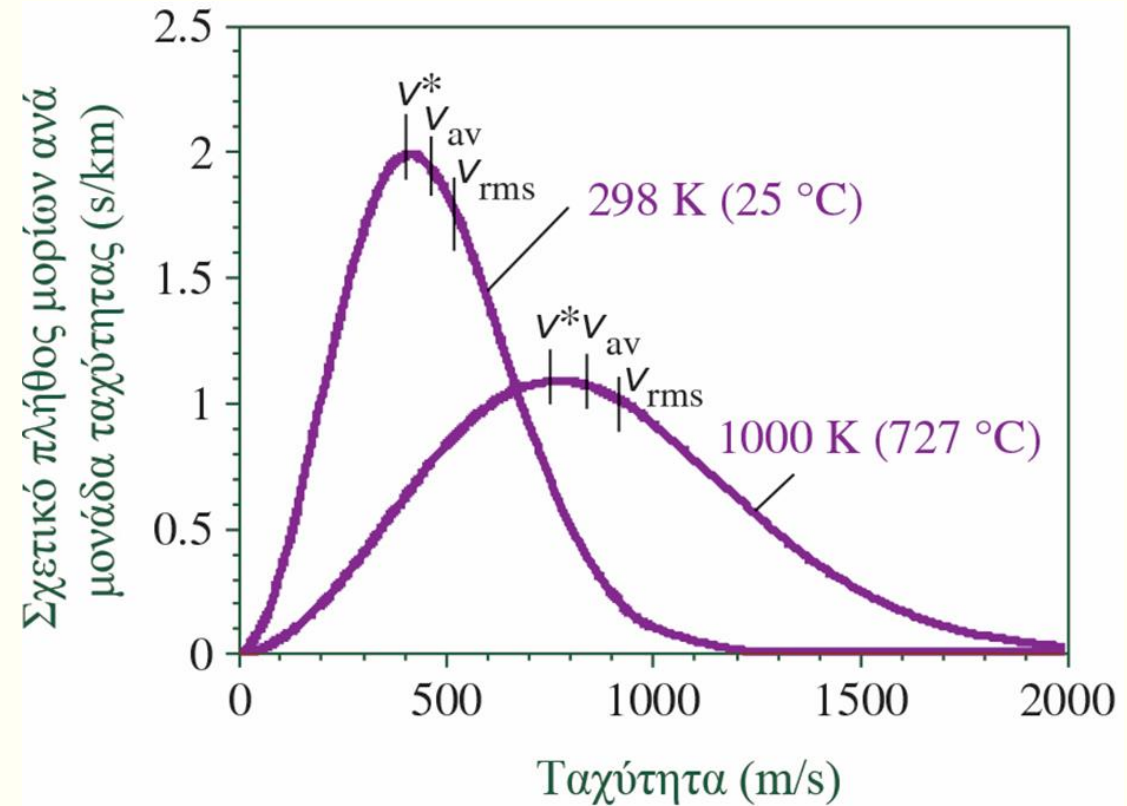
$$n_v(v^*) = \max$$

- $v_{av}$  η μέση τιμή της ταχύτητας

$$v_{av} = \frac{1}{N} \int_{v=0}^{\infty} v n_v dv$$

- $v_{rms}$  η ενεργός τιμή της ταχύτητας

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \int_{v=0}^{\infty} v^2 n_v dv}$$





## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.9

Με βάση το νόμο Maxwell-Boltzmann, για την κατανομή ταχυτήτων των μορίων ενός αερίου, να βρεθούν εκφράσεις για τις τιμές  $v^*$ ,  $v_{av}$  και  $v_{rms}$ . Να υπολογιστούν οι αντίστοιχες τιμές για ένα αέριο μη-αλληλεπιδρώντων ηλεκτρονίων.

ΛΥΣΗ

Μέση τιμή της ταχύτητας  $v_{av} = \frac{1}{N} \int_{v=0}^{\infty} v n_v dv$

Αντικαθιστώντας από το νόμο Maxwell-Boltzmann  $n_v = 4\pi N \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} v^2 e^{-\alpha v^2}$ , όπου  $\alpha = \frac{m}{2kT}$

$$\begin{aligned} v_{av} &= 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_{v=0}^{\infty} v^3 e^{-\alpha v^2} dv^* \\ &= 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \left(-\frac{1}{2\alpha}\right) \int_{v=0}^{\infty} v^2 \cdot de^{-\alpha v^2} \\ &= -2 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{2\alpha^2} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \end{aligned}$$

$$* \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{k!}{2\alpha^{k+1}}, \quad n = 2k + 1$$

ΛΥΣΗ (λύση)

rms τιμή της ταχύτητας  $v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}}$

$$\overline{v^2} = \frac{1}{N} \int_{v=0}^{\infty} v^2 n_v dv$$

Αντικαθιστώντας το  $n_v$  από το νόμο Maxwell-Boltzmann

$$\begin{aligned} \overline{v^2} &= 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_{v=0}^{\infty} v^4 e^{-\alpha v^2} dv \quad * \\ &= 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{3}{2^3 \alpha^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \frac{3kT}{m} \end{aligned}$$

οπότε,

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

$$* \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1} \alpha^k} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad n = 2k$$

## ΛΥΣΗ (λύση)

Για τον υπολογισμό της *πιθανότερης τιμής της ταχύτητας*,  $v^*$ , παραγωγίζουμε την  $n_v$  ως προς  $v$  και θέτουμε την παράγωγο ίση με μηδέν.

Βρίσκουμε (πως;)

$$v^* = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Για ένα αέριο μη-αλληλεπιδρώντων ηλεκτρονίων, θέτοντας  $m = 9.1 \times 10^{-31} kg$  και  $T = 300 K$ , βρίσκουμε

$$v^* = 95.3 \text{ km/s}$$

$$v_{av} = \sqrt{8kT/\pi m} = 108 \text{ km/s} \text{ (θερμική ταχύτητα - thermal velocity ηλεκτρονίων)}$$

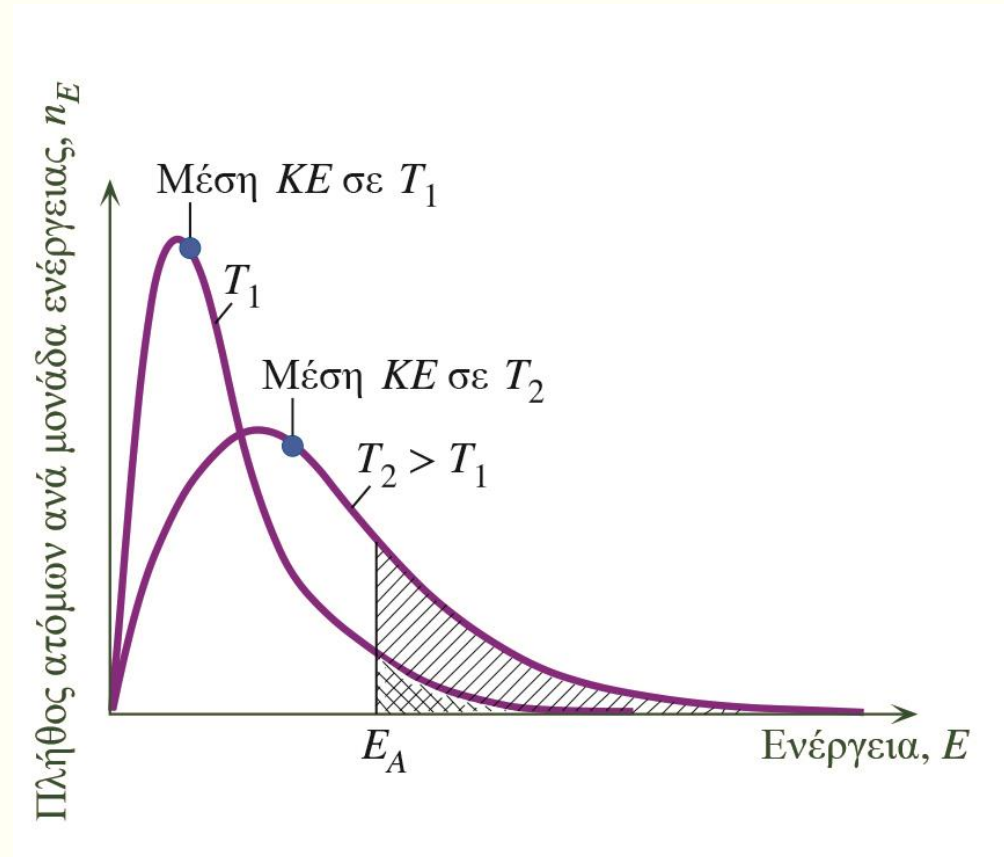
$$v_{rms} = \sqrt{3kT/m} = 117 \text{ km/s}$$

# Ενεργειακή Κατανομή Boltzmann (Boltzmann Energy Distribution)

- Στη γενική περίπτωση ενός συστήματος  $N$  μορίων, ο αριθμός των μορίων ανά μονάδα ενέργειας  $n_E$  ή το ποσοστό των μορίων ανά μονάδα ενέργειας  $\frac{n_E}{N}$  διέπεται από την κατανομή Boltzmann

$$\frac{n_E}{N} = C e^{-\left(\frac{E}{kT}\right)}$$

- $E$  η συνολική ενέργεια ( $KE + PE$ ) των μορίων
- $C$  σταθερά εξαρτώμενη από το σύστημα (π.χ., μονατομικό ή υγρό)
- Εικ., ενεργειακή κατανομή των μορίων ενός αερίου σε δύο διαφορετικές θερμοκρασίες. Η σκιασμένη περιοχή αντιστοιχεί στο πλήθος των μορίων με ενέργεια  $> E_A$



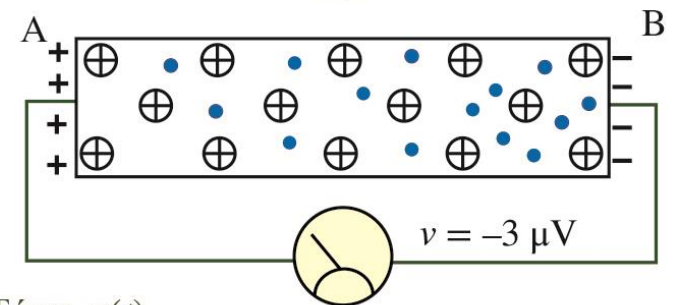
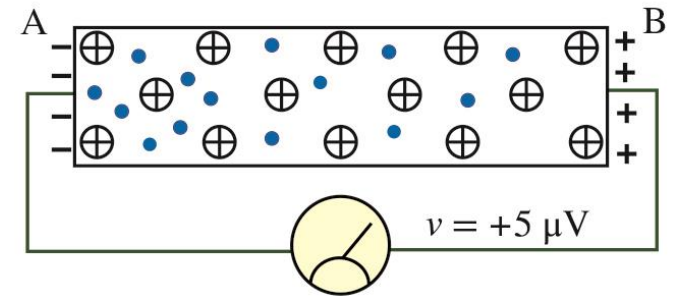
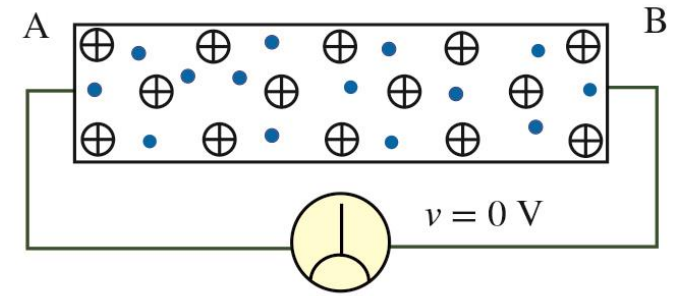
- $\frac{n_E \cdot dE}{N}$  εκφράζει το ποσοστό μορίων με ενέργειες από  $E$  ως  $E + dE$

## ΘΕΡΜΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ & ΘΟΡΥΒΟΣ

Σε έναν αγωγό, ο ηλεκτρικός θόρυβος οφείλεται στις θερμικές διακυμάνσεις της στιγμιαίας τοπικής συγκέντρωσης των ηλεκτρονίων.

Λόγω αυτών των διακυμάνσεων, **ανά πάσα στιγμή, το ένα άκρο ενός αγωγού μπορεί να γίνει περισσότερο αρνητικό** (στιγμιαία αύξηση της συγκέντρωσης ελευθέρων ηλεκτρονίων) **από το άλλο.**

Ουσιαστικά, υπάρχουν διαρκείς μεταβολές της τάσης κατά μήκος του αγωγού, αλλά **η μέση τάση, υπολογισμένη για ένα 'μεγάλο' χρονικό διάστημα θα είναι πάντα μηδενική.**



Τάση,  $v(t)$

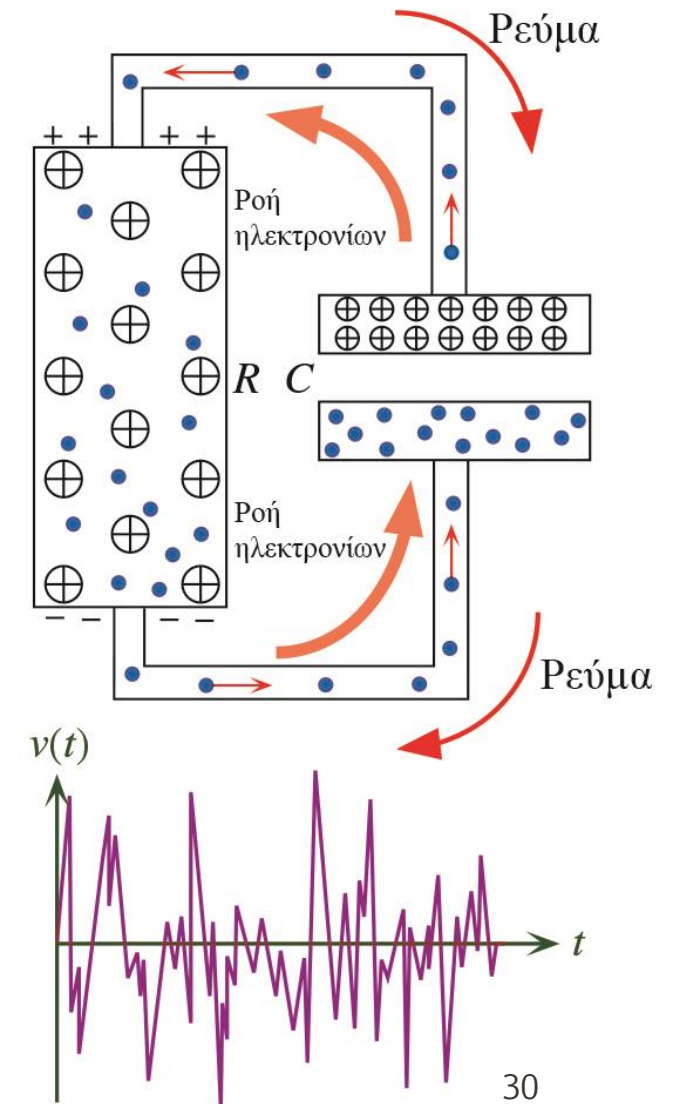


# Ηλεκτρικός θόρυβος σε αγωγό αντίστασης $R$

- Έστω αγωγός αντίστασης  $R$  συνδεδεμένος με πυκνωτή χωρητικότητας  $C$  στην ίδια θερμοκρασία (θερμική ισορροπία).
- Θερμικές διακυμάνσεις στον αγωγό προκαλούν διακυμάνσεις τάσης  $v$  στα άκρα της αντίστασης  $R$  (και του πυκνωτή  $C$ ).
- Η τάση στα άκρα του πυκνωτή εξαρτάται από την ενέργεια που μπορεί να αποθηκεύσει,  $E = \frac{1}{2} C v^2$
- Η μέση αποθηκευμένη ενέργεια στον πυκνωτή πρέπει να είναι (θεώρημα Maxwell)  $\frac{1}{2} kT$

$$\overline{E(t)} = \frac{1}{2} C \overline{v(t)^2} = \frac{1}{2} kT \Rightarrow \overline{v(t)^2} = \frac{kT}{C}$$

- rms τιμή του θορύβου τάσης  $v_{rms} = \sqrt{\overline{v(t)^2}} = \sqrt{\frac{kT}{C}}$



## Ηλεκτρικός θόρυβος σε αγωγό αντίστασης $R$ (συνέχεια)

---

- Το κύκλωμα  $RC$  αποτελεί ένα βαθυπερατό φίλτρο συχνοτήτων (low-pass filter )
- Ένα **low-pass φίλτρο** επιτρέπει να διέλθουν όλα τα σήματα με συχνότητες ως μια μέγιστη συχνότητα, τη **συχνότητα αποκοπής** (cutoff frequency),  $B$ ,

$$B = \frac{1}{2\pi RC}$$

- Με αντικατάσταση του  $C$ , παίρνουμε την rms τάση του θορύβου στα άκρα αντίστασης  $R$  ή θόρυβο Jonson ( Jonson resistor noise equation)

$$v_{rms} = \sqrt{4kTRB}$$

και καθορίζει το κατώτατο όριο έντασης ασθενών σημάτων που μπορούν να υποστούν ενίσχυση σε μια ηλεκτρική διάταξη εύρους ζώνης  $B$  σε θερμοκρασία  $T$ .

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.10

Τυπικό ρυθμιζόμενο παράλληλο κύκλωμα συντονισμού (συχνοτήτων) ραδιοφωνικού δέκτη (Εικ.). Ζητείται να υπολογιστεί η ένταση του ασθενέστερου ανιχνεύσιμου ραδιοφωνικού σήματος.

### ΛΥΣΗ

Εύρος ζώνης κυκλώματος  $RLC$ ,  $B = \frac{f_o}{Q}$

όπου,  $f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  η συχνότητα συντονισμού και

$Q = 2\pi f_o CR$  ο συντελεστής ποιότητας του κυκλώματος.

Με αντικατάσταση, παίρνουμε  $f_o = \frac{10^7}{2\pi} = 1.6 \text{ MHz}$  και  $Q = 200$

οπότε  $B = \frac{10^7}{2\pi(200)} \text{ Hz} = 8 \text{ kHz}$

Η rms τιμή του θορύβου της τάσης είναι

$$v_{rms} = \sqrt{4kTRB} = \sqrt{4(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K})(200 \times 10^3 \text{ } \Omega)(8 \times 10^3 \text{ Hz})} = 5.1 \text{ } \mu\text{V}$$

Αυτός είναι ο συνολικός θόρυβος εντός μιας ζώνης εύρους 8 kHz γύρω από τη συχνότητα 1.6 MHz. Καθορίζει ο ασθενέστερο ανιχνεύσιμο σήμα (ελάχιστο πλάτος σήματος) σε αυτή τη συχνότητα

