Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής
Γραμμική Άλγεβρα
3η Διάλεξη

Ζ.Καλογηράτου

Γραμμικά Συστήματα

Το πρόβλημα

Δίνονται πίνακας $A \in R^{m\times n}$ και διάνυσμα $\underline{b} \in R^m$ υπάρχει διάνυσμα $\underline{x} \in R^n$ τέτοιο ώστε:

$$A\underline{x} = \underline{b} \tag{1}$$

και αν υπάρχει είναι μοναδικό·

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Γραμμικά Συστήματα

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

λέμε ότι είναι ένα σύστημα m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss στηρίζετε στην μετατροπή του πίνακα του συστήματος σε άνω τριγωνικό κάνοντας πράξεις οι οποίες δεν αλλάζουν τον χώρο λύσεων του συστήματος.
Η λύση του συστήματος δεν αλλάζει αν πολ/με μια γραμμή με έναν αριθμό και προσθέσουμε σε μια άλλη γραμμή ή αν αντιμεταθέσουμε δύο γραμμές.

Γράφουμε το διάνυσμα b δίπλα στον πίνακα A και έτσι έχουμε τον νέο πίνακα που θα συμβολίζουμε με $A|b$ και ανήκει στο $R^{m\times(n+1)}$, ο πίνακας αυτός καλείται επαυξημένος πίνακας του συστήματος.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

Γραμμικά Συστήματα

Θα μηδενίσουμε όλα στοιχεία του A τα οποία βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο. Σε πρώτη φάση μηδενίζουμε τα στοιχεία που βρίσκονται στην πρώτη στήλη, θέλουμε λοιπόν να μηδενίσουμε όλα τα

$$a_{21},\ a_{22},\ ,\ldots,a_{n1}$$

Για να μηδενίσουμε το a_{21} αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την πρώτη γραμμή με

$$l_{21} = -a_{21}/a_{11}$$

και να προσθέσουμε στη δεύτερη γραμμή η οποία γίνεται

$$\begin{aligned} 0,\ a_{22}^{(1)} = a_{22} + l_{21}a_{12},\ \ldots,\ a_{2n}^{(1)} &= a_{2n} + l_{21}a_{1n}, \\ b_2^{(1)} &= b_2 + l_{21}b_1 \end{aligned}$$

Ανάλογα εργαζόμαστε και με τα άλλα στοιχεία της πρώτης στήλης. Το στοιχείο a_{11} ονομάζεται οδηγό στοιχείο.

Γραμμικά Συστήματα

Γενικά μπορούμε περιγράψουμε τη διαδικασία μηδενισμού των στοιχείων της πρώτης στήλης ώς εξής

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= a_{ij} + l_{i1} a_{1,j} \quad j = 2, \ldots, n \\ b_i^{(1)} &= b_i + l_{i1} b_1 \\ \text{όπου} \quad l_{i1} &= -a_{i1}/a_{11} \end{aligned}$$

Τώρα ο επαυξημένος πίνακας έχει τη μορφή

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right)$$

Για να μηδενίσουμε τα στοιχεία στη δεύτερη στήλη

$$a_{32}^{(1)},\ a_{42}^{(1)},\ ,\ldots,\ a_{n2}^{(1)}$$

Για να μηδενίσουμε το $a_{32}^{(1)}$ αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την δεύτερη γραμμή με

$$l_{32} = -a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$$

και να προσθέσουμε στη τρίτη γραμμή η οποία γίνεται

$$\begin{aligned} 0,\ ,0,\ a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} + l_{32}a_{23}^{(1)},\ \ldots,\ a_{3n}^{(2)} &= a_{3n}^{(1)} + l_{32}a_{2n}^{(1)}, \\ b_3^{(2)} &= b_3^{(1)} + l_{32}b_2^{(1)} \end{aligned}$$

Γενικά μπορούμε περιγράψουμε τη διαδικασία μηδενισμού των στοιχείων της δεύτερης στήλης ώς εξής

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} + l_{i2} a_{2,j}^{(1)} \quad j = 3, \dots, n \\ b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} + l_{i2} b_2^{(1)}, \\ \text{όπου } l_{i2} &= -a_{i2}^{(1)} / a_{22}^{(1)} \end{aligned}$$

Εδώ οδηγό στοιχείο είναι το a_{22}.
Με τον τρόπο αυτό ο πίνακας έρχεται στη μορφή

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right)$$

μηδενισμός των στοιχείων της 1ης στήλης

$$\begin{aligned} l_{i1} &= -a_{i1}/a_{11} \\ a_{ij}^{(1)} &= a_{ij} + l_{i1}a_{1,j} \quad j = 2, \ldots, n \quad b_i^{(1)} = b_i + l_{i1}b_1 \end{aligned}$$

μηδενισμός των στοιχείων της 2ης στήλης

$$\begin{aligned} l_{i2} &= -a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)} \\ a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} + l_{i2}a_{2,j}^{(1)} \quad j = 3, \ldots, n \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} + l_{i2}b_2^{(1)}, \end{aligned}$$

μηδενισμός των στοιχείων της 3ης στήλης

$$\begin{aligned} l_{i3} &= -a_{i3}^{(1)}/a_{33}^{(1)} \\ a_{ij}^{(3)} &= a_{ij}^{(2)} + l_{i3}a_{3,j}^{(1)} \quad j = 4, \ldots, n \quad b_i^{(3)} = b_i^{(2)} + l_{i3}b_3^{(1)}, \end{aligned}$$

Γραμμικά Συστήματα

Γενικά μπορούμε να περιγράψουμε τη διαδικασία ως εξής:

Για $k = 1, 2, \dots, n-1$

$$
\begin{aligned}
l_{ik} &= -a_{ik}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)} \\
a_{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} + l_{ik}a_{k,j}^{(k-1)} \qquad j = k+1, \dots, n \\
b_{(k)} &= b_i^{(k-1)} + l_{ik}b_k^{(k-1)},
\end{aligned}
$$

Ο τελικός πίνακας της μεθόδου θα είναι ο ακόλουθος

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)}
\end{array}\right)
$$

Γραμμικά Συστήματα

- Το άνω τριγωνικό κομμάτι που προέκυψε από τον πίνακα A μετά την εφαρμογή της μεθόδου το ονομάζουμε U και το νέο δεξί μέλος $\tilde{b}$, δηλαδή ο πίνακας $A|b$ μετασχημματίζεται σε $U|\tilde{b}$.
- Στο μετασχηματισμένο γραμμικό σύστημα $Ux = \tilde{b}$ η τελευταία εξίσωση (n γραμμή) έχει μόνο έναν άγνωστο το x_n από αυτήν λοιπόν βρίσκουμε το x_n.
- Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το x_n στην $n-1$ εξίσωση οπότε έχουμε άγνωστο μόνο το x_{n-1}.
- Εργαζόμενοι έτσι με κάθε εξίσωση φτάνουμε στην πρώτη όπου ο άγνωστος είναι το x_1.

Παρατήρηση. Κατά την εφαρμογή της μεθόδου κατασκευάσθηκαν τα στοιχεία l_{ij} με τα οποία σχηματίζουμε τον εξής κάτω τριγωνικό πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & & & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \cdots & 1 & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Αποδεικνύεται ότι το γινόμενο των L και U δίνει τον πίνακα A, δήλαδή $L \cdot U = A$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε το εξής παράδειγμα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ο επαυξημένος πίνακας είναι:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{l2 = l2 + (-3) * l1 \\ l3 = l3 + 2 * l1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{l3=l3+5*l2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \text{ ή } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \text{ ή } \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι η τελευταία εξίσωση περιέχει έναν μόνο άγνωστο το x_3, λύνουμε και βρίσκουμε

$$x_3 = 1$$

η δεύτερη εξίσωση έχει δύο αγνώστους τα x_2 και x_3, αντικαθιστούμε την τιμή του x_3 που βρίκαμε μόλις πριν και έχουμε

$$x_2 = -1$$

η πρώτη εξίσωση έχει 3 αγνώστους και x_1, x_2 και x_3 αντικαθιστούμε τις τιμές των x_2 x_3 που βρήκαμε πριν και έχουμε:

$$x_1 = 1$$

Εναλλακτικά μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο απαλοιφής Gauss και να φέρουμε τον επαυξημένο πίνακα σε τέτοια μορφή ώστε ο πίνακας συντελεστών να είναι ο μοναδιαίος. Είναι τότε προφανές αν κάτι τέτοιο είναι εφικτό το μετασχηματισμένο διάνυσμα b είναι η λύση του συστήματος.

Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 &= -1 \end{aligned}$$

επαυξημένος πίνακας:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{l2\,:=\,l2+(-2)*l1 \\ l3\,:=\,l3+(-1)*l1}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{l2:=l2*(1/2)}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{l1\,:=\,l1+l2 \\ l3\,:=\,l3+l2}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{l1\,:=\,l1+(-1)*l3 \\ l2\,:=\,l2+(-1)*l3}}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{l3:=2*l3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

το σύστημα γράφετε

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Παράδειγμα. Να λυθεί αν υπαρχει λύση το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 13 \\ 3x_1 + 0x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

ο επαυξημένος πίνακας είναι:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 4 & 13 \\ 3 & 0 & 2 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

χάθηκε η τελευταία εξίσωση, αυτό συνέβη επειδή υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των γραμμών του πίνακα, πραγματικά ισχύει $\det(A) = 0$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

θέτουμε $x_3 = k$ όπου k πραγματικός αριθμός, τότε $x_2 = 1 + k/3$ και $x_1 = 3 - 2k/3$.

Παράδειγμα. Να λυθεί αν υπαρχει λύση το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ο επαυξημένος πίνακας είναι:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Εδώ η τελευταία εξίσωση είναι αδύνατη. Συνεπώς το σύστημα δεν έχει λύση.

Η μέθοδος αυτή είναι εφαρμόσιμη μόνο στην περίπτωση του συστήματος n εξισώσεων με n αγνώστους όπου ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.
Συμβολίζουμε με D την ορίζουσα του A και με D_i την ορίζουσα που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε την i στήλη του πίνακα A με το διάνυσμα b.
Η λύση του συστήματος είναι

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

Π.χ. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 3 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + 7x_3 &= 13 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 126 \neq 0 \quad D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 13 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 126,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \\ -1 & 13 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 13 \end{vmatrix} = 252$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 0, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 2$$

Παράδειγμα Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 &= a^2 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= a \\ ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Λύση. *(με την μέθοδο Cramer)*

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (a-1) - (1-a) + a(1-a^2) = \\ &= 2(a-1) - a(a-1)(a+1) = \\ &= (a-1)(2-a^2-a) = -(a-1)^2(a+2) \\ D_1 = \begin{vmatrix} a^2 & 1 & a \\ a & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \quad = (a-1)^2(a+1) \end{aligned}$$

Γραμμικά Συστήματα - Παραδείγματα

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & a & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+1)^2$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{D_1}{D} = -\frac{a+1}{a+2} \\ x_2 &= \frac{D_2}{D} = \frac{1}{a+2} \\ x_3 &= \frac{D_3}{D} = \frac{(a+1)^2}{(a+2)} \end{aligned}$$

Λύση με την μέθοδο Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & -1 & -a \\ 0 & 1 & 1+a & 1+a+a^2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & -1 & -a \\ 0 & 0 & a+2 & 1+2a+a^2 \end{array}\right)$$

το σύστημα γράφεται

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + a x_3 &= a^2 \\ x_2 - x_3 &= -a \\ (a+2)x_3 &= (a+1)^2 \end{aligned}$$

από όπου

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{(a+1)^2}{a+2} \\ x_2 &= -a + \frac{(a+1)^2}{a+2} = \frac{1}{a+2} \\ x_1 &= a^2 - \frac{1}{a+2} - a\frac{(a+1)^2}{a+2} = -\frac{a+1}{a+2} \end{aligned}$$

Γραμμικά Συστήματα με κοινό πίνακα συντελεστών

Έστω $A \in \Re^{m\times n}$, και $b_1, b_2, \ldots, b_k, \in R^m$.
Θέλουμε να επιλύσουμε τα συστήματα:

$$\begin{aligned} Ax_1 &= b_1 \\ Ax_2 &= b_2 \\ \vdots &= \vdots \\ Ax_k &= b_k \end{aligned}$$

τα συστήματα αυτά έχουν κοινό πίνακα συντελεστών και μπορούμε να τα λύσουμε όλα μαζί θεωρώντας έναν επαυξημένο πίνακα της μορφής:

$$(A|b_1|b_2|\cdots|b_k)$$

Παράδειγμα. Να λυθούν τα συστήματα

$$\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ 5x_1 + 6x_2 & = & 11 \\ 3x_1 - 5x_3 & = & -2 \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ 5x_1 + 6x_2 & = & 5 \\ 3x_1 - 5x_3 & = & 8 \end{array}$$

θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα και κάνουμε γραμμοπράξεις

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 0 & 11 & 5 \\ 3 & 0 & -5 & -2 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & 1 & -5 \\ 0 & -6 & -2 & -8 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 19/2 & -19/2 & 19/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Τα συστήματα έρχονται στη μορφή:

$$\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ -4x_2 + 5x_3 & = & 1 \\ x_3 & = & 1 \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ -4x_2 + 5x_3 & = & -5 \\ x_3 & = & -1 \end{array}$$

Παράδειγμα. Να βρεθεί ο πίνακας X για τον οποίο ισχύει $A \cdot X = B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -7 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & -2 \\ -9 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

θα κάνουμε γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 5 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -9 & -1 & 4 & 7 \\ 1 & -7 & 5 & -13 & 10 & -5 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 5 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -9 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & -8 & 6 & -18 & 8 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & -4 & 14 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & -9 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 30 & -90 & 0 & 30 & 60 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & -4 & 14 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & -9 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{άρα } X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Υπολογισμός του A^{-1}

Έστω πίνακας $A \in \Re^{n\times n}$ το πρόβλημα εύρεσης του αντίστροφου είναι να βρεθεί πίνακας $A \in \Re^{n\times n}$ έτσι ώστε

$$AX = I_n$$

Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$(A|I_n)$$

και κάνουμε γραμμοπράξεις μέχρι να τον φέρουμε στη μορφή

$$(I_n|X)$$

τότε ο X είναι ο A^{-1}.

Παράδειγμα. Να αντιστραφεί ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/7 & -8/7 & 2/7 \\ 0 & 2 & 0 & 3/7 & 4/7 & 5/7 \\ 0 & 0 & 1 & -3/7 & 3/7 & 1/7 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/7 & -8/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 & 3/14 & 4/14 & 5/14 \\ 0 & 0 & 1 & -3/7 & 3/7 & 1/7 \end{array}\right) \quad \text{άρα} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & -8/7 & 2/7 \\ 3/14 & 4/14 & 5/14 \\ -3/7 & 3/7 & 1/7 \end{pmatrix}$$

Ομογενή Γραμμικά Συστήματα

Στην ειδική περίπτωση που το δεξί μέλος του συστήματος είναι ίσο με το μηδέν λέμε ότι έχουμε ομογενές σύστημα

$$Ax = 0, \quad A \in R^{n \times n}$$

Τα ομογενή συστήματα έχουν πάντα μία λύση την μηδενική.
Επιπλέον αν $\det(A) \neq 0$ η λύση είναι μοναδική ενώ αν $\det(A) = 0$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.
Παράδειγμα. Να λυθεί το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

κάνουμε γραμμοπράξεις στον πίνακα του συστήματος

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 14 & -14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Εχουμε λοιπόν ότι η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με το μηδέν.

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Θέτουμε

$$x_3 = k, \quad k \in \Re$$

και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 7x_2 - 7x_3 &= 0 \end{aligned}$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x_2 &= k \\ x_1 &= -3k \end{aligned}$$

Συνεπώς οι άπειρες λύσεις του συστήματος είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} -3k \\ k \\ k \end{pmatrix}, \quad k \in R$$

Το σύνολο των λύσεων του συστήματος αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του R^3 διάστασης 1. Μια βάση του είναι το διάνυσμα $(-3, 1, 1)$.

Η μέθοδος της απαλοιφής του Gauss μπορεί να εφαρμοσθεί και σε συστήματα με μη τετραγωνικό πίνακα συντελεστών.
Παράδειγμα. Να λυθεί το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 11x_4 &= 0 \end{aligned}$$

παίρνουμε τον πίνακα συντελεστών

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 & -7 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 9 & -2 & 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 12 & -7 & 6 \\ 3 & 9 & -2 & 11 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Εχουμε λοιπόν ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$x_4 = k, \quad k \in R$$

και παίρνουμε

$$x_3 = -2k$$

Θέτουμε

$$x_2 = l, \quad l \in R$$

και παίρνουμε

$$x_1 = -3l - 5k$$

Συνεπώς οι άπειρες λύσεις του συστήματος είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} -3l-5k \\ l \\ -2k \\ k \end{pmatrix}, \quad k, l \in \Re$$

Το σύνολο των λύσεων του συστήματος αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του R^4 διάστασης 2. Τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου των λύσεων.

$$\begin{pmatrix} -3l-5k \\ l \\ -2k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3l \\ l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5k \\ 0 \\ -2k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} l + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} k$$