Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής
Γραμμική Άλγεβρα
5η Διάλεξη
Γραμμικές Απεικονίσεις

Ζ.Καλογηράτου

Ορισμός Γραμμικής Απεικόνισης

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο διανυσματικούς χώρους U και V πάνω στο ίδιο σώμα F. Μία απεικόνιση $F : U \to V$ από τον U στον V καλείται γραμμική απεικόνιση αν για κάθε $u, v \in U$ και $\lambda \in F$ ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες

1. $F(u+v) = F(u) + F(v)$
2. $F(\lambda u) = \lambda F(u)$.

ή εναλλακτικά

Η απεικόνιση $F : U \to V$ από τον U στον V καλείται γραμμική απεικόνιση αν για κάθε $u, v \in U$ και $\lambda \mu \in F$ ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες

$$F(\lambda u + \mu v) = \lambda F(u) + \mu F(v)$$

Παράδειγμα. Δίνεται η απεικόνιση

$$F : R^3 \to R \quad \text{με} \quad F(x, y, z) = x + y + 2z.$$

Να δειχθεί ότι είναι γραμμική.
Έστω $u_1 = (x_1, y_1, z_1), \quad u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in R^3$, τότε

$$\begin{aligned}
F(u_1 + u_2) &= F\left((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\right) = \\
&= F(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = \\
&= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2) = \\
&= (x_1 + y_1 + 2z_1) + (x_2 + y_2 + 2z_2) = \\
&= F(x_1, y_1, z_1) + F(x_2, y_2, z_2) = \\
&= F(u_1) + F(u_2)
\end{aligned}$$

Έστω $\lambda \in R$

$$\begin{aligned}
F(\lambda u_1) &= F\left(\lambda(x_1, y_1, z_1)\right) = \\
&= F(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) = \\
&= (\lambda x_1 + \lambda y_1 + \lambda 2z_1) = \\
&= \lambda(x_1 + y_1 + 2z_1) = \\
&= \lambda F(x_1, y_1, z_1) = \lambda F(u_1)
\end{aligned}$$

Γραμμικές Απεικονίσεις

Διαφορετικά Έστω $u_1 = (x_1, y_1, z_1), \quad u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in R^3$, $\lambda,\ \mu \in R$ τότε

$$\begin{aligned}
F(\lambda u_1 + \mu u_2) &= F\left(\lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2)\right) = \\
&= F(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2) = \\
&= (\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) + 2(\lambda z_1 + \mu z_2) = \\
&= \lambda(x_1 + y_2 + 2z_1) + \mu(x_2 + y_2 + 2z_2) = \\
&= \lambda F(x_1, y_1, z_1) + \mu F(x_2, y_2, z_2) = \\
&= \lambda F(u_1) + \mu F(u_2)
\end{aligned}$$

Παράδειγμα. Για τις παρακάτω απεικονίσεις

1. $F : R^2 \to R^2$ με $F(x,y) = (2x+y, x-y+2)$,
2. $F : R^3 \to R^2$ με $F(x,y,z) = (x+y+z, xy)$,

να δειχθεί ότι **δεν** είναι γραμμικές.
Για τον πρώτο $F(0,0) = (0,2) \neq (0,0)$ άρα δεν αποτελεί γραμμική απεικόνιση.
Για τον δεύτερο έχουμε $F(0,0,0) = (0,0)$ αλλά για $u = (x,y,z) \in R^3$ και $\lambda \in R$ έχουμε

$$\begin{aligned} F(\lambda u) &= F\left(\lambda(x,y,z)\right) = \\ &= F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \\ &= (\lambda x + \lambda y + \lambda z, \lambda x \lambda y) = \\ &= \lambda(x+y+z, \lambda xy) \neq \lambda F(u) \end{aligned}$$

ή θα μπορούσαμε να το δούμε και θέτοντας $\lambda = 2$, τότε

$$F(2u) = F(2x,2y,2z) = (2x+2y+2z, 2x2y) = 2(x+y+z, 2xy) \neq 2F(u)$$

Παράδειγμα. Έστω A πίνακας πραγματικών αριθμών μεγέθους $m \times n$ τότε η απεικόνιση

$$F : R^n \to R^m \quad \text{με} \quad F(u) = Au.$$

είναι γραμμική.
Έστω $u_1, u_2 \in R^n$ και $\lambda, \mu \in R$ Αρκεί να δείξουμε ότι

$$F(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda F(u_1) + \mu F(u_2)$$

πραγματικά

$$\begin{aligned} F(\lambda u_1 + \mu u_2) &= A(\lambda u_1 + \mu u_2) = \\ &= \lambda A u_1 + \mu A u_2 = \\ &= \lambda F(u_1) + \mu F(u_2) \end{aligned}$$

Παράδειγμα. Δίνεται η απεικόνιση

$$F : R^2 \to R^3 \quad \text{με} \quad F(x,y) = (x, y, x+y).$$

Να δειχθεί ότι είναι γραμμική.
Εστω $u_1 = (x_1, y_1), \quad u_2 = (x_2, y_2) \in R^2$, τότε

$$\begin{aligned} F(u_1+u_2) &= F(x_1+x_2, y_1+y_2) = \\ &= (x_1+x_2, y_1+y_2, x_1+x_2+y_1+y_2) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} F(u_1)+F(u_2) &= F(x_1,y_1)+F(x_2,y_2) = \\ &= (x_1, y_1, x_1+y_1)+(x_2, y_2, x_2+y_2) = \\ &= (x_1+x_2, y_1+y_2, x_1+x_2+y_1+y_2) \end{aligned}$$

άρα

$$F(u_1+u_2) = F(u_1)+F(u_2)$$

Επίσης θα δείξουμε ότι $F(\lambda u_1) = \lambda F(u_1)$.

$$\begin{aligned}
F(\lambda u_1) &= F\left(\lambda(x_1, y_1)\right) = \\
&= F(\lambda x_1, \lambda y_1) = \\
&= (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda x_1 + \lambda y_1) \\
&= \lambda(x_1, y_1, x_1 + y_1) \\
&= \lambda F(u_1)
\end{aligned}$$

Συνεπώς η F είναι γραμμική.

Εναλλακτικά αρκεί να δείξουμε ότι

$$F(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda F(u_1) + \mu F(u_2)$$

πραγματικά

$$\begin{aligned}
F(\lambda u_1 + \mu u_2) &= F\left(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)\right) = \\
&= F\left((\lambda x_1, \lambda y_1) + (\mu x_2, \mu y_2)\right) = \\
&= F(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) = \\
&= (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\lambda F(u_1) + \mu F(u_2) &= \lambda F(x_1, y_1) + \mu F(x_2, y_2) = \\
&= \lambda(x_1, y_1, x_1 + y_1) + \mu(x_2, y_2, x_2 + y_2) = \\
&= (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda(x_1 + y_1)) + (\mu x_2, \mu y_2, \mu(x_2 + y_2)) = \\
&= (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda(x_1 + y_1) + \mu(x_2 + y_2))
\end{aligned}$$

Έστω V και W διανυσματικοί χώροι και $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ μια βάση του V και $w_1, w_2, \dots, w_n$ στοιχεία του W. Τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $F : V \to W$ τέτοια ώστε

$$f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2, \dots f(v_n) = w_n,$$

Κάθε στοιχείο του V γράφεται μονοσήμαντα σαν γραμμικός συνδυασμός των $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Έστω $v \in V$ τότε υπαρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$ έτσι ώστε

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

και

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \cdots + \lambda_n f(v_n) \Rightarrow \\ f(v) &= \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_n w_n \end{aligned}$$

Παράδειγμα. Να βρείτε τον τύπο της γραμμικής απεικόνισης $F : R^2 \to R^2$ αν είναι γνωστό ότι $F(1,0) = (2,3)$, $F(1,1) = (-1,1)$.
Θα γράψουμε το τυχαίο (x,y) σαν συνάρτηση των $(1,0)$ και $(1,1)$,

$$(x,y) = \lambda(1,0) + \mu(1,1) = (\lambda + \mu, \mu)$$

από όπου έχουμε $\lambda + \mu = x$ και $\mu = y$,
οπότε $\lambda = x - y$ $\mu = y$.
Για τον τύπο του μετασχηματισμού εργαζόμαστε ως εξής

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \lambda F(1,0) + \mu F(1,1) = \\ &= (x-y)F(1,0) + yF(1,1) = \\ &= (x-y)(2,3) + y(-1,1) = \\ &= (2x-2y, 3x-3y) + (-y,y) = \\ &= (2x-3y, 3x-2y) \end{aligned}$$

Άρα η απεικόνιση είναι η $F(x,y) = (2x-3y, 3x-2y)$.

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι U και V με $dim(U) = m$ και $dim(V) = n$ και $F : U \to V$ γραμμική απεικόνιση. Εστω

$$\begin{aligned} S_U &= (u_1, u_2, \ldots, u_m) \\ S_V &= (v_1, v_2, \ldots, v_n) \end{aligned}$$

δύο διατεταγμένες βάσεις των U και V αντίστοιχα.
Κάθε στοιχείο του U γράφεται μονοσήμαντα σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης S_U.
Συνεπώς για να ορίσουμε την απεικόνιση αρκεί να ορίσουμε την εικόνα κάθε στοιχείου της βάσης S_U δηλαδή τα

$$F(u_1), F(u_2), \ldots, F(u_m).$$

Παρατηρούμε ότι κάθε ένα από τα $F(u_i)$ είναι στοιχείο του V συνεπώς γράφεται μονοσήμαντα σαν γραμμικός συνδυασμός των S_V

$$F(u_i) = a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 + \cdots + a_{ni}v_n$$

Από το τελευταίο προκύπτει ότι η γραμμική απεικόνιση είναι πλήρως καθορισμένη από τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός ονομάζεται **πίνακας αναπαράστασης** της f, ως προς τις βάσεις S_U και S_V.
Είναι προφανές ότι ο πίνακας αυτός είναι διαφορετικός για διαφορετικές βάσεις των U και V.

Εφαρμογή. Εστω ότι $U = R^m$, $V = R^n$ και

$$\begin{array}{rcl} S_U & = & \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \\ S_V & = & \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \end{array}$$

δύο διατεταγμένες βάσεις τους. Τότε

$$\begin{pmatrix} F(u_1) \\ F(u_2) \\ \vdots \\ F(u_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Το αριστερό μέλος είναι ένας πίνακας $m \times n$ του οποίου κάθε γραμμή είναι η εικόνα του βασικού στοιχείου u_i στον R^n. Ο δεύτερος πίνακας στο δεξί μέλος αποτελείται από τα στοιχεία της βάσης του R^n (κάθε γραμμή είναι στοιχείο του S_V) και συνεπώς ανήκει στον $R^{n \times n}$.

Αν πάρουμε σαν βάσεις τις φυσικές βάσεις των χώρων R^m και R^n τότε

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = I_n$$

συνεπώς

$$\begin{pmatrix} F(e_1) \\ F(e_2) \\ \vdots \\ F(e_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} F(e_1) &= (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}) \\ F(e_2) &= (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}) \\ \vdots & \quad \vdots \\ F(e_m) &= (a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{nm}) \end{aligned}$$

Γραμμικές Απεικονίσεις

Έστω $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m$ τότε $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$ και

$$\begin{aligned} F(x) &= F(\sum_{i=1}^m x_i e_i) = \sum_{i=1}^m x_i F(e_i) = \\ &= x_1 F(e_1) + x_2 F(e_2) + \cdots + x_m F(e_m) \\ &= (x_1 a_{11}, x_1 a_{21}, \ldots, x_1 a_{n1}) + (x_2 a_{12}, x_2 a_{22}, \ldots, x_2 a_{n2}) + \cdots \\ &\quad + (x_m a_{1m}, x_m a_{2m}, \ldots, x_m a_{nm}) \\ &= (x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_m a_{1m}, x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \cdots + x_m a_{2m}, \ldots, \\ &\quad x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \cdots + x_m a_{nm}) = Ax \end{aligned}$$

Δηλαδή για κάθε γραμμική απεικόνιση $F : R^m \to R^n$ υπάρχει ένας πίνακας $A \in R^{n \times m}$ έτσι ώστε $F(x) = Ax$.

Παράδειγμα 1. Δίνεται η απεικόνιση

$$F : R^2 \to R^3 \quad \text{με} \quad F(x,y) = (x, y, x+y).$$

Να βρεθεί ο πίνακας που του αντιστοιχεί ως προς τις φυσικές βάσεις.
Ο **πίνακας της** F προκύπτει ως εξής:

$$F(u) = F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Διαφορετικά, μπορούμε να βρούμε τον πίνακα της F αν πάρουμε τις εικόνες των στοιχείων της φυσικής βάσης του $\Re^2$

$$F(e_1) = F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad F(e_2) = F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας είναι

$$A = (F(e_1), F(e_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Μια γραμμική απεικόνιση $F : U \to V$ ορίζει δύο γραμμικούς υπόχωρους των χώρων V και U αντίστοιχα ως εξής.

Εικόνα της γραμμικής απεικόνισης

Το σύνολο των εικόνων όλων των στοιχείων του U καλείται εικόνα της γραμμικής απεικόνισης και συμβολίζεται με $Im(F)$ (είναι γραμμικός υπόχωρος του V).

Πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης

Το σύνολο των στοιχείων του U τα οποία μέσω της απεικόνισης απεικονίζονται στο μηδενικό στοιχείο του V καλούνται πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης και συμβολίζεται με $\ker(F)$ (είναι γραμμικός υπόχωρος του U).

Για τις διαστάσεις των χώρων $Im(F)$ και $\ker(F)$ ισχύει το εξής:

$$\dim(U) = \dim(Im(F)) + \dim(ker(F)).$$

Παράδειγμα 1. Να βρεθούν ο πηρύνας και η εικόνα της γραμμικής απεικόνισης

$$F : R^2 \to R^3 \quad \text{με} \quad F(x, y) = (x, y, x + y).$$

Για να βρούμε την **εικόνα της** F εργαζόμαστε ως εξής

$$\begin{aligned} F(u) &= F(x, y) = (x, y, x + y) = \\ &= (x, 0, x) + (0, y, y) = \\ &= x\,(1, 0, 1) \;+\; y\,(0, 1, 1) \end{aligned}$$

Συνεπώς η εικόνα της F είναι ο διανυσματικός υπόχωρος του R^3 που παράγεται από τα $(1, 0, 1)$ και $(0, 1, 1)$. Δηλαδή,

$$Im(F) = <(1, 0, 1),\ (0, 1, 1)>$$

από όπου προκύπτει ότι $dim(Im(F)) = 2$.

Ο **πυρήνας του** F αποτελείται από τα $u \in R^2$ τα οποία απεικονίζονται στο μηδενικό στοιχείο του R^3. Δηλαδή αποτελείται από τα $u = (x, y)$ με $F(u) = 0$.

$$F(u) = F(x, y) = (x, y, x + y) = (0, 0, 0)$$

συνεπώς $x = 0$ και $y = 0$.
Άρα $u = (x, y) = (0, 0)$είναι το μοναδικό στοιχείο του $\ker(F)$.

Παράδειγμα 2. Να βρεθεί μια γραμμική απεικόνιση $F : R^3 \to R^3$ τέτοια ώστε ο πηρύνας της να παράγεται από τα διανύσματα $(1, 0, 1)$ και $(2, 1, 3)$ και η εικόνα της να παράγεται από το $(1, 4, 6)$.
Αφού τα $(1, 0, 1)$ και $(2, 1, 3)$ ανήκουν τον $\ker(F)$ έχουμε

$$F(1, 0, 1) = (0, 0, 0), \quad \text{και} \quad F(2, 1, 3) = (0, 0, 0)$$

Έστω επιπλέον το διάνυσμα $(1, 0, 0)$ το οποίο δεν ανήκει στον $\ker(F)$, αφού το σύνολο $S = \{(1, 0, 1), (2, 1, 3), (1, 0, 0)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, πραγματικά

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Θεωρούμε ότι $F(1, 0, 0) = (1, 4, 6)$.

Το σύνολο S αποτελεί βάση του R^3 θα γράψουμε το τυχαίο $(x, y, z) \in R^3$ σαν γραμμικό συνδυασμό του S

$$(x, y, z) = \kappa(1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 3) + \mu(1, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} x &= \kappa + 2\lambda + \mu \\ y &= \lambda \\ z &= \kappa + 3\lambda \end{aligned}$$

από όπου

$$\kappa = z - 3y, \quad \lambda = y, \quad \mu = x + y - z$$

άρα

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (z - 3y)(1, 0, 1) + y(2, 1, 3) + (x + y - z)(1, 0, 0) \Rightarrow \\ f(x, y, z) &= (z - 3y)f(1, 0, 1) + yf(2, 1, 3) + (x + y - z)f(1, 0, 0) = \\ &= (z - 3y)(0, 0, 0) + y(0, 0, 0) + (x + y - z)(1, 4, 6) = \\ &= (x + y - z, 4(x + y - z), 6(x + y - z)) \end{aligned}$$

Έστω η γραμμική απεικόνιση $F : U \to V$.

- η F είναι **αμφιμονοσήμαντη (1-1)** όταν δύο διαφορετικά στοιχεία του U έχουν διαφορετικές είκόνες στον V, δηλ. $u_1 \neq u_2 \Rightarrow F(u_1) \neq F(u_2)$.
Διαφορετικά αν $F(u_1) = F(u_2) \Rightarrow u_1 \neq u_2$.
- η F είναι **επί** του V όταν για κάθε στοιχείο $v \in V$ υπάρχει $u \in U$ έτσι ώστε $F(u) = v$.

Όταν η F είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του V καλείται **ισομορφισμός**, και οι χώροι U και V ισόμορφοι.
Μια γραμμική απαεικόνιση είναι αμφιμονοσήμαντη αν και μόνο αν $\ker(F) = 0$.
Δυο χώροι V και W πεπερασμένης διάστασης είναι ισόμορφοι αν και μόνο αν έχουν την ίδια διάσταση $(\dim(V) = \dim(W))$.

Γραμμικές Απεικονίσεις

Πρόσθεση

Έστω $F, G : V \to W$ τότε ορίζεται η απεικόνιση

$$(F+G)(x) = F(x) + G(x).$$

Αριθμητικό γινόμενο

Έστω $F : V \to W$ και $a \in F$ τότε ορίζεται η απεικόνιση

$$(\alpha F)(x) = \alpha F(x).$$

Σύνθεση

Έστω $G : U \to V$ και $F : V \to W$ τότε ορίζεται η απεικόνιση $F \circ G : U \to W$

$$(F \circ G)(x) = F(G(x)).$$

Όλες οι απεικονίσεις που ορίστηκαν πραραπάνω είναι γραμμικές.

Έστω S_V και S_W διατεταγμένες βάσεις των V και W και A, B οι πίνακες αναπαράστασης των F, G ως προς τις βάσεις αυτές, τότε

- ο πίνακας αναπαράστασης της F, G ως προς τις ίδιες βάσεις είναι ο $A + B$.
- ο πίνακας αναπαράστασης της αF ως προς τις ίδιες βάσεις είναι ο αA.

Έστω S_U, S_V και S_W διατεταγμένες βάσεις των U, V και W και A, B οι πίνακες αναπαράστασης των G, F ως προς τις βάσεις αυτές, τότε ο πίνακας αναπαράστασης της $G \circ F$ ως προς τις ίδιες βάσεις είναι ο BA.

Έστω $F : V \to W$ μια αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση τότε και η $F^{-1} : W \to V$ είναι γραμμική.
Επιπλέον αν S_V και S_W διατεταγμένες βάσεις των V και W και A ο πίνακας αναπαράστασης της F ως προς τις βάσεις αυτές, τότε ο πίνακας αναπαράστασης της F^{-1} είναι ο A^{-1}.

Έστω $F : V \to W$ γραμμική απεικόνιση και V, W διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης. Τότε για κάθε επιλογή διατεταγμένων βάσεων S_V και S_W των V και W έχουμε ότι η διάσταση της εικόνας της γραμμικής απεικόνισης είναι ίση με την τάξη του πίνακα αναπαράστασής της.

Παράδειγμα. Δίνεται η απεικόνιση

$$F : R^3 \to R^3 \quad \text{με} \quad F(x, y, z) = (2x + y - z, y + z, x + 2y + 3z).$$

Να δειχθεί ότι είναι γραμμική και να βρεθούν

- ο πίνακας που της αντιστοιχεί ως προς τις φυσικές βάσεις,
- η εικόνα της F και μια βάση της
- ο πυρήνας της F και μια βάση του.

Έστω $u_1 = (x_1, y_1, z_1), \quad u_2 = (x_2, y_2, z(2)) \in R^3$ και $\lambda, \mu \in R$, τότε

$$
\begin{aligned}
F(\lambda u_1 + \mu u_2) &= F\left(\lambda(x_1, y_1, z_1)^T + \mu(x_2, y_2, z_2)^T\right) = \\
&= F\left((\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)^T + (\mu x_2, \mu y_2, \mu z_2)^Y\right) = \\
&= F\left((\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)^T\right) = \\
&= \begin{pmatrix} 2(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2) \\ (\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2) \\ (\lambda x_1 + \mu x_2) + 2(\lambda y_1 + \mu y_2) + 3(\lambda z_1 + \mu z_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\lambda x_1 + \lambda y_1 - \lambda z_1 \\ \lambda y_1 + \lambda z_1 \\ \lambda x_1 + 2\lambda y_1 + 3\lambda z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mu x_2 + \mu y_2 - \mu z_2 \\ \mu y_2 + \mu z_2 \\ \mu x_2 + 2\mu y_2 + 3\mu z_2 \end{pmatrix} = \\
&= \lambda \begin{pmatrix} 2x_1 + y_1 - z_1 \\ y_1 + z_1 \\ x_1 + 2y_1 + 3z_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2x_2 + y_2 - z_2 \\ y_2 + z_2 \\ x_2 + 2y_2 + 3z_2 \end{pmatrix} \\
&= \lambda F(u_1) + \mu F(u_2)
\end{aligned}
$$

Για να βρούμε την εικόνα $Im(F)$ της γραμμικής απεικόνισης θεωρούμε το τυχαίο $u = (x, y, z) \in R^3$

$$\begin{aligned} F(u) &= F(x,y,z) = (2x + y - z, y + z, x + 2y + 3z) = \\ &= (2x, 0, x) + (y, y, 2y) + (-z, z, 3z) = \\ &= x(2,0,1) + y(1,1,2) + z(-1,1,3) \end{aligned}$$

θα εξετάσουμε αν τα δυανύσματα είναι είναι γραμμικά ανεξάρτητα

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Τα δυανύσματα $(2,0,1)$, $(1,1,2)$, $(-1,1,3)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα συνεπώς αποτελούν βάση του $Im(F)$. Επομένως $\dim(Im(F)) = 3$, οπότε $\dim(\ker(F)) = 0$ άρα ο πυρήνας της F περιέχει μόνο το μηδενικό στοιχείο.

Πραγματικά έστω $u = (x, y, z) \in R^3$ με $F(u) = 0$, τότε

$$F(u) = F(x, y, z) = (2x + y - z, y + z, x + 2y + 3z) = (0, 0, 0)$$

συνεπώς

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Η τάξη του πίνακα είναι 3 άρα το σύστημα έχει λύση μόνο τη μηδενική. Επομένως $\ker(F) = 0$.

Διαφορετικά μπορούμε να ξεκινήσουμε από τον πυρήνα έστω $u = (x, y, z) \in R^3$ με $F(u) = 0$, τότε

$$F(u) = F(x, y, z) = (2x + y - z, y + z, x + 2y + 3z) = (0, 0, 0)$$

συνεπώς

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε απαλοιφή Gauss στο σύστημα αυτό

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Η τάξη του πίνακα είναι 3 άρα το σύστημα έχει λύση μόνο τη μηδενική. Επομένως $\ker(F) = 0$.

Από το θεώρημα διάστασης έχουμε ότι $\dim(Im(F)) = 0$. Για να προσδιορίσουμε την $Im(F)$ αρκεί να βρούμε τρία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του R^3, αυτά θα αποτελούν μία βάση της. Θεωρούμε τα

$$\begin{aligned} F(e_1) &= F(1,0,0) = (2,0,1), \\ F(e_2) &= F(0,1,0) = (1,1,2), \\ F(e_3) &= F(0,0,1) = (-1,1,3), \end{aligned}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα αποτελούν μια βάση της εικόνας του F.

Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης είναι

$$(F(e_1), F(e_2), F(e_3)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα. Δίνεται η απεικόνιση

$$F : R^4 \to R^2 \quad \text{με} \quad F(x, y, z, w) = (x + w, y + z).$$

Να δειχθεί ότι είναι γραμμική, να βρεθεί ο πυρήνας και η εικόνα της και ο πίνακας που αντιστοιχεί ως προς τις φυσικές βάσεις.
Πραγματικά έστω $u = (x, y, z) \in R^4$ με $F(u) = 0$, τότε

$$F(u) = F(x, y, z, w) = (x + w, y + z) = (0, 0)$$

συνεπώς

$$\begin{aligned} x + w &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και έχει τάξη του πίνακα 2.

Θα εισάγουμε δύο παραμέτρους για να λύσουμε το σύστημα έστω $z = \kappa$ $w = \lambda$ τότε $x = -\lambda$ και $y = -\kappa$. Επομένως η λύση του συστήματος είναι

$$(x, y, z, w) = (-\lambda, -\kappa, \lambda, \kappa) = \lambda(-1, 0, 1, 0) + \kappa(0, -1, 0, 1)$$

Τα $(-1, 0, 1, 0)$ και $(0, -1, 0, 1)$ αποτελούν βάση του $\ker(F)$. Είναι $\dim(\ker(F)) = 2$ συνεπώς $\dim(Im(F)) = 2$. Θα βρούμε δύο γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $Im(F)$

$$\begin{aligned} F(e_1) &= F(1, 0, 0, 0) = (1, 0), \\ F(e_2) &= F(0, 1, 0, 0) = (0, 1) \end{aligned}$$

τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς τα $(1, 0)$ και $(0, 1)$ παράγουν τον $Im(F)$.