Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής
Γραμμική Άλγεβρα
4η Διάλεξη
Διανυσματικοί Χώροι

Ζ.Καλογηράτου

Ορισμός Διανυσματικού Χώρου

Γραμμικός ή διανυσματικός χώρος είναι ένα ζεύγος (F, V), που αποτελείται από ένα σώμα F και ένα μη κενό σύνολο V, τέτοια ώστε:

(α) Το σύνολο V έχει μία πράξη $+$ που καλείται πρόσθεση, και το ζεύγος $(V, +)$ ικανοποιεί τα εξής:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ για όλα τα $a, b, c \in V$
2. Υπάρχει $0 \in V$:, $\quad a + 0 = 0 + a = a$ για κάθε $a \in V$
3. Για κάθε $a \in V$ υπάρχει ένα $-a \in V$ ώστε $a + (-a) = 0$
4. $a + b = b + a$ για όλα τα $a, b \in V$

Ορισμός Διανυσματικού Χώρου

(β) Το σύνολο V έχει μιά εξωτερική πράξη, συγκεκριμένα μία απεικόνιση : $F \times V \to V$, όπου σε κάθε ζεύγος (λ, a) αντιστοιχεί ένα στοιχείο του V που συμβολίζεται με λa. Η πράξη αυτή καλείται αριθμητικός πολλαπλασιασμός και ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$ για όλα τα $\lambda \in F, \quad a, b \in V$
2. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ για όλα τα $\lambda, \mu \in F, \quad a \in V$
3. $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ για όλα τα $\lambda, \mu \in F, \quad a \in V$
4. $1a = a$ για όλα τα $a \in V$

Αν το ζεύγος (F, V) είναι διανυσματικός χώρος λέμε συνήθως ότι ο V είναι διανυσματικός χώρος επί του σώματος F, ή απλούστερα ότι ο V είναι διανυσματικός χώρος. Τα στοιχεία του V καλούνται **διανύσματα** και τα στοιχεία του F **αριθμητικοί συντελεστές**. Τα στοιχεία του F συμβολίζονται με μικρά ελληνικά γράμματα ενώ του V με μικρά λατινικά γράμματα υπογραμισμένα ή με έντονη γραφή.

Ο διανυσματικός χώρος R^n

Θεωρούμε σαν σώμα F το σύνολο των πραγματικών αριθμών R, και σαν V το κατρεσιανό γινόμενο

$$R^n = R \times R \times \cdots \times R.$$

Τα στοιχεία του R^n είναι το σύνολο των διατεταγμένων $n-$αδων

$$(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n), \quad x_i \in R, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ορίζουμε τις εξής πράξεις:
πρόσθεση: $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$, $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\underline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$,

$$\underline{x} + \underline{y} \quad = \quad (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2,\, \ldots,\, x_n + y_n)$$

αριθμητικό πολλαπλασιασμό:

$$\lambda \underline{x} \quad = \quad \lambda(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n), = (\lambda x_1,\, \lambda x_2,\, \ldots,\, \lambda x_n),$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι ο R^n εφοδιασμένος με τις παραπάνω πράξεις ικανοποιεί τις ιδιότητες (α)1-4 και (β)1-4 της προηγούμενης παραγράφου και συνεπώς αποτελεί διανυσματικό χώρο.

Ορισμός Διανυσματικού υπόχωρου

Διανυσματικός υπόχωρος W ενός διανυσματικού χώρου V ονομάζεται κάθε μη κενό υποσύνολο του V το οποίο όταν εφοδιαστεί με τις πράξεις του V αποτελεί διανυσματικό χώρο.

Για παράδειγμα παίρνουμε τον ευκλείδιο χώρο R^3 όπως ορίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο και το υποσύνολο του W τέτοιο ώστε να αποτελείται από τα στοιχεία του R^3 με τελευταία συντεταγμένη ίση με το μηδέν. Δηλ.

$$W = \{(x, y, 0)^T, \quad x, y \in R\} \subset R^3$$

Για το σύνολο αυτό μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύουν οι ιδιότητες τις παραγράφου 2.1 άρα αποτελεί διανυσματικό χώρο και συνεπώς διανυσματικό υπόχωρο του R^3.

Προκειμένου να αποφασίσουμε αν ένα σύνολο αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο δεν είναι απαραίτητο να ελέγχουμε όλες τις συνθήκες της παραγράφου 2.1, ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση

Έστω V διανυσματικός χώρος, ένα μη κενό υποσύνολο W του V αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του V αν και μόνο αν

- για κάθε $\lambda, \mu \in R$ και για κάθε $u, v \in W$, ισχύει $\lambda u + \mu v \in W$

Παραδείγματα Διανυσματικών υπόχωρων

- Το σύνολο $W = \{(x_1, x_2, 0), \quad x_1, x_2 \in R\}$ αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του R^3.
  Πραγματικά, το $(0, 0, 0)$ ανήκει στον W.
  Έστω $\underline{u} = (u_1, u_2, 0)$ και $\underline{v} = (v_1, v_2, 0)$ στοιχεία του W, τότε

$$\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} = (\lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2, 0) \in W$$

- Το σύνολο $W = \{(x_1, x_2, 1), \quad x_1, x_2 \in R\}$ δεν αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του R^3.
  Πραγματικά, το $(0, 0, 0)$ δεν ανήκει στον W.
- Το σύνολο $W = \{(x_1, x_2, x_3), \quad x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 7\}$ δεν αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του R^3.
  Πραγματικά, το $(0, 0, 0)$ δεν ανήκει στον W.

- Το σύνολο $W = \{(x_1, x_2, x_3), \quad x_1 + x_2 = 0\}$ αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του R^3.
  Το $(0,0,0)$ ανήκει στον W.
  Έστω $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ και $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ στοιχεία του W, συνεπώς

  $$u_1 + u_2 = 0, \quad \text{και} \quad v_1 + v_2 = 0$$

  Για να αποτελεί ο W υπόχωρο πρέπει για $\lambda, \mu \in R$

  $$\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} = (\lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2, \lambda u_3 + \mu v_3),$$

  να ανήκει στο W. Πραγματικά

  $$(\lambda u_1 + \mu v_1) + (\lambda u_2 + \mu v_2) = \lambda(u_1 + u_2) + \mu(v_1 + v_2) = 0.$$

- Το σύνολο $W = \{(x_1, x_2, x_3), \quad 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0\}$ αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του R^3.
  Το $(0,0,0)$ ανήκει στον W.
  Έστω $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ και $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ στοιχεία του W, συνεπώς

  $$5u_1 + 3u_2 - 4u_3 = 0 \quad \text{και} \quad 5v_1 + 3v_2 - 4v_3 = 0$$

  Για να αποτελεί ο W υπόχωρο πρέπει για $\lambda, \mu \in R$

  $$\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} = (\lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2, \lambda u_3 + \mu v_3),$$

  να ανήκει στο W. Πραγματικά

  $$5(\lambda u_1 + \mu v_1) + 3(\lambda u_2 + \mu v_2) - 4(\lambda u_2 + \mu v_2) = \\ \lambda(5u_1 + 3u_2 - 4u_3) + \mu(5v_1 + 3v_2 - 4v_3) = 0$$

- Το σύνολο $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad x_1 = x_4,\ x_2 + 2x_3 = 0\}$ αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του R^4.
  Το $(0,0,0,0)$ ανήκει στον W.
  Έστω $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ και $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ στοιχεία του W, συνεπώς

$$\begin{aligned} u_1 &= u_4, \qquad & u_2 + 2u_3 = 0, \\ v_1 &= v_4, \qquad & v_2 + 2v_3 = 0 \end{aligned}$$

Για να αποτελεί ο W υπόχωρο πρέπει για $\lambda, \mu \in R$

$$\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} = (\lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2, \lambda u_3 + \mu v_3, \lambda u_4 + \mu v_4),$$

να ανήκει στο W. Πραγματικά

$$\begin{aligned} \lambda u_1 + \mu v_1 &= \lambda u_4 + \mu v_4, \\ (\lambda u_2 + \mu v_2) &+ 2(\lambda u_3 + \mu v_3) = 0 \end{aligned}$$

Γραμμικός Συνδυασμός

Έστω V διανυσματικός χώρος και

$$S = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n\}$$

ένα πεπερασμένο υποσύνολο του και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R$, το στοιχείο

$$\underline{u} = \lambda_1 \underline{u}_1 + \lambda_2 \underline{u}_2 + \cdots + \lambda_n \underline{u}_n$$

ανήκει στον V και ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** των στοιχείων του S.

Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδιασμών του S αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του V. Τον χώρο αυτό τον συμβολίζουμε με $< S >$ και τον καλούμε **υπόχωρο παραγόμενο από το** S.

Διανυσματικοί Χώροι

Εστω V διανυσματικός χώρος και

$$S = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n\}$$

ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων του V.

Γραμμική Εξάρτηση

Λέμε ότι το S είναι **γραμμικά εξαρτημένο** αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ όχι όλοι ίσοι με μηδέν, έτσι ώστε να ισχύει

$$\lambda_1 \underline{u}_1 + \lambda_2 \underline{u}_2 + \cdots + \lambda_n \underline{u}_n = 0$$

Γραμμική Ανεξαρτησία

Λέμε ότι το σύνολο S είναι **γραμμικά ανεξάρτητο** αν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένο. Με άλλα λόγια αν ισχύει η συνεπαγωγή

$$\lambda_1 \underline{u}_1 + \lambda_2 \underline{u}_2 + \cdots + \lambda_n \underline{u}_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Διανυσματικοί Χώροι

Για να εξετάσουμε την γραμμική εξάρτηση - ανεξαρτησία ελέγχουμε για ποιά λ ισχύει η σχέση:

$$\lambda_1 \underline{u}_1 + \lambda_2 \underline{u}_2 + \cdots + \lambda_n \underline{u}_n = 0 \tag{1}$$

Παραδείγματα

- Τα διανύσματα $\underline{v}_1 = (1, 5)$ και $\underline{v}_2 = (3, 15)$ του R^2 είναι γραμμικά εξαρτημένα.
  Πραγματικά ισχύει $v_2 = 3v_1$ ή $-3v_1 + v_2 = 0$.
  Άρα η σχέση (1) ισχύει για $\lambda_1 = -3$ και $\lambda_2 = 1$.
- Τα διανύσματα

  $$\underline{v}_1 = (1, 2, 3), \quad \underline{v}_2 = (-1, 0, 1), \quad \underline{v}_3 = (0, 2, 4)$$

  είναι γραμμικά εξαρτημένα.
  Παρατηρούμε ότι ισχύει

  $$(1, 2, 3) + (-1, 0, 1) - (0, 2, 4) = 0, \text{δηλ. } \underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3 = 0$$

  άρα η σχέση (1) ισχύει για

  $$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1$$

Από τις ιδιότητες των οριζουσών γνωρίζουμε ότι:

Γραμμική Ανεξαρτησία και Ορίζουσα

Όταν υπάρχει μια γραμμική σχέση μεταξύ των γραμμών ή των στηλών ενός πίνακα τότε η ορίζουσα του είναι ίση με το μηδέν.
Όταν έχουμε n διανύσματα στον R^n μπορούμε να τα θεωρήσουμε σαν στήλες ενός πίνακα.
Τότε αν η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με το μηδέν υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των διανυσμάτων αυτών συνεπώς είναι γραμμικά εξαρτημένα.
Αν η ορίζουσα είναι διάφορη του μηδέν τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παράδειγμα. Για τα παρακάτω σύνολα να ελγθεί ποιά είναι γραμμικά ανεξάρτητα

$$
\{(1,1,0)^T, \quad (1,0,1)^T, \quad (0,1,0)^T\},\\
\{(1,2,-1)^T, \quad (1,0,1)^T, \quad (2,2,0)^T\},\\
\{(1,1,0)^T, \quad (1,2,1)^T, \quad (3,0,1)^T\}
$$

Λύση Για το πρώτο σύνολο, γράφουμε τα δυανύσματα σαν στήλες και αναπτύσουμε την ορίζουσα ως προς την 1η γραμμή

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0
$$

άρα γραμμικά ανεξάρτητα.

Για το δεύτερο σύνολο, αναπτύσουμε την ορίζουσα ως προς την 3η γραμμή

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0
$$

πραγματικά το τρίτο διάνυσμα είναι το άθροισμα των δύο πρώτων.

Παράδειγμα 2. Δίνεται ότι τα διανύσματα $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Να δειχθεί ότι και τα διανύσματα

$$2\underline{x} + \underline{y}, \quad \underline{y} + 3\underline{z}, \quad \underline{x} + \underline{z}$$

είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα.

Λύση. Έστω ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί λ_1, λ_2, λ_3 έτσι ώστε

$$\begin{aligned}
\lambda_1(2\underline{x} + \underline{y}) + \lambda_2(\underline{y} + 3\underline{z}) + \lambda_3(\underline{x} + \underline{z}) &= 0 \\
2\lambda_1\underline{x} + \lambda_1\underline{y} + \lambda_2\underline{y} + 3\lambda_2\underline{z} + \lambda_3\underline{x} + \lambda_3\underline{z} &= 0 \\
(2\lambda_1 + \lambda_3)\underline{x} + (\lambda_1 + \lambda_2)\underline{y} + (3\lambda_2 + \lambda_3)\underline{z} &= 0
\end{aligned}$$

αφού τα $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα έχουμε

$$\begin{aligned}
2\lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\
\lambda_1 + \lambda_2) &= 0 \\
3\lambda_2 + \lambda_3 &= 0
\end{aligned}$$

το τελευταίο ισχύει μόνο όταν $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Βάση και Διάσταση

Εστω V διανυσματικός χώρος και

$$S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$$

ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων του V. Το S αποτελεί μια βάση του V αν είναι γραμμικά ανεξάρτητο και παράγει τον V.
Η βάση ενός δ.χ. δεν ορίζεται μονοσήμαντα αλλά όλες οι βάσεις του έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων ο οποίος καλείται διάσταση του V και συμβολίζεται $\dim V$.

Χώρος γραμμών, χώρος στηλών και τάξη πίνακα

Έστω πίνακας $A \in F^{m\times n}$.

- Οι γραμμές του είναι διανύσματα του F^n και αυτές παράγουν έναν διανυσματικό υπόχωρο του F^n που καλείται **χώρος γραμμών** του A.
- Όμοια οι στήλες του A είναι διανύσματα του F^m και αυτές παράγουν έναν διανυσματικό υπόχωρο του F^m που καλείται **χώρος στηλών** του A.
- Το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών και το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών συμπίπτουν, ο αριθμός αυτός καλείται **τάξη** του πίνακα και συμβολίζεται με $r(A)$.
- Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: ¨*Ο χώρος γραμμών και ο χώρος στηλών ενός πίνακα έχουν την ίδια διάσταση*'.
- Είναι προφανές ότι $r(A) \leq \min\{m, n\}$.

Ένας τρόπος υπολογισμού της τάξης ενός πίνακα είναι να κάνουμε γραμμοπράξεις και να τον μετατρέψουμε σε άνω τριγωνικό, τότε η τάξη του πίνακα είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του.
Διαφορετικά υπολογίζουμε όλες της ελλάσωνες ορίζουσες ξεκινώντας από την μεγαλύτερη δυνατή τάξη $k = \min\{m, n\}$ αν υπάρχει μία διάφορη του μηδέν η τάξη του πίνακα είναι k, αν είναι όλες μηδενικές υπολογίζουμε τις ελάσωνες υποορίζουσες $k-1$ τάξης αν υπάρχει μία διάφορη του μηδέν η τάξη του πίνακα είναι $k-1$, κ.ο.κ.

- Έστω V ένας δ.χ.που παράγεται από m στοιχεία, τότε κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του έχει το πολύ m στοιχεία.
- Κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του F^n έχει το πολύ n γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία.
- Αν S είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V τότε υπάρχει βάση του V που περιέχει το S.
- Έστω V δ.χ. και S μια βάση του τότε κάθε στοιχείο του V γράφεται με μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του S.
- Έστω V δ.χ. με $\dim V = n$. Αν ένα σύνολο $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ (με n στοιχεία) παράγει τον V, τότε αυτό αποτελεί βάση του.
- Έστω V δ.χ. με $\dim V = n$. Αν ένα σύνολο $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ (με n στοιχεία) είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε αυτό αποτελεί βάση του.
- Έστω V δ.χ. με $\dim V = n$ και U ένας υπόχωρος του V. Τότε $\dim U \leq \dim V$. Αν $\dim U = n$, τότε $U = V$.

Τομή και ένωση υπόχωρων

Έστω U και W διανυσματικοί υπόχωροι ενός δ.χ. V

- η τομή $U \cap W$ είναι υπόχωρος του V
- η τομή $U \cap W$ είναι υπόχωρος του W
- η τομή $U \cap W$ είναι υπόχωρος του U

Η ένωση δυο υπόχωρων δεν είναι πάντα διανυσματικός υπόχωρος, για παράδειγμα έστω

$$V_1 =< e_1 >, \quad \text{και} \quad V_2 =< e_2 >$$

το $(1,1,0) \notin V_1 \cup V_2$.

Άθροισμα και ευθύ άθροισμα υπόχωρων

Ορίζουμε το **άθροισμα** δυο υπόχωρων ως εξής

$$U + W = \{u + w | u \in U, w \in W\}$$

αυτός είναι διανυσματικός υπόχωρος του V και κάθε ένας από τους U και W είναι υπόχωρος του $U + W$.
Αν $U \cap W = \{0\}$ τότε το άθροισμα είναι **ευθύ** και συμβολίζεται με $U \oplus W$.

$$V_1 + V_2 =< e_1, e_2 >$$

Επιπλέον αν $V_3 =< e_3 >$ τότε $R^3 = V_1 + V_2 + V_3$ και μάλιστα $R^3 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.

Παράδειγμα 3

Να εξετασθεί αν τα επόμενα σύνολα διανυσμάτων αποτελούν βάσεις του R^3

(α). $\{(1,0,1)^T, (0,1,1)^T\}$

(β). $\{(1,1,0)^T, (0,1,0)^T, (0,1,1)^T\}$

(γ). $\{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T, (1,2,0)^T\}$

Να εκφράσετε το διάνυσμα $v = (1,0,2)^T$ σαν γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης.

Λύση. Η διάσταση του $\Re^3$ είναι 3, συνεπώς ένα σύνολο για να αποτελεί βάση του πρέπει να έχει 3 στοιχεία.

- Στην περίπτωση (α) είναι μόνο 2 στοιχεία.
- Στην περίπτωση (γ) τα διανύσματα είναι 4 άρα γραμμικά εξαρτημένα.

- Για την περίπτωση (β) πρέπει να ελένξουμε αν είναι γραμμικά ανεξάρτητα

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς αφού είναι και 3 αποτελούν βάση του $\Re^3$.

Θέλουμε να εκφράσουμε το v ως προς αυτή τη βάση, θα ψάξουμε για πραγματικούς αριθμούς κ, λ, μ τέτοιους ώστε:

$$\begin{aligned}(1,0,2) &= \kappa(1,1,0) + \lambda(0,1,0) + \mu(0,1,1) \quad &\Rightarrow \\ (1,0,2) &= (\kappa,\kappa,0) + (0,\lambda,0) + (0,\mu,\mu) \quad &\Rightarrow \\ (1,0,2) &= (\kappa, \kappa+\lambda+\mu, \mu) &\end{aligned}$$

Από όπου προκύπτει το σύστημα

$$\kappa = 1, \quad \kappa + \lambda + \mu = 0 \quad \mu = 2$$

με λύση

$$\kappa = 1, \quad \lambda = -3, \quad \mu = 2$$