Τμήμα Πληροφορικής και Τεχνολογίας Υπολογιστών
Γραμμική Άλγεβρα
2η Διάλεξη

Ζ.Καλογηράτου

Σε κάθε τετραγωνικό πίνακα αντιστοιχεί ένας αριθμός γνωστός σαν ορίζουσα του πίνακα. Συμβολίζουμε την ορίζουσα ενός πίνακα A με $\mid A \mid$ ή $\det(A)$ ή $\mid A \mid$ ή

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Εδώ δεν μας ενδιαφέρει να δώσουμε τον μαθηματικό ορισμό της ορίζουσας, θα ασχοληθούμε με τον τρόπο υπολογισμού της.

Η ορίζουσα ενός 2×2 πίνακα

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Πίνακες - Ορίζουσα πίνακα

Η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- Η ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα καλείται ορίζουσα n τάξης.
- Οπως φαίνεται από την ανάπτυξη της ορίζουσας τρίτης τάξης η ανάπτυξη της ορίζουσας ενός $n \times n$ πίνακα ανάγεται στον υπολογισμό n οριζουσών πινάκων τάξης $n - 1$
- στην περίπτωση της ορίζουσας του 3×3 πίνακα υπολογίσαμε 3 ορίζουσες τάξης 2.

Πίνακες - Ορίζουσα πίνακα

- Μπορούμε να αναπτύζουμε έναν πίνακα κατά μία οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη (στο παράδειγμα αναπτύξαμε κατά την πρώτη γραμμή).
- Σε κάθε στοιχείο a_{ij} του πίνακα αντιστοιχούμε τον πίνακα που προκύπτει από τη διαγραφή της i γραμμής και j στήλης.
- Στην περίπτωση του 3×3 πίνακα στο στοιχείο a_{11} αντιστοιχούμε τον υποπίνακα:

  $$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

  ο οποίος προκύπτει από διαγραφή της πρώτης γραμμής και πρώτης στήλης.
- Την ορίζουσα του πίνακα αυτού την συμβολίζουμε με D_{ij} σε αυτήν αντιστοιχεί και ένα πρόσημο το $(-1)^{i+j}$.
- Ονομάζουμε συντελεστή του στοιχείου a_{ij} και το συμβολίζουμε με A_{ij} το $(-1)^{i+j} D_{ij}$.

ανάπτυξη ως προς την i γραμμή

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

ανάπτυξη ως προς την j στήλη

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

Πίνακες - Ορίζουσα πίνακα - Ιδιότητες

Για την ορίζουσα ενός πίνακα μπορούν να αποδειχθούν εύκολα οι εξής ιδιότητες:

- Η ορίζουσα ενός πίνακα είναι ίση με την ορίζουσα του ανάστροφου του.
- Αν μιά στήλη ή μία γραμμή του πίνακα είναι μηδενική τοτε η ορίζουσα είναι ίση με το μηδέν.
- Αν ο πίνακας έχει δύο γραμμές ή δύο στήλες τοτε η ορίζουσα του είναι ίση με το μηδέν.
- Η ορίζουσα του πίνακα αλλάζει πρόσημο (αλλά όχι απόλυτη τιμή) αν αντομεταθέσουμε δύο οποιεσδήποτε γραμμές (ή στήλες) του.
- Αν πολλαπλασιάσουμε μία γραμμή (ή στήλη) ενός πίνακα με έναν αριθμό τότε και η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό αυτόν.

- Αν σε μία ορίζουσα προσθέσουμε μια γραμμή (ή στήλη) πολλαπλασιασμένη με κάποιο αριθμό σε μία άλλη γραμμή (ή στήλη) η ορίζουσα δεν αλλάζει.
- Η ορίζουσα του γινομένου δύο πινάκων είναι ίση με το γινόμενο των οριζουσών τους $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- Η ορίζουσα ενός άνω ή κάτω τριγωνικού ή διαγώνιου πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων τους.
- Η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα είναι ίση με τη μονάδα $\det(I) = 1$.
- Η ορίζουσα του αντίστροφου ενός πίνακα είναι ίση με το αντίστροφο της ορίζουσας του αρχικού $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

Παράδειγμα 1

Να δειχθεί χωρίς ανάπτυξη ότι:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3a+2b+1 \\ 2 & 4 & 2a+4b+6 \\ 1 & 3 & a+3b+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Λύση.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3a+2b+1 \\ 2 & 4 & 2a+4b+6 \\ 1 & 3 & a+3b+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2b+1 \\ 2 & 4 & 4b+6 \\ 1 & 3 & 3b+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα 2

Να δειχθεί χωρίς ανάπτυξη ότι:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

Λύση

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Παράδειγμα 3

Να δειχθεί χωρίς ανάπτυξη ότι:

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 & x+3 \\ x+4 & x+5 & x+6 & x+7 \\ x+8 & x+9 & x+10 & x+11 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0$$

Λύση

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 & x+3 \\ x+4 & x+5 & x+6 & x+7 \\ x+8 & x+9 & x+10 & x+11 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 & x+3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ x+8 & x+9 & x+10 & x+11 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 & x+3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0$$

Παράδειγμα 4

Χωρίς ανάπτυξη να βρεθεί το κ για το οποίο ισχύει:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 5b_1 & 5b_2 & 5b_3 \\ 2a_1+3b_1-7c_1 & 2a_2+3b_2-7c_2 & 2a_3+3b_3-7c_3 \end{vmatrix} =$$

$$\kappa \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

Λύση (1ος τρόπος) Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με (-2) και προσθέτουμε στην τρίτη γραμμή

$$\text{Α}' \text{ μελος} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 5b_1 & 5b_2 & 5b_3 \\ 2a_1+3b_1-7c_1 & 2a_2+3b_2-7c_2 & 2a_3+3b_3-7c_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 5b_1 & 5b_2 & 5b_3 \\ 3b_1-7c_1 & 3b_2-7c_2 & 3b_3-7c_3 \end{vmatrix}$$

μπορούμε από την 2η γραμμή να βγάλουμε το 5 έξω από την ορίζουσα

$$\text{Α}' \text{ μελος} = 5\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 3b_1-7c_1 & 3b_2-7c_2 & 3b_3-7c_3 \end{vmatrix}$$

και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την 2η γραμμή με (-3) και προσθέτουμε στην τρίτη γραμμή

$$\text{Α}' \text{ μελος} = 5\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ -7c_1 & -7c_2 & -7c_3 \end{vmatrix}$$

τέλος βγάζουμε το (-7) έξω από την ορίζουσα

$$\text{Α}' \text{ μελος} = 5\,(-7)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

άρα $\kappa = -35.$

Λύση (2ος τρόπος)

$$
\text{Α΄ μελος} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 5b_1 & 5b_2 & 5b_3 \\ 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 5b_1 & 5b_2 & 5b_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \end{vmatrix} +
$$

$$
+ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 5b_1 & 5b_2 & 5b_3 \\ -7c_1 & -7c_2 & -7c_3 \end{vmatrix} =
$$

$$
= 0 + 0 \qquad + -35 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}
$$

Πίνακες - Αντίστροφος πίνακα

Με τη βοήθεια των οριζουσών μπορούμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα. Απαραίτητη προυπόθεση για την ύπαρξη του αντιστρόφου είναι να έχει ο πίνακας μη μηδενική ορίζουσα. Ενας πίνακας που έχει μηδενική ορίζουσα λέμε ότι είναι μη **αντιστρέψιμός ή ιδιάζων**. Αντίστροφα ένας πίνακας με μη μηδενική ορίζουσα έχει μονοσήμαντα ορισμένο αντίστροφο και καλείται **αντιστρέψιμος ή μη ιδιάζων**.
Πρώτα θα ορίσουμε τον πίνακα που ονομάζεται προσαρτημένος (adjoint) του πίνακα A και συμβολίζεται με $adj(A)$. Υπενθιμίζουμε τους συντελεστές που ορίσαμε προηγούμενα $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ ο πίνακας είναι ο ανάστροφος του πίνακα που δημιουργούν οι συντελεστές αυτοί.

$$adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Ισχύει ότι το γινόμενο ενός πίνακα επί τον προσαρτημένο του είναι ίσο με τον μοναδιαίο πίνακα πολλαπλασιασμένο με την ορίζουσα του αρχικού πίνακα. Δηλ. $A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = \det(A) I$

Υπολογισμός του αντίστροφου με ορίζουσες

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, adj(A)$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (2-1) + (-1+2) = 2 \neq 0$$

άρα ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad D_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad D_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad D_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Τελικά:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα. Δίνετε η σχέση $A \cdot X \cdot B = I_3$ όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

να βρεθεί ο πίνακας X.

Λύση. Για τους πίνακες A και B υπολογίζουμε $\det(A) = -4$ και $\det(B) = 4$, άρα και οι δύο έχουν αντίστροφο.

$$\begin{aligned} A \cdot X \cdot B = I_3 &\quad \Rightarrow \\ A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot I_3 &\quad \Rightarrow \\ X \cdot B = A^{-1} &\quad \Rightarrow \\ X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1} &\quad \Rightarrow \\ X = (B \cdot A)^{-1} & \end{aligned}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } (B \cdot A)^{-1} = \frac{-1}{16} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 11 \\ -6 & 4 & -6 \\ 7 & -10 & 15 \end{pmatrix}$$