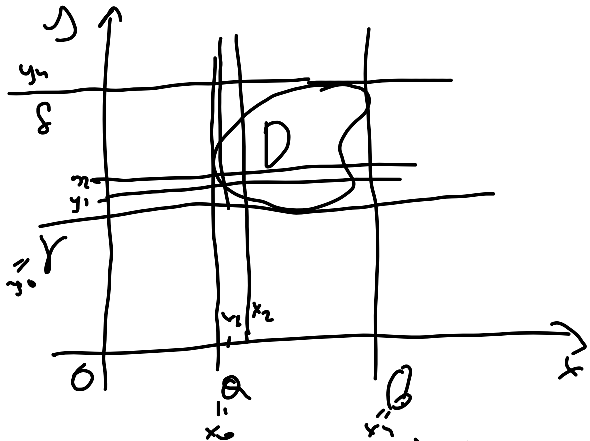
Ορισμός του διπλού ολοκληρώματος



Θεωρούμε μια φραγμένη συνάρτηση $f=f(x,y)$ με πεδίο ορισμού μια κλειστή περιοχή D.
Φέρνουμε ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ κ' $y=\gamma$, $y=\delta$

Παίρνοντας σημεία $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ διαιρούμε το διάστημα $[a,b]=[x_0,x_n]$. Αντίστοιχα διαιρούμε το διάστημα $[\gamma,\delta]=[y_0,y_m]$ με σημεία $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$. Άρα n υποδιαστήματα στο $[a,b]$ και m υποδιαστήματα στο $[\gamma,\delta]$. Συνολικά τα σημεία από $y_0,\dots,y_m$ είναι m+1 κ' από $x_0,\dots,x_n$ είναι n+1

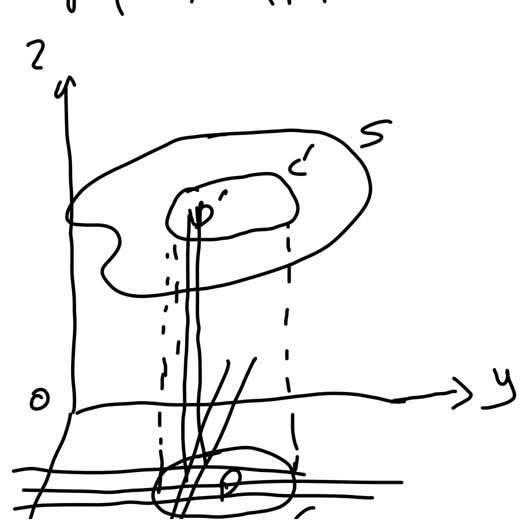
Σχηματίζονται στοιχειώδη ορθογώνια E_k $k=1,2,\dots,p$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ Δεχόμενοι την διαμέρισης

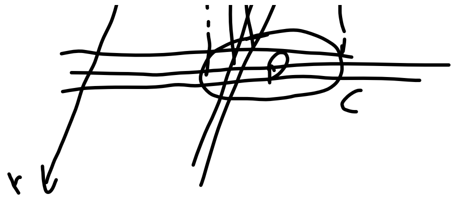
$n \to \infty$, $m \to \infty$

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{p} f(x_k, y_k) \cdot E_k \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = V$$

Γεωμετρική ερμηνεία του διπλού ολοκληρώματος



Στο Oxy έχουμε έναν κλειστό χώρο D που περικλείεται από μια κλειστή καμπύλη C. Μια φραγμένη συνάρτηση $z=f(x,y)$ με πεδίο ορισμού την περιοχή D, παριστάνει μια επιφάνεια S.
Αν από τα σημεία της C φέρουμε παράλληλες ευθ προς την Oz, τότε



Αν από τα σημεία της ... παράλληλες προς την Oz, τότε δημιουργούμε μια κυλινδρική επιφάνεια

να τέμνει την S κατά καμπύλη C'. Η καμπύλη C' περικλείει μια περιοχή D' της S. Συμβολίζουμε με V τον όγκο του στερεού με βάσεις D, D' & παράπλευρη επιφάνεια την κυλινδρική.

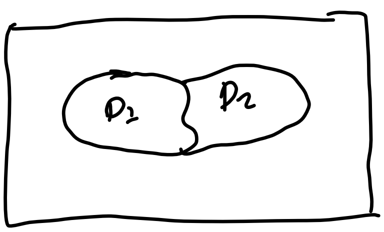
Ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος

1/ Αν $f(x,y)$ συνεχής στην περιοχή D τότε είναι και ολοκληρώσιμη

δηλ. $\exists \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

2/ $$\iint_D (\lambda f + \mu g)\,dx\,dy = \lambda \iint_D f \cdot dx\,dy + \mu \iint_D g\,dx\,dy$$

$f = f(x,y)$ $\quad g = g(x,y)$ $\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

3/ 

$D = D_1 \cup D_2$

(δεν υπάρχουν κοινά εσωτερικά σημεία)

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

4/ Αν η $f(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμη στην περιοχή D, τότε και η $|f(x,y)|$ είναι ολοκληρώσιμη στην D

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$$

5/ Αν D είναι ορθογώνιο $a \le x \le b$, $\gamma \le y \le \delta$ και ισχύει

[illegible]

5/ Αν D είναι ορθογώνιο ...

$f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$ τότε

$$\iint_D g(x)\cdot h(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_\gamma^\delta h(y)\,dy\right)$$

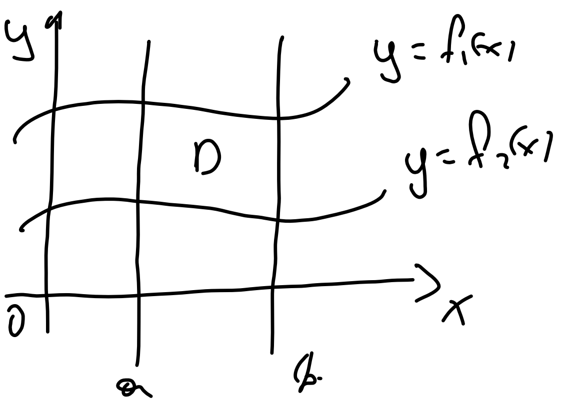
6/ Αν $f(x,y) \geq 0$ τότε $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \geq 0$

7/ Αν $f(x,y) \geq g(x,y)$ τότε $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \geq \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$

8/ $\iint_D dx\,dy = E(D)$ (εμβαδόν της περιοχής D)

και γενικά $\iint_D c\,dx\,dy = c\cdot E(D)$

Υπολογισμός του διπλού ολοκληρώματος



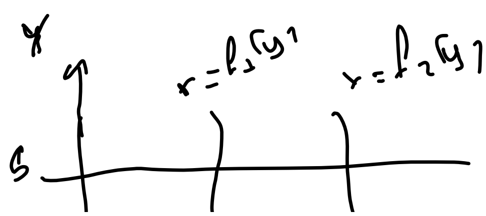
Αν η περιοχή ολοκλήρωσης D περικλείεται από τις ευθείες $x=a$, $x=b$ και τις καμπύλες $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$ $a \leq x \leq b$

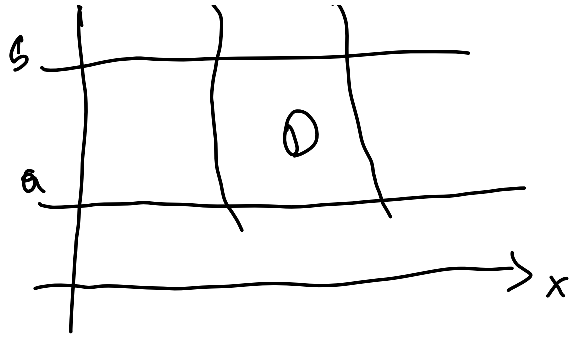
και $f_2(x) \leq y \leq f_1(x)$

τότε το $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{f_2(x)}^{f_1(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

όπου το x στο $\int_{f_2(x)}^{f_1(x)} f(x,y)\,dy$ είναι μια σταθερά.



Αν $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $a \leq y \leq b$



Αν $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad a \le y \le b$

κ' $f_1(y) \le x \le f_2(y)\}$

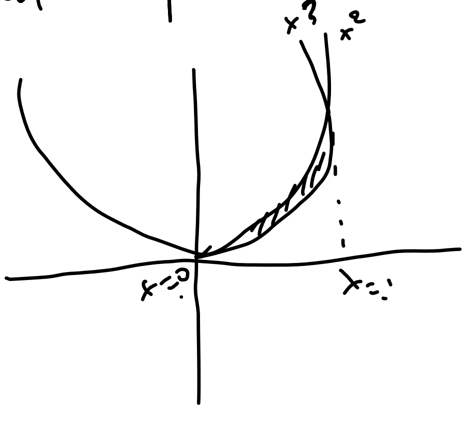
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Αν $D = D_1 \cup D_2$ κ' D_1 κ' D_2 έχουν μορφή σαν τις παραπάνω.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $I = \iint (x^2 + xy + 5y^2)\,dx\,dy$, όπου D το χωρίο μεταξύ των καμπυλών $y = x^2$ $y = x^3$.



$x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0$

$x = 0$

ή

$x = 1$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le x \le 1,\ x^3 \le y \le x^2$

$$\iint_D (x^2 + xy + 5y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} (x^2 + xy + 5y^2)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + x \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{5}{3} y^3 \right]_{x^3}^{x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + x\cdot\frac{y^2}{2} + \frac{5}{3}y^3 \right]_{x^3} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\left(x^2\cdot x^2 + \frac{x(x^2)^2}{2} + \frac{5}{3}(x^2)^3 \right) - \left(x^2\cdot x^3 + x\frac{(x^3)^2}{2} + \frac{5}{3}(x^3)^3 \right) \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^5}{2} + \frac{5}{3}x^6 - x^5 - \frac{x^7}{2} - \frac{5}{3}\cdot x^9 \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^4 - \frac{x^5}{2} + \frac{5}{3}x^6 - \frac{1}{2}x^7 - \frac{5}{3}x^9 \right) dx =$$

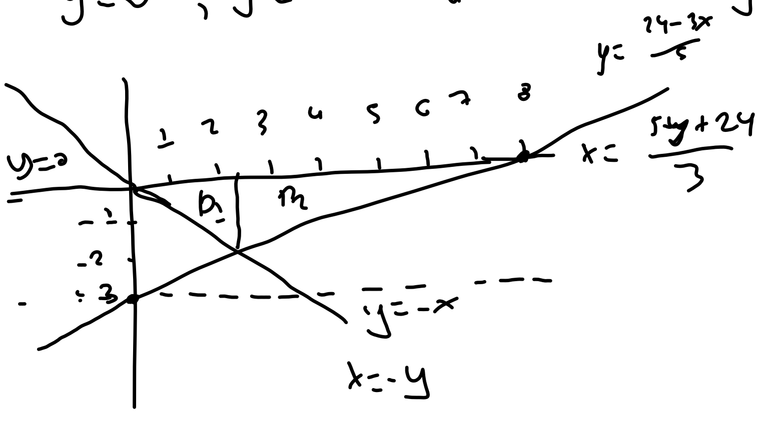
$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{12} \quad \frac{5x^7}{3\cdot 7} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^8}{8} - \frac{\cancel{5}}{3}\cdot\frac{x^{10}}{\cancel{10}} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{12} + \frac{5}{21} - \frac{1}{16} - \frac{1}{6} = \dots$$

Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί το $I = \iint_D y^2\,dx\,dy$, όπου D είναι τριγωνικό χωρίο με πλευρές

$y=0$, $y=-x$ και $3x-5y-24=0$



Αν $y=0 \Rightarrow 3x-5\cdot 0-24=0 \Leftrightarrow$
$3x=24 \Leftrightarrow x=8$
$(8,0)$

Αν $y=-x$ $\quad 3x-5(-x)-24=0 \Leftrightarrow$
$8x-24=0 \Leftrightarrow$
$8x=24 \Leftrightarrow x=3$
$(3,-3)$

$D: \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad -3\le y\le 0 \quad -y\le x\le \frac{5y+24}{3}$

$\int^{0} \int^{\frac{5y+24}{3}}$

$D = \{(x,y) \in$ …

$$\iint_D y^2\,dx\,dy = \int_{-3}^{0}\left(\int_{-y}^{\frac{5y+24}{3}} y^2\,dx\right)dy$$

$$D = D_1 \cup D_2$$

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad 0 \le x \le 3 \quad , \; -x \le y \le 0\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad 3 \le x \le 8 \quad \frac{3x-24}{5} \le y \le 0\}$$

$$\iint_D y^2\,dx\,dy = \iint_{D_1} y^2\,dx\,dy + \iint_{D_2} y^2\,dx\,dy$$

$$= \int_0^3\left(\int_{-x}^{0} y^2\,dy\right)dx + \int_3^8\left(\int_{\frac{3x-24}{5}}^{0} y^2\,dy\right)dx$$

Μετασχηματισμοί διπλού ολοκληρώματος

Αν έχουμε $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$ τότε ισχύει

Αν έχουμε $x=g(u,v)$, $y=h(u,v)$ τότε ισχύει

$$dx\,dy = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv \quad (\text{Ιακωβιανή ορίζουσα})$$

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f\big(g(u,v), h(u,v)\big)\cdot\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv$$

Παράδειγμα.

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $x+y=u$, $y=uv$ να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D e^{\frac{y}{x+y}}\,dx\,dy$$

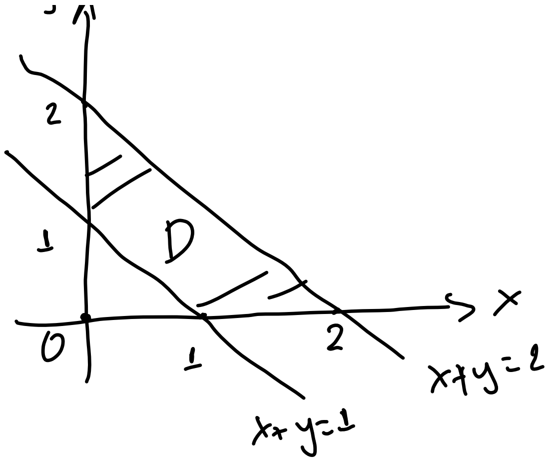
όπου D η περιοχή που περικλείεται από τις ευθείες $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, $x+y=2$

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u\cdot(1-v)-(-u)\cdot v = u - \cancel{uv} + \cancel{uv} = u$$

$y = u\cdot v$

$x = u - y = u - uv = u(1-v)$

$\left.\begin{matrix} x+y=u \\ x+y=1 \\ x+y=2 \end{matrix}\right\}\ \begin{matrix} u=1 \\ u=2. \end{matrix} \qquad 1\le u\le 2$



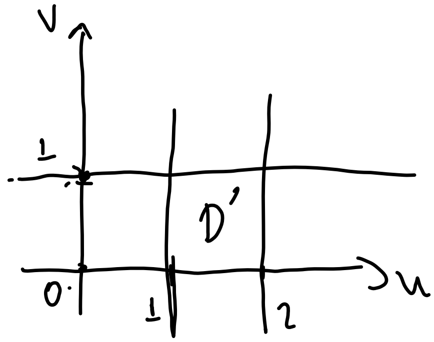
$$\left.\begin{aligned} x+y&=1 \\ x+y&=2 \end{aligned}\right\} \; u=2.$$

$$\left.\begin{aligned} x&=0 \\ x&=u(1-v) \end{aligned}\right\} \; u(1-v)=0 \iff u=0 \text{ ή } v=1$$

$$\left.\begin{aligned} y&=u\cdot v \\ y&=0 \end{aligned}\right\} \; u\cdot v=0 \iff u=0 \text{ ή } v=0$$

$$0\le v\le 1$$

$$D'=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ 1\le u\le 2,\ 0\le v\le 1\}$$



$$x+y=u$$

$$y=u\cdot v$$

$$I=\iint_D e^{\frac{y}{x+y}}\,dx\,dy=\iint_{D'} e^{\frac{uv}{u}}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv=$$

$$=\iint_{D'} e^{v}\cdot u\,du\,dv$$

$$=\int_1^2\left(\int_0^1 e^{v}\cdot u\,dv\right)du=\int_1^2\left[u\cdot e^{v}\right]_0^1 du=$$

$$=\int_1^2\left[u\cdot e^{1}-u\cdot e^{0}\right]du=\int_1^2(u\cdot e-u)\,du=$$

$$=\int_1^2 ue\,du-\int_1^2 u\,du=\frac{u^2}{2}e\Big|_1^2-\frac{u^2}{2}\Big|_1^2=$$

$$= \int_1^2 ue\,du - \int_1^2 u\,du = \frac{u^2}{2}e\Big|_1^2 - \frac{u^2}{2}\Big|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^2}{2}\cdot e - \frac{1^2}{2}e\right) - \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = 2e - \frac{e}{2} - \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{3}{2}e - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(e-1)$$

Μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες

Αν έχουμε $x, y \to$ $x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\sin\theta$ $\rho > 0$

$x = \rho\,\text{συν}\theta$ ή $y = \rho\,\text{ημ}\theta$ $0 \le \theta \le 2\pi$

$$dxdy = \left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right| d\rho d\theta = \rho\, d\rho d\theta$$

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta - (-\rho\cdot\sin^2\theta) =$$

$$= \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta =$$

$$= \rho(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}) =$$

$$= \rho$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} g(\rho,\theta)\,\rho\, d\rho d\theta$$

Παράδειγμα

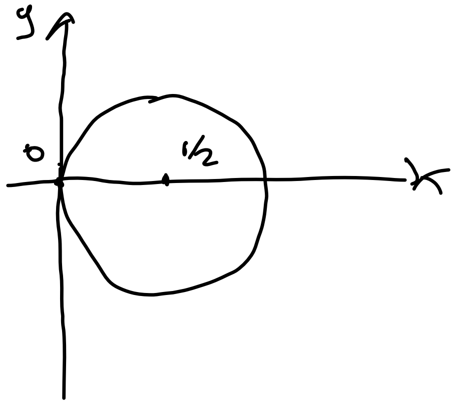
Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$,

όπου D είναι η περιοχή του R^2 με $x^2+y^2 \le x$

$x^2+y^2 \le x \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 \le 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\frac{1}{2}x + y^2 \le 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le 0 \Leftrightarrow$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ← εξίσωση του κύκλου



κύκλος $K\left(\frac{1}{2}, \rho\right)$ $\rho = \frac{1}{2}$.

$x=\rho\cos\theta \quad , y=\rho\sin\theta$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\le\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\rho\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\rho\sin\theta\right)^2\le\frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\rho^2\cos^2\theta - \cancel{2}\frac{\rho}{\cancel{2}}\cos\theta + \rho^2\sin^2\theta + \cancel{\frac{1}{4}} = \cancel{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow$

$\rho^2(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=1}) - \rho\cos\theta = 0 \Leftrightarrow$

$\rho^2-\rho\cos\theta=0 \Leftrightarrow$

$\rho(\rho-\cos\theta)=0 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\rho=0\\ \rho=\cos\theta.\end{matrix}\right\} \quad 0\le\rho\le\cos\theta$

$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$D' = \left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2, -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2} \ \text{ί}\ 0\le\rho\le\cos\theta\right\}$

$I = \iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \left(dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\theta\right) =$

$= \iint \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{1-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta}} = \iint_{D'} \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{1-\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}} =$

$$= \iint_{D'} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta}} = \iint_{D'} \sqrt{1-\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}$$

$$= \iint_{D'} \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{1-\rho^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos\theta} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho \right) d\theta$$

$$\int \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho = \int -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\, dk = \int \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot k^{-1/2}\, dk =$$

$1-\rho^2 = k \Leftarrow -2\rho d\rho = dk$

$\rho d\rho = -\frac{dk}{2}$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{k^{-1/2+1}}{-1/2+1} = \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\cdot\frac{k^{1/2}}{1/\cancel{2}} =$$

$$= -k^{1/2} = -(1-\rho^2)^{1/2}$$

$$\int_0^{\cos\theta} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho = -(1-\rho^2)^{1/2}\Big|_0^{\cos\theta} = -\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)\Big|_0^{\cos\theta} =$$

$$= -\left(\sqrt{1-\cos^2\theta} - \sqrt{1-0^2}\right) = -\left(\sqrt{\sin^2\theta} - 1\right) =$$

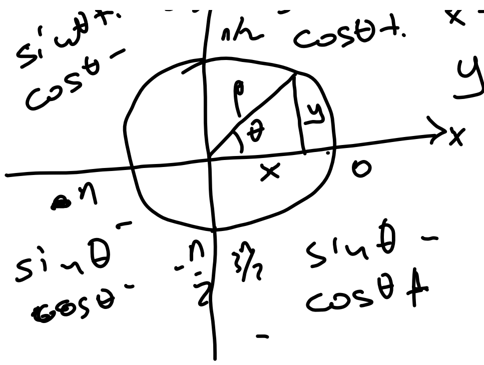
$$= -\left(|\sin\theta| - 1\right)$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos\theta} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho \right) d\theta = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(|\sin\theta| - 1\right) d\theta =$$

$$= -\left(\int_{-\pi/2}^{0} (|\sin\theta|-1)\, d\theta + \int_0^{\pi/2} (|\sin\theta|-1)\, d\theta \right) =$$

$x = \rho\cos\theta$ $\quad \cos\theta = \frac{x}{\rho}$

$y = \rho\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{\rho}$



$$x = \rho\cos\theta$$

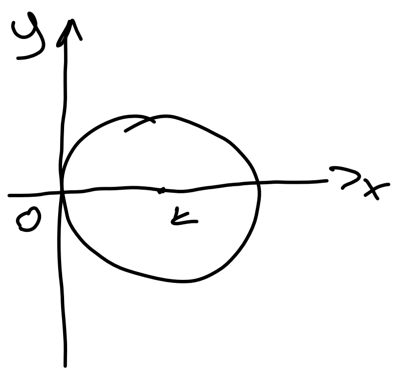
$$y = \rho\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{\rho}$$

$$= -\left(\int_{-\pi/2}^{0} (-\sin\theta - 1)\, d\theta + \int_{0}^{\pi/2} (\sin\theta - 1)\, d\theta \right) =$$

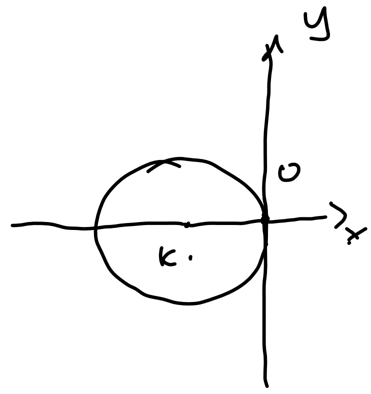
$$= -\left((\cos\theta - \theta)\Big|_{-\pi/2}^{0} + (-\cos\theta - \theta)\Big|_{0}^{\pi/2} \right) =$$

$$= -\left((1 - 0) - \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\left(-0 - \frac{\pi}{2}\right) - (-1 - 0)\right) \right) =$$

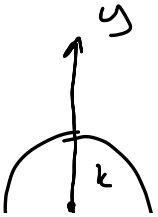
$$= \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{2} - 1 = 2\frac{\pi}{2} - 2 = \pi - 2$$

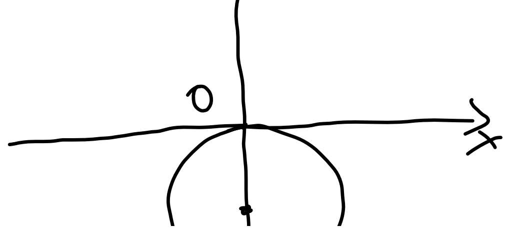


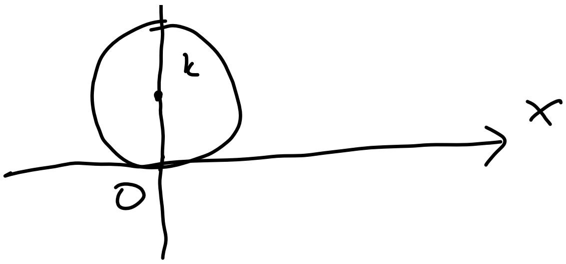
$$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

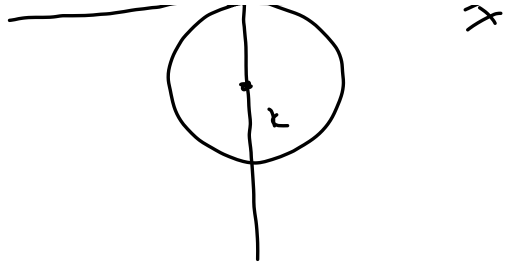


$$\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$$

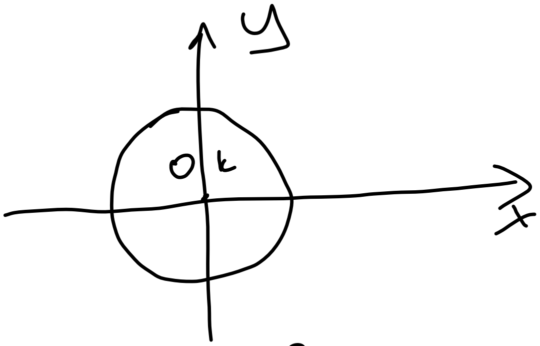








$0 \le \theta \le \pi$ $\qquad$ $\pi \le \theta \le 2\pi$



$0 \le \theta \le 2\pi$

$-\pi \le \theta \le \pi$

- Αν έχουμε $D: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2$
  τότε θέτουμε $x=x_0+\rho\cos\theta \quad y=y_0+\rho\sin\theta$
- Αν έχουμε περιοχή ολοκλήρωσης την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
  τότε θέτουμε $x=a\rho\cos\theta \;, y=b\rho\sin\theta$.

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix} = ab\rho\cos^2\theta + ab\rho\sin^2\theta$$

$$= ab\rho(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

$$= ab\rho$$

$$dx\,dy = ab\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{\cancel{a^2}\rho^2\cos^2\theta}{\cancel{a^2}} + \frac{\cancel{b^2}\rho^2\sin^2\theta}{\cancel{b^2}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=1 \Leftrightarrow \rho^2=1 \Leftrightarrow \rho=1 \qquad \rho\in[0,1]$$

$$\theta\in[0,2\pi]$$

iu

- Υπολογισμός εμβαδού και όγκου με διπλό ολοκλήρωμα.

Το εμβαδόν μιας κλειστής περιοχής D δίνεται

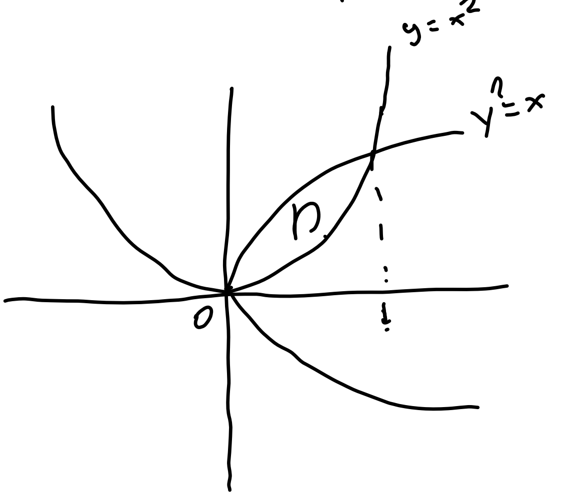
$$E(D) = \iint_D dx\,dy$$

Αν η D περιγράφεται από καμπύλες που έχουν εξισώσεις πολικές συντεταγμένες.

$$E(D) = \iint_D \rho\, d\rho\, d\theta$$

Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις παραβολές $y^2 = x$, $x^2 = y$



$$x^2 = y \ \& \ y^2 = x$$
$$x^4 = y^2 \iff x^4 = x \iff$$
$$x^4 - x = 0 \iff$$
$$x(x^3 - 1) = 0$$
$$x(x-1)(x^2+x+1) = 0$$
$$x = 0$$
ή
$$x = 1$$

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \le x \le 1, \quad x^2 \le y \le \sqrt{x}$$

$$E(D) = \iint_D dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right) dx = \int_0^1 \left(y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$= \int_0 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left[\ldots - \frac{x^3}{3} \right]_0 - \frac{\ldots}{3} \ldots$$

$-$ $S: z = f(x,y)$ D ορθή προβολή της στο Oxy

$$V = \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$$

Αν έχουμε $z = f_1(x,y)$ $z = g(x,y)$

$$V = \iint_D |f(x,y) - g(x,y)|\,dx\,dy$$

Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από το παραβολοειδές $z = x^2+y^2$ κ' το επίπεδο $2x+4y+z-4=0$

$f(x,y) = x^2+y^2$ $g(x,y) = 4-2x-4y$

$$V = \iint_D |f(x,y) - g(x,y)|\,dx\,dy$$

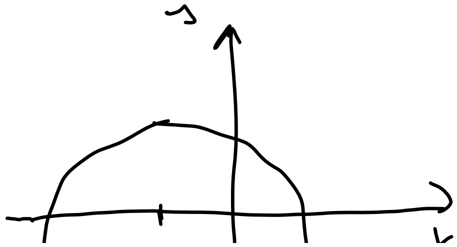
$$\left.\begin{array}{l} z = x^2+y^2 \\ z = 4-2x-4y \end{array}\right\} \quad x^2+y^2 = 4-2x-4y \Leftrightarrow$$

$$x^2+2x + y^2+4y = 4 \Leftrightarrow$$

$$(x^2+2x+1)-1 + (y^2+2\cdot 2y+4)-4 = 4 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 = 4 \Leftrightarrow$$

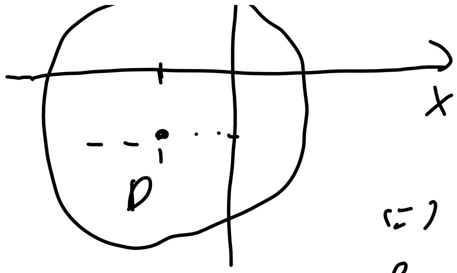
$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9 = 3^2$$



$x+1 = \rho\cos\theta$

$y+2 = \rho\sin\theta.$

$$\ldots (\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2 = 3^2 \Leftrightarrow$$



$y+2 = \rho\sin\theta$

$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2 = 3^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta = 3^2 \Leftrightarrow \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 3^2 \Leftrightarrow$

$\rho^2 = 3^2 \Leftrightarrow \rho = \pm 3 \quad 0 \le \rho \le 3 \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$D' = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le \rho \le 3,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$

$$V = \iint_D |f(x,y) - g(x,y)|\,dx\,dy = \iint_D |x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4|\,dx\,dy$$

$$\iint_D |(x+1)^2 + (y+2)^2 - 9|\,dx\,dy = \iint_{D'} |\rho^2 - 9|\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

$$\iint (9-\rho^2)\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^3 (9\rho - \rho^3)\,d\rho \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\int \left(\int \quad d\theta \right) d\rho$$

$$= \left(9\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^3 - \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^3 \right) \theta\Big|_0^{2\pi} = \ldots$$

$$= \left(\frac{9}{2}\cdot 9 - \frac{1}{4}\cdot 3^4 \right) 2\pi = \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4} \right)\cdot 2\pi = \frac{81}{\cancel{4}}\cdot\cancel{2}\pi = \frac{81}{2}\pi$$

- Μάζα, κέντρο μάζας και ροπή αδράνειας.

- Μάζα
Σε μια επίπεδη περιοχή D του επιπέδου Oxy έχει κατανεμηθεί μάζα με πολύ μικρό πάχος. Αν σε κάθε σημείο (x,y) της D η πυκνότητα της μάζας είναι $P(x,y)$ τότε η συνολική μάζα της D είναι

$$m = \iint_D P(x,y)\,dx\,dy$$

- κέντρο μάζας.
είναι το σημείο της D με συντεταγμένες

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\,P(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D P(x,y)\,dx\,dy} \qquad \bar{y} = \frac{\iint_D y\,P(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D P(x,y)\,dx\,dy}$$

Αν $P(x,y)$ = σταθερή ή ομογενής

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy} \qquad \bar{y} = \frac{\iint_D y\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}$$

- Η ροπή αδράνειας της περιοχής D
α) ως προς τον άξονα Ox

$$I_x = \iint_D y^2 P(x,y)\,dx\,dy$$

β) ως προς τον άξονα Oy

$$I_y = \iint_D x^2 P(x,y)\,dx\,dy$$

γ) ως προς τον άξονα Oz ή προς το O

$$I_z = I_x + I_y = \iint_D (x^2+y^2)\, P(x,y)\,dx\,dy$$

δ) ως προς ευθεία L

$$I_L = \iint_D d^2(x,y)\, P(x,y)\,dx\,dy$$

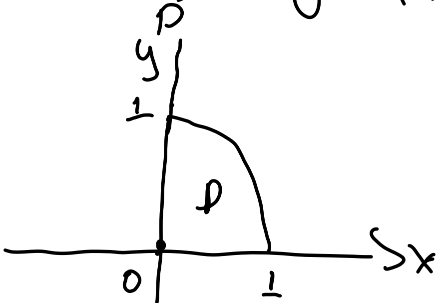
$d(x,y)$ είναι η απόσταση του $M(x,y)$ από την L

Παράδειγμα

Να προσδιοριστεί το κέντρο μάζας του ομογενούς χωρίου

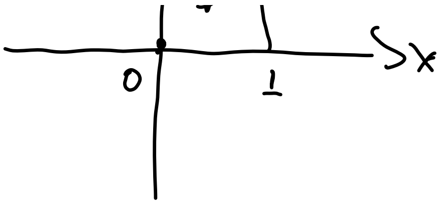
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}.$$

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy = E(D)} \qquad \bar{y} = \frac{\iint_D y\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy = E(D)}$$



$$E(D) = \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{\pi}{4} \qquad R = 1$$

$$x^2+y^2 = 1 \iff y = \sqrt{1-x^2}$$



$x^2+y^2=1 \Leftrightarrow y=\sqrt{1-x^2}$

$0\le y\le \sqrt{1-x^2}$

$0\le x\le 1$

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy\right)dx =$$

$$\int_0^1 \left(x\cdot y\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \int_0^1 \left(x\cdot\sqrt{1-x^2}\right)dx$$

$1-x^2=k \Leftrightarrow$

$-2x\,dx = dk$

$x\,dx = -\frac{dk}{2}$

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\int \frac12\sqrt{k}\,dk = \int -\frac12\, k^{1/2}\,dk =$$

$$= -\int\frac12\cdot\frac{k^{1/2+1}}{1/2+1}\,dk = -\int \cancel{\frac12}\,\frac{k^{3/2}}{\cancel{3/2}} = -\frac13\left(1-x^2\right)^{3/2}\Big|_0^1$$

$$= -\left(\frac13(0-1)\right) = \frac13$$

$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\right)dx = \int_0^1\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}\right)dx =$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{2}\,dx = \frac12\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac12\left(1-\frac13\right) = \cancel{\frac12}\cdot\frac{\cancel{2}}{3} = \frac13$$

$$(\bar x,\bar y) = \left(\frac{\frac13}{\frac{\pi}{4}}, \frac{\frac13}{\frac{\pi}{4}}\right) = \left(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi}\right)$$

Τριπλά Ολοκληρώματα

$f(x,y,z)$ φραγμένη π.ο μια κλειστή περιοχή $D \in \mathbb{R}^3$
η περιέχεται σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

$\{ a \le x \le b,\ \gamma \le y \le \delta,\ \kappa \le z \le \lambda \}$

Θεωρούμε σημεία $x_i \in [\underset{x_0}{a}, \underset{x_n}{b}]$, $y_j \in [\underset{y_0}{\gamma}, \underset{y_m}{\delta}]$, $z_\nu \in [\underset{z_0}{\kappa}, \underset{z_n}{\lambda}]$

Με τα επίπεδα $x = x_i$ $\perp$ στον άξονα $x'x$
$y = y_j$ $\perp$ // $y'y$
$z = z_\nu$ $\perp$ // $z'z$

V_ℓ τους όγκους των μικρών παραλληλ.. $\ell = 1, 2 \ldots p$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ $\Delta z_\nu = z_\nu - z_{\nu-1}$

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{\Delta \to 0} \sum\limits_{\ell=1}^{p} f(x_\ell, y_\ell, z_\ell) V_\ell$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

- Υπολογισμός των τριπλών ολοκληρωμάτων.

Για την κλειστή περιοχή D του χώρου

1/ $D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x),\ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y) \}$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$

ή

4

2/ $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, a \le y \le b,\ f_1(y) \le z \le f_2(y),\ g_1(y,z) \le x \le g_2(y,z)\}$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} \left(\int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dz \right) dy$$

Για την 1 η ορθή προβολή του D στο Oxy είναι

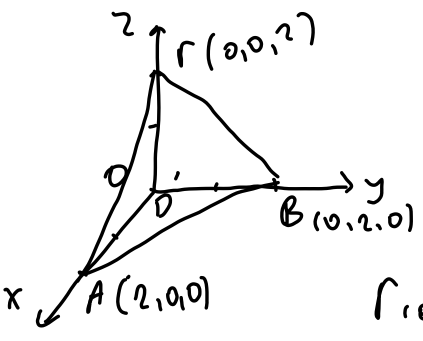
$D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$

Για τη 2 η ορθή προβολή του D στο Oyz είναι

$D' = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \le y \le b,\ f_1(y) \le z \le f_2(y)\}$

Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί το $I = \iiint x^2 yz\,dx\,dy\,dz$ όπου D η περιοχή του χώρου που περικλείεται από τα επίπεδα $x=0,\ y=0,\ z=0$ $x+y+z=2$.



$x=0 \Rightarrow$ επίπεδο Oyz

$y=0 \Rightarrow$ -//- Ozx

$z=0 \Rightarrow$ -//- Oxy

D είναι το τετράεδρο $AB\Gamma O$

Για να βρω την ευθεία AB

$$y - y_B = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_B) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{2-0}{0-2}(x-0) \Leftrightarrow y - 2 = -x \Rightarrow$$

$$y = -x + 2$$

$x_B - x_A$

$y = -x + 2$

$D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 2 \ , \ 0 \leq y \leq -x+2\}$

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ 0 \leq x \leq 2 \ , \ 0 \leq y \leq -x+2 \ , \ 0 \leq z \leq 2-x-y$

$$\iiint_D x^2yz\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 \left(\int_0^{-x+2} \left(\int_0^{2-x-y} x^2yz\,dz \right) dy \right) dx =$$

$$\int_0^{2-x+y} x^2yz\,dz = (x^2y) \frac{z^2}{2} \Big|_0^{2-x-y} = \frac{1}{2} x^2y(2-x-y)^2 =$$

$$(2-x-y)^2 = ((2-x)-y)^2 = (2-x)^2 - 2(2-x)\cdot y + y^2 =$$

$$= (2^2 - 2 \cdot 2x + x^2) - 4y + 2xy + y^2 =$$

$$= 4 - 4x + x^2 - 4y + 2xy + y^2$$

$$= \frac{1}{2} x^2y(x^2 + y^2 + 4 + 2xy - 4x - 4y)$$

$$\int_0^{-x+2} \frac{1}{2} x^2y \ (x^2 + y^2 + 4 + 2xy - 4x - 4y)\,dy$$

$$\frac{x^2}{2} \int_0^{-x+2} (x^2y + y^3 + 4y + 2xy^2 - 4xy - 4y^2)\,dy =$$

$$\frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{4}{2}y^2 + \frac{2x}{3} \cdot y^3 - 2xy^2 - \frac{4}{3}y^3 \right) \Big|_0^{-x+2} =$$

$$= \frac{1}{4}x^4(2-x)^2 + \frac{1}{8}x^2(2-x)^4 + x^2(2-x)^2 + \frac{x^3}{3}(2-x)^3 - x^3(2-x)^2 - \frac{2}{3}x^2(2-x)^3$$

$$\frac{x^2}{2}\left(\ldots\right) x^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}(2-x)^2 + 1 + \frac{1}{3}x(2-x) - x - \frac{2}{3}(2-x) \right) =$$

$$= x^2(2-x)^2\left(\frac14 x^2+\frac18(2-x)^2+1+\frac13 x(2-x)-x-\frac23(2-x)\right)=$$

$$=x^2(2-x)^2\left(\frac14x^2+\frac18(4-4x+x^2)+1+\frac23x-\frac13x^2-x-\frac43+\frac{2x}{3}\right)=$$

$$=x^2(2-x)^2\left(\frac14x^2+\frac12-\frac12x+\frac18x^2+1+\frac23x-\frac13x^2-x-\frac43+\frac{2x}{3}\right)$$

$$=x^2(2-x)^2\left(x^2\left(\frac14+\frac18-\frac13\right)+x\left(-\frac12+\frac23-1+\frac23\right)+1+\frac12-\frac43\right)=$$

$$=x^2(2-x)^2\left(x^2\left(\frac1{24}\right)+x\left(-\frac16\right)+\frac16\right)=$$

$$-\frac13+\frac12=-\frac26+\frac36=\frac16$$

$$=\frac1{24}x^2(2-x)^2(x^2-4x+4)$$

$$=\frac1{24}x^2(2-x)^2(x-2)^2=\frac1{24}x^2(x-2)^4$$

$$\int_0^2\frac1{24}x^2(x-2)^4\,dx=\frac1{24}\int_0^2x^2(x-2)^4\,dx$$

$x-2=u \Rightarrow dx=du$

$x=0 \quad u=-2$

$x=2 \quad u=0$

$$\frac1{24}\int_{-2}^0u^4(u+2)^2\,du=\frac1{24}\int_{-2}^0u^4(u^2+4u+4)\,du=$$

$$\frac1{24}\int_{-2}^0(u^6+4u^5+4u^4)\,du=$$

$$\frac1{24}\left(\frac{u^7}{7}+4\cdot\frac16\cdot u^6+4\cdot\frac15u^5\right)\Bigg|_{-2}^{0}=$$

$$\frac1{24}\left(\frac{(-2)^7}{7}+\frac46\cdot(-2)^6+\frac45\cdot(-2)^5\right)=$$

$$\frac1{24}\cdot\left(-\frac17\cdot+\frac46\cdot-\frac45\cdot\right)=$$

- Μετασχηματισμοί του τριπλού ολοκληρώματος

1/ Γενική περίπτωση

$x = x(t,u,v)$, $y = y(t,u,v)$, $z = z(t,u,v)$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D'} g(t,u,v)\left|\frac{D(x,y,z)}{D(t,u,v)}\right| dt\,du\,dv$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(t,u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

2/ Μετασχηματισμός σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$ $(\rho \geq 0 \ \ -\pi \leq \theta \leq \pi$ ή $0 \leq \theta \leq 2\pi)$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D'} g(\rho,\theta,z)\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$$

3/ Μετασχηματισμός σε σφαιρικές συντεταγμένες

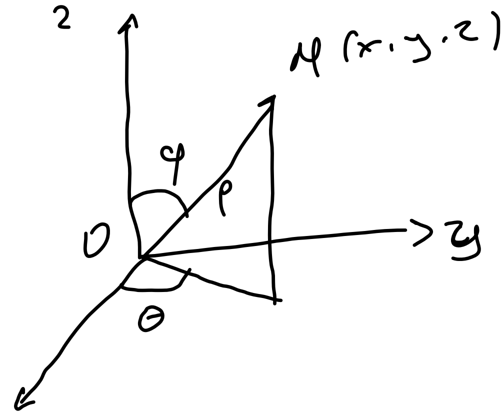
$x = \rho\sin\varphi\cos\theta$ $\quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta$ $\quad z = \rho\cos\varphi$

$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta \qquad y=\rho\sin\varphi\sin\theta \qquad z=\rho\cos\varphi$$

$$\rho\geq 0 \qquad 0\leq\theta\leq 2\pi \qquad 0\leq\varphi\leq\pi$$

ή

$$-\pi\leq\theta\leq\pi$$



$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta\\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi\end{vmatrix}=$$

$$\cos\varphi\,(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta\\ \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta\end{vmatrix}+$$

$$-\rho\sin\varphi\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta\end{vmatrix}=$$

$$=\cos\varphi\left(-\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta-\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\cdot\cos^2\theta\right)+$$

$$-\rho\sin\varphi\left(\rho\sin^2\varphi\cos^2\theta+\rho\sin^2\varphi\cdot\sin^2\theta\right)=$$

$-\rho\sin\varphi\left(\rho\sin^2\varphi\cos^2\theta + \rho\sin^2\varphi\cdot\sin^2\theta\right) =$

$= \cos\varphi\left(-\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\,(\underbrace{\sin^2\theta+\cos^2\theta}_{=1})\right)$

$-\rho\sin\varphi\left(\rho\sin^2\varphi\,(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=1})\right) =$

$= -\rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi - \rho^2\sin\varphi\cdot\sin^2\varphi =$

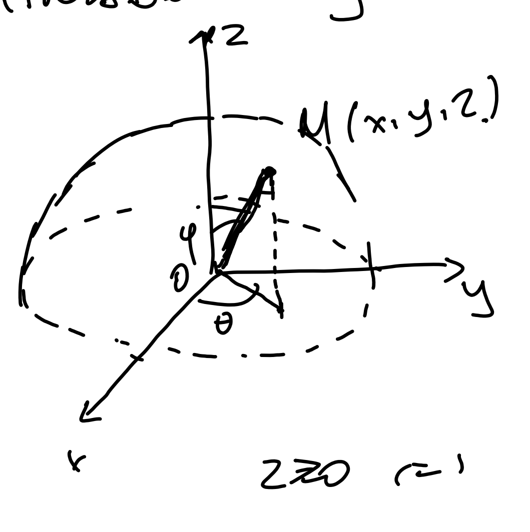
$= -\rho^2\sin\varphi\,(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1}) = -\rho^2\sin\varphi.$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D'} g(\rho,\theta,\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

Να υπολογιστεί το

$$I = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

όπου D είναι στερεά περιοχή μεταξύ του ημισφαιρίου $x^2+y^2+z^2=1$ με $z\geq 0$ και του επιπέδου Oxy.



Σφαιρικές συντεταγμένες

$x = \rho\sin\varphi\cos\theta$

$y = \rho\sin\varphi\sin\theta$

$z = \rho\cos\varphi$

$\rho \geq 0\ ,\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi$

$z \geq 0 \iff z = \rho\cos\varphi \iff \rho\cos\varphi \geq 0 \quad \left.\begin{matrix}\rho\geq 0\end{matrix}\right\} \cos\varphi \geq 0$

$$\cos\varphi \geq \cos\frac{\pi}{2} \iff \varphi \geq \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi/2$$

$$x^2+y^2+z^2 = 1 \iff$$

$$\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\varphi = 1 \iff$$

$$\rho^2\sin^2\varphi(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{1}) + \rho^2\cos^2\varphi = 1 \iff$$

$$\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi = 1 \iff$$

$$\rho^2(\underbrace{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}_{1}) = 1 \iff \rho^2 = 1 \iff \rho = 1$$

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1 \text{ κ' } z \geq 0\} \Rightarrow$$

$$D' = \{(\rho,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\leq\rho\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}\}$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = -\rho^2\sin\varphi \,. \quad \left|\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}\right| = \rho^2\sin\varphi.$$

$$I = \iiint_D \underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{\rho^2}\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D'} \rho^2\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_0^1 \rho^4\,d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\pi/2}\eta\mu\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^1 \cdot \theta\Big|_0^{2\pi} \, (-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2} = \ldots$$

Μάζα, κέντρο μάζας και ροή αφορούσιαν

που προτιθέμεθα

Μάζα, κέντρο μάζας ...

1/ Στερεό χωρική περιοχή D, με μάζα m (στην περιοχή που περιέχεται)

$\rho(x,y,z)$ = πυκνότητα, τότε η συνολική μάζα.

$$m = \iiint \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

2/ Κέντρο μάζας στην D

$$\bar{x} = \frac{\iiint_D x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_D y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_D z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

3/ Ροπή αδράνειας της D.

i) ως προς τον άξονα $x'x$

$$I_x = \iiint (y^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

D

ii) ως προς τον άξονα $y'y$

$$I_y = \iiint_D (x^2+z^2)\, \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

iii) ως προς τον άξονα $z'z$

$$I_z = \iiint_D (x^2+y^2)\, \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

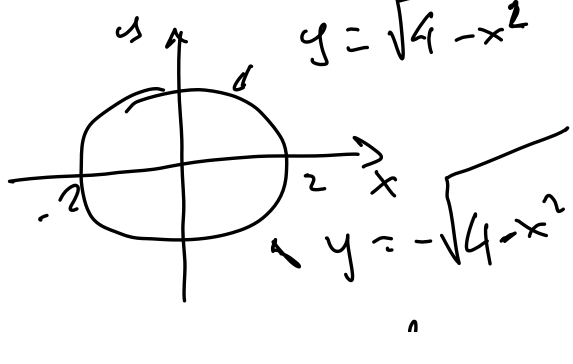
- Υπολογισμός όγκου με τριπλό ολοκλήρωμα

$$V = \iiint_D dx\,dy\,dz$$

Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από το επίπεδο $z=0$ και το παραβολοειδές $z=4-x^2-y^2$

Η προβολή του παραβολοειδούς πάνω στο Oxy επίπεδο είναι κυκλικός δίσκος $x^2+y^2 \le 4$



$$\top \quad y = -\sqrt{4 \cdots}$$

$$D_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , -2 \le x \le 2 \ , -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$$

$$z \Rightarrow \quad 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2$$

$$V = \underset{D}{\iiint} dx\,dy\,dz = \underset{\to D_1}{\int_{-2}^{2}} \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(\int_{0}^{4-x^2-y^2} dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} z \Big|_{0}^{4-x^2-y^2} \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4-x^2-y^2)\,dy \right) dx = \int_{-2}^{2} \left(\left[4y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} 4\left(\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4-x^2} \right) - x^2 \left(\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4-x^2} \right) - \frac{1}{3}\left(\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3 + \left(\sqrt{4-x^2}\right)^3 \right) dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(4 \cdot 2 \left(\sqrt{4-x^2}\right) - x^2 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{4-x^2}\right) - \frac{1}{3} \cdot 2 \left(\sqrt{4-x^2}\right) \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 \right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} 2\left(\sqrt{4-x^2}\right) \left((4-x^2) - \frac{1}{3}(4-x^2) \right) dx = \int_{-2}^{2} 2\sqrt{4-x^2}\, \frac{2}{3} (4-x^2)\, dx =$$

$$= \frac{4}{3} \int_{-2}^{2} (4-x^2)^{3/2} dx = \frac{4}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4\cos^2 u)^{3/2} \cdot 2 \cdot \cos u\, du = \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2^2 \cos^2 u)^{3/2} \cdot \cos u\, du =$$

$$(4-x^2) = 4 - 4\sin^2 u = 4(1-\sin^2 u) = 4\cos^2 u.$$

$x = 2\sin u$

$dx = 2\cos u\, du$

$dx = 2\cos u\, du$

$x = -2 \Leftrightarrow -2 = 2\sin u \Leftrightarrow \sin u = -1 \Leftrightarrow u = \frac{3\pi}{2}$ ή $-\frac{\pi}{2}$

$x = 2 \Leftrightarrow 2 = 2\sin u \Leftrightarrow \sin u = 1 \Leftrightarrow u = \pi/2$

$$= \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2^3 \cdot \cos^3 u \cos u\, du = \frac{64}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos u \cdot \cos^3 u\, du = \frac{64}{3}\underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin u)' \cos^3 u\, du}_{I} =$$

$$= \frac{64}{3}\left(\underbrace{\sin u \cos^3 u \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{0} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin u (\cos^3 u)'\, du \right) = -\frac{64}{3} 3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin u \cos^2 u (-\sin u)\, du =$$

$$= 64\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 u \cos^2 u\, du = 64\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\cos^2 u)\cos^2 u\, du = 64\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u\, du - 64\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 u\, du$$

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u\, du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos u \cdot \cos u\, du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin u)' \cdot \cos u\, du = \underbrace{\sin u \cos u \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{0} - \int \sin u (\cos u)'\, du =$$

$$= + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin u \sin u\, du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 u\, du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\cos^2 u)\, du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} du - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u\, du =$$

$$= u\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - I_1 \Leftrightarrow 2I_1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cancel{2}\frac{\pi}{\cancel{2}} \Leftrightarrow I_1 = \frac{\pi}{2}$$

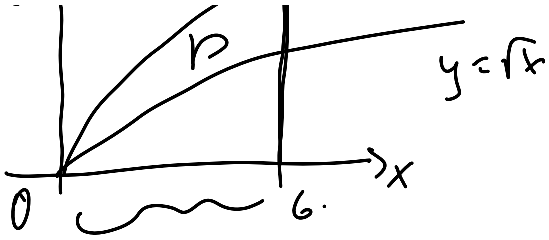
$$\frac{\cancel{64}}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 u\, du = \cancel{64}\frac{\pi}{2} - \cancel{64} \cdot I \Rightarrow \frac{1}{3} I = \frac{\pi}{2} - I \Rightarrow$$

$$\frac{4}{3} I = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow I = \frac{3}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από τους παραβολικούς κυλίνδρους $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ και τα επίπεδα $z=0$, $x+z=6$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le x \le 6,\ \sqrt{x} \le y \le 2\sqrt{x}\}$



$\sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}$

$z \geq 0.$

$x + z = 6 \Leftrightarrow z = 6 - x$

$D(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad 0 \leq x \leq 6, \ \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}, \ 0 \leq z \leq 6-x$

$$V = \iiint_D dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^6 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \left(\int_0^{6-x} dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^6 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \left(z \Big|_0^{6-x} \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^6 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (6-x)\, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^6 \left((6-x) \cdot y \Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \right) dx =$$

$$= \int_0^6 \left((6-x)(2\sqrt{x}) - (6-x)\sqrt{x} \right) dx =$$

$$= \int_0^6 \left((6-x)(2\sqrt{x}) - (6-x)\sqrt{x} \right) dx =$$

$$= \int_0^6 (6-x)(2\sqrt{x}-\sqrt{x})\,dx = \int_0^6 (6-x)\sqrt{x}\,dx = \int_0^6 6\sqrt{x}\,dx - \int_0^6 x\sqrt{x}\,dx =$$

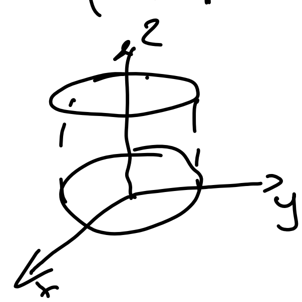
$$= 6\int_0^6 x^{1/2}\,dx - \int_0^6 x^{1+1/2}\,dx = 6\cdot \frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^6 - \frac{x^{5/2}}{5/2}\Big|_0^6 =$$

$$= 6\cdot\frac{2}{3}\cdot 6^{3/2} - \frac{2}{5}\,6^{5/2} = 6^{5/2}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right) = 6^{5/2}\left(\frac{10}{15}-\frac{6}{15}\right) =$$

$$= 6^{5/2}\cdot\frac{4}{15} = \frac{2^2(2\cdot 3)^{5/2}}{3\cdot 5} = \frac{2^2\cdot 2^{5/2}\cdot 3^{5/2}}{3\cdot 5} = \frac{2^{9/2}\cdot 3^{3/2}}{5} =$$

$$= \frac{2^{8/2}\cdot 3^{2/2}\cdot 2^{1/2}\cdot 3}{5} = \frac{\sqrt{6}}{5}\cdot 48$$

- Μορφές κυλίνδρου με γενέτειρες παράλληλες στον $z'z$



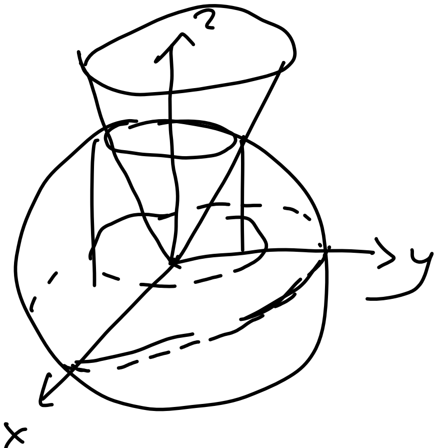
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ελλειπτικός

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ υπερβολικός

$y^2 = 2px$ παραβολικός

Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από την σφαίρα $x^2+y^2+z^2=1$ και τον κώνο $z=\sqrt{x^2+y^2}$.



$x=\rho\sin\varphi\cos\theta$

$y=\rho\sin\varphi\sin\theta$

$z=\rho\cos\varphi$

$z=\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow z^2=x^2+y^2$

$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=1 \\ z^2=x^2+y^2 \end{array}\right\}$ $2(x^2+y^2)=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1/2$ κυκλικός δίσκος

$x=\rho\sin\varphi\cos\theta$

$y=\rho\sin\varphi\sin\theta$ $\quad \rho\geq 0, \quad \theta\in[0,2\pi) \quad \varphi\in[0,\pi]$

$z=\rho\cos\varphi$

$x^2+y^2+z^2=1 \Leftrightarrow \rho=1$

$z=\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow \rho\cos\varphi=\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta} \Leftrightarrow$

$\rho\cos\varphi=\rho\sin\varphi$ ή $\cos\varphi=\sin\varphi \Leftrightarrow \varphi=\pi/4. \quad 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}$

$D^*=\{(\rho,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3,\ 0\leq\rho\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq\varphi\leq\pi/4\}$

$V=\iiint_D dx\,dy\,dz=\iiint_{D^*}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi\ \int_0^1\rho^2\,d\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,d\varphi=$

$=\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^1\cdot\left.\theta\right|_0^{2\pi}\left.(-\cos\varphi)\right|_0^{\pi/4}=\ldots$

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα.

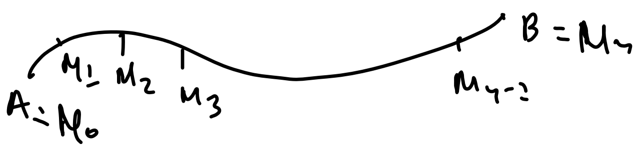
Θεωρούμε λεία καμπύλη ($\bar{r}(t)$ και $\bar{r}'(t) \neq 0$, $\bar{r}'(t)$ συνεχής σε ένα διάστημα $[a,b]$)

$$C : \bar{r} = \bar{r}(t) = x(t)\,\bar{i} + y(t)\cdot\bar{j} + z(t)\,\bar{k} \qquad t \in [a,b]$$

Αν πάρουμε σημεία $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ $\quad [a,b] = [t_0, t_n]$

κ αντιστοιχούν στα σημεία $A, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}, B$

$\overset{\frown}{AB}$



Θεωρούμε διανυσ. συνάρτηση

$\bar{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\bar{i} + Q(x,y,z)\,\bar{j} + R(x,y,z)\,\bar{k}$ ορισμένη σε μια περιοχή $D \in \mathbb{R}^3$ κ περιέχει την C.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}, \quad \Delta z_i = z_i - z_{i-1} \qquad i = 1, \ldots, n$$

οι μεταβολές των μεταβλητών x, y, z $\forall$ μεταβλητή $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(P(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\Delta y_i + R(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i \right)$$

αν υπάρχει ως αριθμός λέγεται επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης $\bar{F}$ κατά μήκος της C.

$$\int_C P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \quad \text{ή} \quad \int_C \bar{F}\,d\bar{r}$$

Υπολογισμοί του επικαμπύλια ολοκληρώματα αριθμητικής συνάρτησης.

$f(x,y,z)$ κατά μήκος της καμπύλης

$$C: \bar{r} = \bar{r}(t) = x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j} + z(t)\,\bar{k} \quad t \in [a,b]$$

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t)) \cdot \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}\;dt$$

$$s = \int_a^b \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}\;dt$$ είναι το μήκος του τόξου της C.

$$ds = |\dot{r}(t)|\,dt \qquad s'(t) = |\dot{r}(t)|$$

Υπολογισμός επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων διανυσματικής συνάρτησης.

$$\bar{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\bar{i} + Q(x,y,z)\,\bar{j} + R(x,y,z)\,\bar{k}$$

κατά μήκος της καμπύλης

$$C: \bar{r} = \bar{r}(t) = x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j} + z(t)\,\bar{k} \quad t \in [a,b]$$

$$\int_C P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int_a^b \Big(P(x(t),y(t),z(t))\,\dot{x}(t) + Q(x(t),y(t),z(t)) \cdot \dot{y}(t) + R(x(t),y(t),z(t)) \cdot \dot{z}(t) \Big)\,dt$$

ή $$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_a^b \big(P \cdot \dot{x}(t) + Q\,\dot{y}(t) + R\,\dot{z}(t)\big)\,dt$$

Αν καμπύλη είναι κλειστή $\bar{r}(a) = \bar{r}(b)$ τότε

$$\oint_C \bar{F}\, d\bar{r} \quad ή \quad \oint P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Τύπος Green (Σχέση επικαμπύλιου και διπλού ολοκληρώματος)

Έστω D περιοχή του xy επιπέδου που περικλείεται από μια κλειστή και ομαλή κατά τμήματα καμπύλη C. Αν οι συναρτήσεις $P(x,y)$, $Q(x,y)$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στην περιοχή D τότε ισχύει

$$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Ανεξαρτησία επικαμπύλιου ολοκληρώματος από το δρόμο ολοκλήρωσης.

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

είναι ανεξάρτητο από το δρόμο ολοκλήρωσης (εξαρτάται από τα άκρα σημεία της C), αν-ν ισχύει

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

... $\partial Q = \partial P$ τότε.

∂x

Αν $Pdx + Qdy = df$ όταν $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ τότε.

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_A^B Pdx + Qdy = f(B) - f(A)$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \int_C Pdx + Qdy + Rdz.$$

είναι ανεξάρτητο από το δρόμο ολοκλήρωσης εάν

$Pdx + Qdy + Rdz = df$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

$$\int_A^B Pdx + Qdy + Rdz = f(B) - f(A)$$

Άσκηση

Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$I = \int_C (x^2+y^2)\,ds$$

κατά μήκος του κύκλου $C: x = a\cos t, y = a\sin t$.

$t \in [0, 2\pi], a > 0$

$$\int (x^2+y^2)\,ds = \int^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t) \cdot \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt =$$

$$\int_C (x^2+y^2)\,ds = \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)\cdot \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2 \cdot \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2 \cdot a\,dt = \int_0^{2\pi} a^3\,dt = a^3 \cdot t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi a^3$$

- Αν η καμπύλη C δίνεται με την παραμετρική εξίσωση:

$$x = x(s),\quad y = y(s),\quad z = z(s)$$

s το τόξο της $s \in [0, S]$

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_0^S f(x(s), y(s), z(s))\,ds$$

- Αν η καμπύλη C είναι στη μορφή:

$y = g(x)$ $\quad x \in [a, b]$

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f[x, g(x)]\sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dx$$

γιατί μπορούμε να πάρουμε παραμετρικές $x = x$

$y = g(x)$ οπότε $\dot{x} = 1$

Άσκηση

Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \int_C \frac{2\,ds}{x+y}$$

όπου C το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα

$A(0,1)$, $B(2,3)$

ευθεία AB $\quad y - y_A = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_a}(x - x_A) \Leftrightarrow$

$$y - 1 = \frac{3-1}{2-0}(x-0) \Leftrightarrow$$

$$y - 1 = 1 \cdot x \Leftrightarrow \quad y = x+1 \quad x \in [0,2]$$

$$y = x+1 = g(x)$$

$$I = \int_0^2 \frac{2}{x+(x+1)}\sqrt{1+(g'(x))^2}\,dx = \int_0^2 \frac{2}{2x+1}\sqrt{2}\,dx =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^2 \frac{2}{2x+1}\,dx = \sqrt{2}.\ \ln(2x+1)\Big|_0^2$$

$$\int \frac{2}{2x+1}\,dx = \ln(2x+1) + c.$$