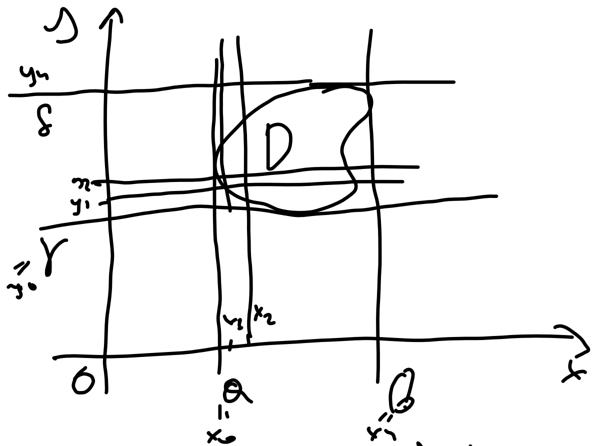
Ορισμός του διπλού ολοκληρώματος



Θεωρούμε μια φραγμένη συνάρτηση $f = f(x, y)$ με πεδίο ορισμού μια κλειστή περιοχή D.
Παίρνουμε ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ κ' $y = \gamma$, $y = \delta$

Παίρνοντας σημεία $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ διαιρούμε το διάστημα $[\alpha, \beta] = [x_0, x_n]$. Αντίστοιχα διαιρούμε το διάστημα $[\gamma, \delta] = [y_0, y_m]$ με σημεία $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$. Άρα n υποδιαστήματα στο $[\alpha, b]$ και m υποδιαστήματα στο $[\gamma, \delta]$. Συνολικά τα σημεία από $y_0, \dots, y_m$ είναι $m+1$ κ' από $x_0, \dots, x_n$ είναι $n+1$

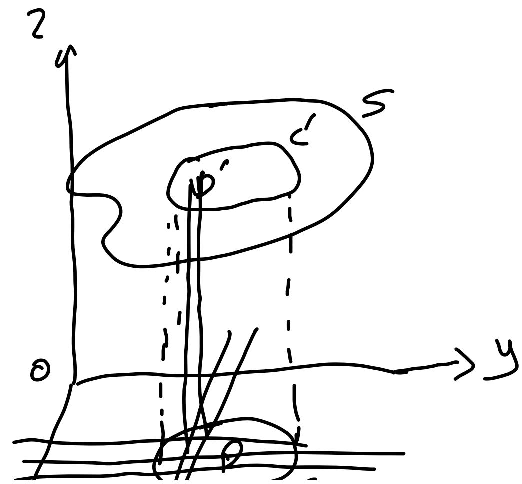
Σχηματίζονται στοιχειώδη ορθογώνια E_k $k = 1, 2, \dots, \rho$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ [illegible]

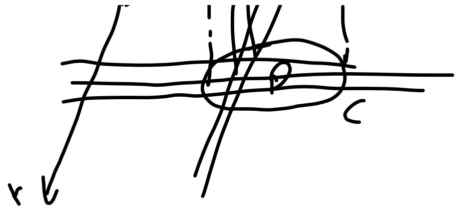
$$n \to \infty,\ m \to \infty$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{\rho} f(x_k, y_k) \cdot E_k \Rightarrow \iint_D f(x,y)\, dx\, dy = V$$

Γεωμετρική ερμηνεία του διπλού ολοκληρώματος



Στο Oxy έχουμε ένα κλειστό χώρο D που περικλείεται από μια κλειστή καμπύλη C. Μια φραγμένη συνάρτηση $z = f(x,y)$ με πεδίο ορισμού την περιοχή D, περιγράφει μια επιφάνεια S.
Αν από τα σημεία της C φέρουμε παράλληλες προς την Oz, τότε



Αν από τα σημεία της C φέρουμε παράλληλες προς την Oz, τότε δημιουργούμε μια κυλινδρική επιφάνεια

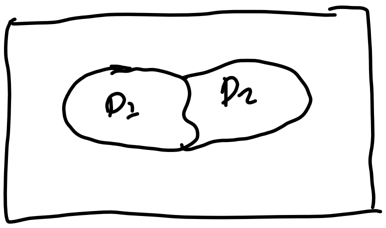
να τέμνει την S κατά καμπύλη C'. Η καμπύλη C' περικλείει μια περιοχή D' της S. Συμβολίζουμε με V τον όγκο του στερεού με βάσεις D, D' & παράπλευρη επιφάνεια την κυλινδρική.

Ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος

1/ Αν $f(x,y)$ συνεχής στην περιοχή D τότε είναι και ολοκληρώσιμη δηλ. $\exists \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

2/ $$\iint_D (\lambda f + \mu g)\,dx\,dy = \lambda \iint_D f \cdot dx\,dy + \mu \iint_D g\,dx\,dy$$

$f = f(x,y) \quad g = g(x,y) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

3/ 

$D = D_1 \cup D_2$ (δεν υπάρχουν κοινά εσωτερικά σημεία)

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

4/ Αν η $f(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμη στην περιοχή D, τότε και η $|f(x,y)|$ είναι ολοκληρώσιμη στην D

$$\left| \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \right| \le \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$$

5/ Αν D είναι ορθογώνιο $\alpha \le x \le \beta$, $\gamma \le y \le \delta$ και ισχύει

5/ Αν D είναι ορθογώνιο $a \le x \le b$, $\gamma \le y \le \delta$ και ισχύει $f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$ τότε

$$\iint_D g(x)\cdot h(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_\gamma^\delta h(y)\,dy\right)$$

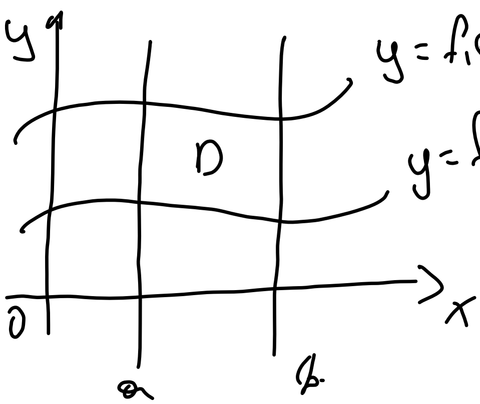
6/ Αν $f(x,y) \ge 0$ τότε $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \ge 0$

7/ Αν $f(x,y) \ge g(x,y)$ τότε $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \ge \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$

8/ $\iint_D dx\,dy = E(D)$ (εμβαδόν της περιοχής D)

και γενικά $\iint_D c\,dx\,dy = c\cdot E(D)$

Υπολογισμός του διπλού ολοκληρώματος

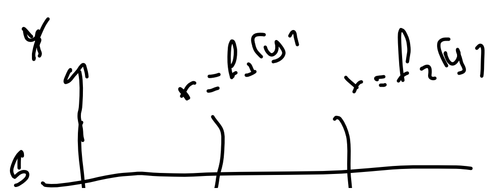


Αν η περιοχή ολοκλήρωσης D περικλείεται από τις ευθείες $x=a$, $x=\beta$ και τις καμπύλες $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$

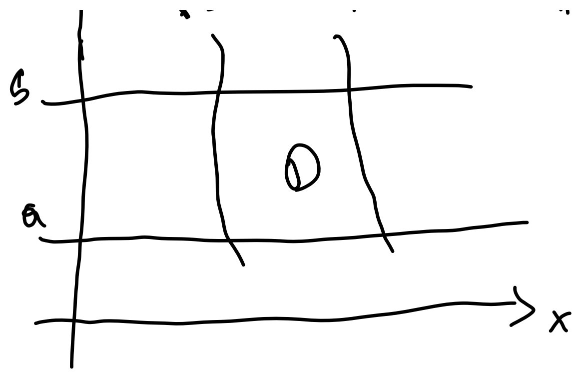
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le \beta$ και $f_2(x) \le y \le f_1(x)\}$

τότε το $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^\beta \left(\int_{f_2(x)}^{f_1(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

όπου το x στο $\int_{f_2(x)}^{f_1(x)} f(x,y)\,dy$ είναι μια σταθερά.



Αν $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad a \le y \le \beta$



Αν $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad a \leq y \leq b$

κ' $f_1(y) \leq x \leq f_2(y)\}$

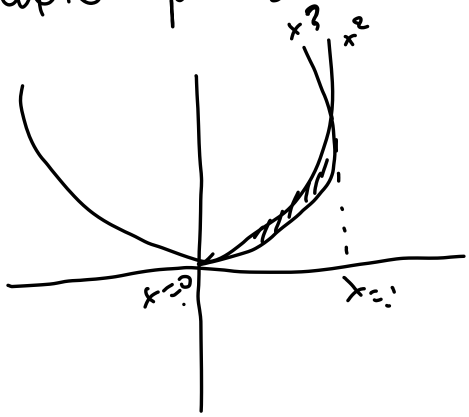
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Αν $D = D_1 \cup D_2$ κ' D_1 κ' D_2 έχουν μορφή σαν τα παραπάνω.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $I = \iint (x^2 + xy + 5y^2)\,dx\,dy$, όπου D το χωρίο μεταξύ των καμπυλών $y = x^2$, $y = x^3$.



$x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0$

$x = 0$

ή

$x = 1$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ x^3 \leq y \leq x^2\}$

$$\iint_D (x^2 + xy + 5y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} (x^2 + xy + 5y^2)\,dy \right) dx =$$

D

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + x\cdot\frac{y^2}{2} + \frac{5}{3} y^3 \right]_{x^3}^{x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\left(x^2\cdot x^2 + \frac{x(x^2)^2}{2} + \frac{5}{3}(x^2)^3 \right) - \left(x^2\cdot x^3 + \frac{x(x^3)^2}{2} + \frac{5}{3}(x^3)^3 \right) \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^5}{2} + \frac{5}{3}x^6 - x^5 - \frac{x^7}{2} - \frac{5}{3}x^9 \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^4 - \frac{x^5}{2} + \frac{5}{3}x^6 - \frac{1}{2}x^7 - \frac{5}{3}x^9 \right) dx =$$

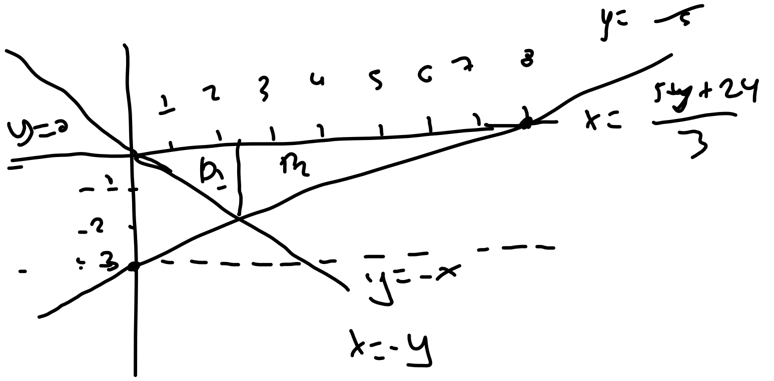
$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{12} + \frac{5x^7}{3\cdot 7} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^8}{8} - \frac{\cancel{5}}{3}\cdot\frac{x^{10}}{\cancel{10}} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{12} + \frac{5}{21} - \frac{1}{16} - \frac{1}{6} = \ldots \ldots$$

Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί το $I = \iint_D y^2\, dx\, dy$, όπου D είναι τριγωνικό χωρίο με πλευρές

$y=0$, $y=-x$ και $3x-5y-24=0$



Αν $y=0 \Rightarrow 3x-5\cdot 0-24=0 \Leftrightarrow$
$3x=24 \Leftrightarrow x=8$
$(8,0)$

Αν $y=-x \quad 3x-5(-x)-24=0 \Leftrightarrow$
$8x-24=0 \Leftrightarrow$
$8x=24 \Leftrightarrow x=3$
$(3,-3)$

$D: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad -3 \le y \le 0 \quad -y \le x \le \frac{5y+24}{3}$

$$D: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad -3 \le y \le 0 \quad -y \le x \le \frac{5y+24}{3}$$

$$\iint_D y^2\,dx\,dy = \int_{-3}^{0} \left(\int_{-y}^{\frac{5y+24}{3}} y^2 \, dx \right) dy$$

$$D = D_1 \cup D_2$$

$$D_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad 0 \le x \le 3 \quad , \quad -x \le y \le 0 \}$$

$$D_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad 3 \le x \le 8 \quad \frac{3x-24}{5} \le y \le 0 \}$$

$$\iint_D y^2\,dx\,dy = \iint_{D_1} y^2\,dx\,dy + \iint_{D_2} y^2\,dx\,dy$$

$$= \int_0^3 \left(\int_{-x}^{0} y^2\,dy \right) dx + \int_3^8 \left(\int_{\frac{3x-24}{5}}^{0} y^2\,dy \right) dx$$

Μετασχηματισμοί διπλών ολοκληρωμάτων

Αν έχουμε $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$ τότε ισχύει

Αν έχουμε $x=g(u,v)$, $y=h(u,v)$ τότε ισχύει

$$dx\,dy = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv \quad (\text{Ιακωβιανή ορίζουσα})$$

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f\big(g(u,v),h(u,v)\big)\cdot\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv$$

Παράδειγμα.

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $x+y=u$, $y=uv$ να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D e^{\frac{y}{x+y}}\,dx\,dy$$

όπου D η περιοχή που περικλείεται από τις ευθείες $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, $x+y=2$

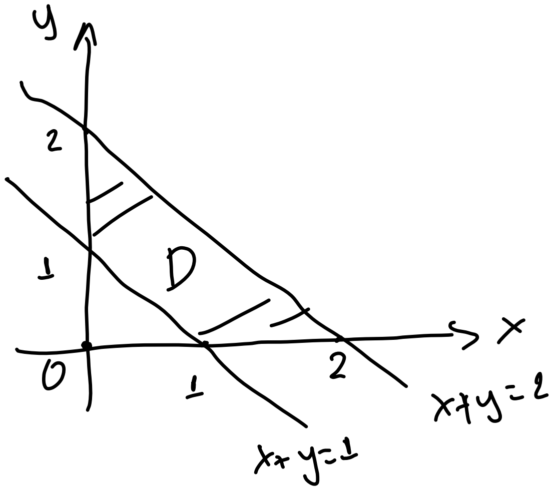
$$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u\cdot(1-v)-(-u)\cdot v = u - \cancel{uv} + \cancel{uv} = u$$

$y = u\cdot v$

$x = u - y = u - uv = u(1-v)$

y

$x+y=u \}\; u=1 \qquad 1 \le u \le 2$



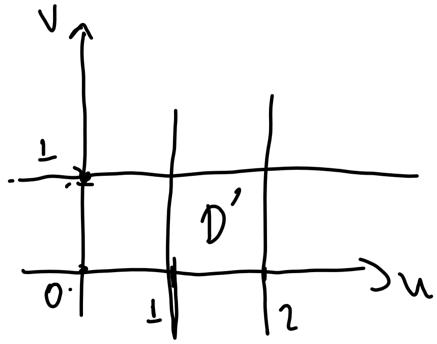
$\left.\begin{array}{l} x+y=u \\ x+y=1 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$ $u=1$, $u=2$ $\quad 1 \le u \le 2$

$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=u(1-v) \end{array}\right\}$ $u(1-v)=0 \Leftrightarrow u=0$ ή $v=1$

$\left.\begin{array}{l} y=u\cdot v \\ y=0 \end{array}\right\}$ $u\cdot v=0 \Leftrightarrow u=0$ ή $v=0$

$0 \le v \le 1$

$D'=\{(u,v)\in \mathbb{R}^2,\ 1\le u\le 2\ ,\ 0\le v\le 1\}$



$x+y=u$

$y=uv$

$$I=\iint_D e^{\frac{y}{x+y}}\,dxdy=\iint_{D'} e^{\frac{uv}{u}}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv=$$

$$=\iint_{D'} e^{v}\cdot u\,dudv$$

$$=\int_1^2\left(\int_0^1 e^{v}\cdot u\,dv\right)du=\int_1^2\left[u\cdot e^{v}\right]_0^1du=$$

$$=\int_1^2\left[u\cdot e^1-u\cdot e^0\right]du=\int_1^2(u e-u)\,du=$$

$$= \int_1^2 ue\,du - \int_1^2 u\,du = \frac{u^2}{2}e\Big|_1^2 - \frac{u^2}{2}\Big|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^2}{2}\cdot e - \frac{1^2}{2}e\right) - \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = 2e - \frac{e}{2} - \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{3}{2}e - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(e-1)$$

Μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες

Αν έχουμε $x, y \rightarrow$ $x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\sin\theta$ $\rho > 0$

$x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta$ ή $y = \rho\eta\mu\theta$ $0 \le \theta \le 2\pi$

$$dxdy = \left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right| d\rho d\theta = \rho\, d\rho d\theta$$

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta - (-\rho\cdot\sin^2\theta) =$$

$$= \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta =$$

$$= \rho(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}) =$$

$$= \rho$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} g(\rho,\theta)\,\rho\, d\rho d\theta$$

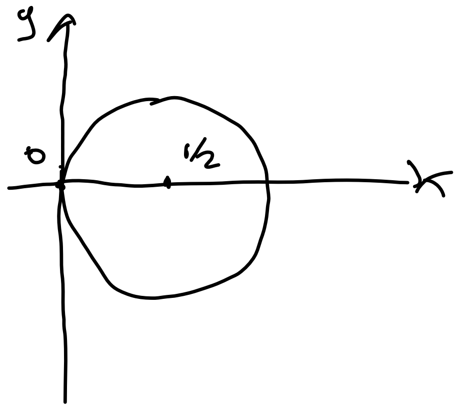
Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, όπου D είναι η περιοχή του $\mathbb{R}^2$ με $x^2+y^2 \le x$

$$x^2+y^2 \le x \iff x^2 - x + y^2 \le 0 \iff x^2 - 2\tfrac{1}{2}x + y^2 \le 0 \iff$$

$$x^2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}x + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le 0 \iff$$

$$\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}$$ ← εξίσωση του κύκλου



κύκλος $K(\tfrac{1}{2}, \rho)$ $\rho = \tfrac{1}{2}$.

$x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$

$$\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \tfrac{1}{4} \iff \left(\rho\cos\theta - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\rho\sin\theta\right)^2 \le \tfrac{1}{4} \iff$$

$$\rho^2\cos^2\theta - \cancel{2}\frac{\rho}{\cancel{2}}\cos\theta + \rho^2\sin^2\theta + \cancel{\tfrac{1}{4}} = \cancel{\tfrac{1}{4}} \iff$$

$$\rho^2(\overset{=1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}) - \rho\cos\theta = 0 \iff$$

$$\rho^2 - \rho\cos\theta = 0 \iff$$

$$\rho(\rho - \cos\theta) = 0 \iff \left.\begin{array}{l}\rho = 0\\ \rho = \cos\theta.\end{array}\right\} \quad 0 \le \rho \le \cos\theta$$

$$-\tfrac{\pi}{2} \le \theta \le \tfrac{\pi}{2}$$

$$D' = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 ,\ -\tfrac{\pi}{2} \le \theta \le \tfrac{\pi}{2} \ \text{και}\ 0 \le \rho \le \cos\theta\right\}$$

$$I = \iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \left(dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\theta\right) =$$

$$\iint_D \frac{\ }{\sqrt{1-x^2-y^2}} \quad (\quad) $$

$$= \iint_{D'} \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{1-\rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta}} = \iint_{D'} \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{1-\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}} =$$

$$= \iint_{D'} \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{1-\rho^2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos\theta} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho \right) d\theta$$

$$\int \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho = \int -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\, dk = \int \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot k^{-1/2}\, dk =$$

$1-\rho^2 = k \Leftrightarrow -2\rho d\rho = dk$

$\rho d\rho = -\frac{dk}{2}$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{k^{-1/2+1}}{-1/2+1} = \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\cdot\frac{k^{1/2}}{1/\cancel{2}} =$$

$$= -k^{1/2} = -(1-\rho^2)^{1/2}$$

$$\int_0^{\cos\theta} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho = -(1-\rho^2)^{1/2}\Big|_0^{\cos\theta} = -\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)\Big|_0^{\cos\theta} =$$

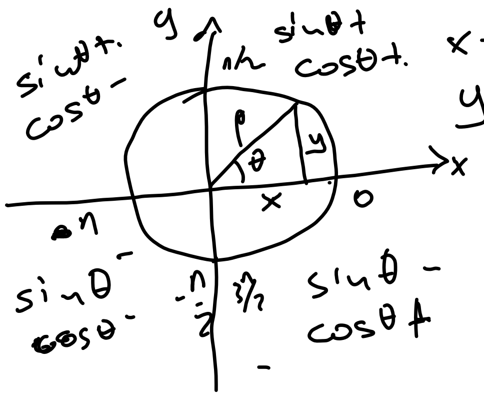
$$= -\left(\sqrt{1-\cos^2\theta} - \sqrt{1-0^2}\right) = -\left(\sqrt{\sin^2\theta} - 1\right) =$$

$$= -(|\sin\theta| - 1)$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos\theta} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho \right) d\theta = -\int^{\pi/2} (|\sin\theta| - 1)\, d\theta =$$

$$= -\left(\int^0 (|\sin\theta|-1)\, d\theta + \int^{\pi/2} (|\sin\theta|-1)\, d\theta \right) =$$

$$= -\left(\int_{-\pi/2} (|\sin\theta| - 1)\,d\theta + \int_{0} (|\sin\theta| -)\right)$$



$x = \rho\cos\theta$ $\qquad \cos\theta = \frac{x}{\rho}$

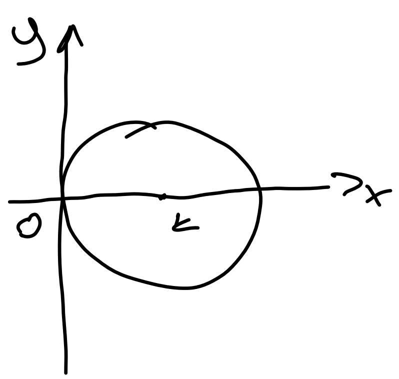
$y = \rho\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{\rho}$

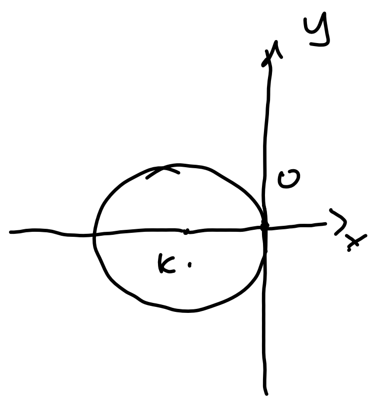
$$= -\left(\int_{-\pi/2}^{0} (-\sin\theta - 1)\,d\theta + \int_{0}^{\pi/2} (\sin\theta - 1)\,d\theta\right) =$$

$$= -\left(\left(\cos\theta - \theta\right)\Big|_{-\pi/2}^{0} + \left(-\cos\theta - \theta\right)\Big|_{0}^{\pi/2}\right) =$$

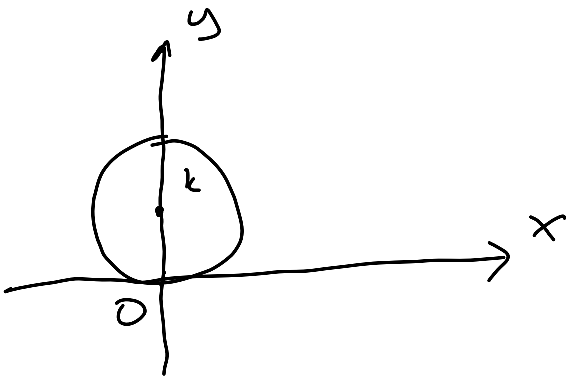
$$= -\left(\left((1 - 0) - \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) + \left(\left(-0 - \frac{\pi}{2}\right) - (-1 - 0)\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{2} - 1 = 2\frac{\pi}{2} - 2 = \pi - 2$$

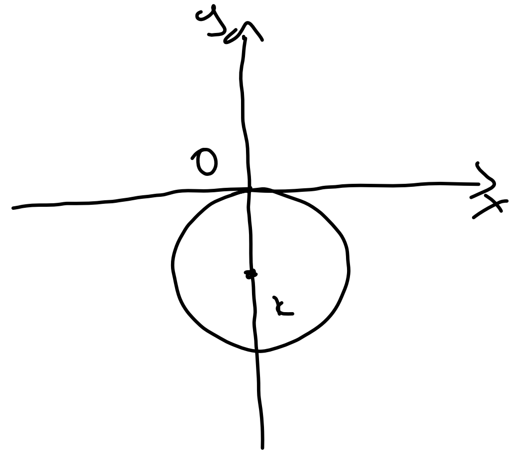




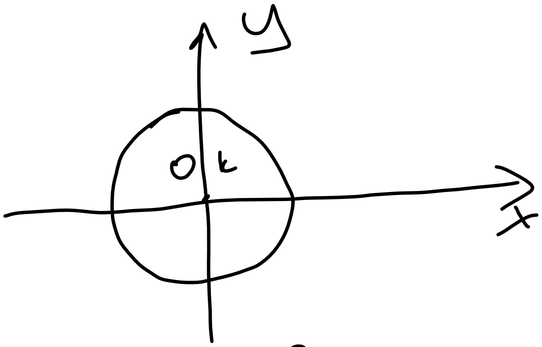
$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ $\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$



$0 \le \theta \le \pi$



$\pi \le \theta \le 2\pi$



$0 \le \theta \le 2\pi$

$-\pi \le \theta \le \pi$

- Αν έχουμε $D: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2$
τότε θέτουμε $x=x_0+\rho\cos\theta \quad y=y_0+\rho\sin\theta$
- Αν έχουμε περιοχή ολοκλήρωσης την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
τότε θέτουμε $x=a\rho\cos\theta$, $y=b\rho\sin\theta$.

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix} = ab\rho\cos^2\theta + ab\rho\sin^2\theta$$
$$= ab\rho(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$
$$= ab\rho$$

$dxdy = ab\rho\, d\rho d\theta$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \iff \frac{\cancel{a^2}\rho^2\cos^2\theta}{\cancel{a^2}}+\frac{\cancel{b^2}\rho^2\sin^2\theta}{\cancel{b^2}}=1 \iff$$

$$\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=1 \iff \rho^2=1 \iff \rho=1 \qquad \rho\in[0,1]$$

$$\theta\in[0,2\pi]$$

- Υπολογισμοί εμβαδού και όγκου με διπλό ολοκλήρωμα.

Το εμβαδόν μιας κλειστής περιοχής D δίνεται

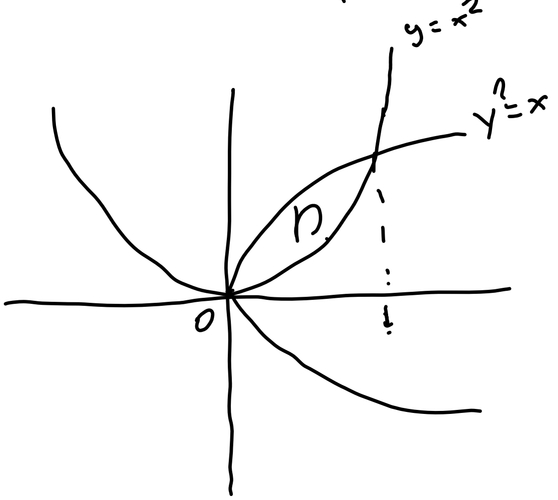
$$E(D)=\iint_D dx\,dy$$

Αν η D περικλείεται από καμπύλες που έχουν εξισώσεις πολικές συντεταγμένες.

$$E(D)=\iint_D \rho\,d\rho\,d\theta$$

Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις παραβολές $y^2=x$, $x^2=y$



$$x^2=y \;\&\; y^2=x$$

$$x^4=y^2 \iff x^4=x \iff$$

$$x^4-x=0 \iff$$

$$x(x^3-1)=0$$

$$x(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$x=0$$

ή

$$x=1$$

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad 0\le x\le 1,\quad x^2\le y\le\sqrt{x}\}$$

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 , \quad 0 \le x \le 1 , \quad x^2 \le y \le \sqrt{x}$$

$$E(D) = \iint_D dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right) dx = \int_0^1 \left(y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2 \right) dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

- $S: z = f(x,y)$ $\quad D$ ορθή προβολή της στο Oxy

$$V = \iint_D |f(x,y)| \, dx\,dy$$

Αν έχουμε $z = f(x,y) \quad z = g(x,y)$

$$V = \iint_D |f(x,y) - g(x,y)| \, dx\,dy$$

Παράδειγμα.

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ κι το επίπεδο $2x + 4y + z - 4 = 0$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad g(x,y) = 4 - 2x - 4y$$

$$V = \iint_D |f(x,y) - g(x,y)| \, dx\,dy$$

$$\left.\begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 - 2x - 4y \end{array}\right\} \quad x^2 + y^2 = 4 - 2x - 4y \Leftrightarrow$$

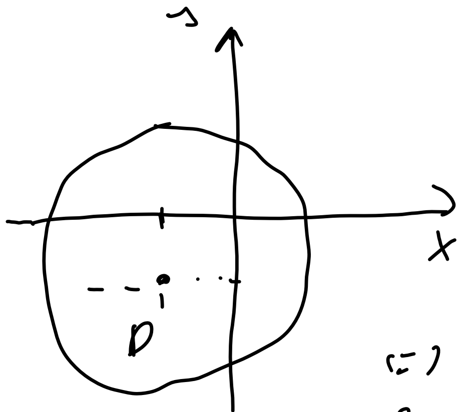
$$x^2 + 2x + y^2 + 4y = 4 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 2x + 1) - 1 + (y^2 + 2 \cdot 2y + 4) - 4 = 4 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 = 4 \Leftrightarrow$$

$(x+1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 = 4 \Leftrightarrow$

$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9 = 3^2$



$x+1 = \rho\cos\theta$

$y+2 = \rho\sin\theta.$

$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2 = 3^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta = 3^2 \Leftrightarrow \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 3^2 \Leftrightarrow$

$\rho^2 = 3^2 \Leftrightarrow \rho = \pm 3 \quad 0 \le \rho \le 3 \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$D' = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 , \ 0 \le \rho \le 3, \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$

$$V = \iint_D |f(x,y) - g(x,y)| \, dx\,dy = \iint_D |x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4| \, dx\,dy$$

$$\iint_D |(x+1)^2 + (y+2)^2 - 9| \, dx\,dy = \iint_{D'} |\rho^2 - 9| \rho \, d\rho\, d\theta$$

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

$$\iint (9-\rho^2)\rho \, d\rho\, d\theta = \int_0^3 (9\rho - \rho^3)\, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\int \left(\int \quad d\theta \right) d\rho$$

$$= \left(9\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^3 - \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^3\right)\theta\Big|_0^{2\pi} = \ldots$$

$$= \left(\frac{9}{2}\cdot 9 - \frac{1}{4}\cdot 3^4\right)2\pi = \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right)\cdot 2\pi = \frac{81}{\cancel{4}}\cdot \cancel{2}\pi = \frac{81}{2}\pi$$

– Μάζα, κέντρο μάζας και ροπή αδράνειας.

- Μάζα

Σε μια κλειστή περιοχή D του επιπέδου Oxy έχει τοποθετηθεί μάζα με πολύ μικρό πάχος. Αν σε κάθε σημείο (x,y) της D η πυκνότητα της μάζας είναι $P(x,y)$ τότε η συνολική μάζα της D είναι

$$m = \iint_D P(x,y)\,dx\,dy$$

- κέντρο μάζας.

είναι το σημείο της D με συντεταγμένες

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\,P(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D P(x,y)\,dx\,dy} \qquad \bar{y} = \frac{\iint_D y\,P(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D P(x,y)\,dx\,dy}$$

Αν $P(x,y) =$ σταθερή ή ομογενής

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy} \qquad \bar{y} = \frac{\iint_D y\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}$$

$$\iint_D dx\,dy \qquad \iint_D dx\,dy$$

- Η ροπή αδράνειας στην περιοχή D

α) ως προς τον άξονα Ox

$$I_x = \iint_D y^2 P(x,y)\,dx\,dy$$

β) ως προς τον άξονα Oy

$$I_y = \iint_D x^2 P(x,y)\,dx\,dy$$

γ) ως προς τον άξονα Oz ή προς το O

$$I_z = I_x + I_y = \iint_D (x^2+y^2)\, P(x,y)\,dx\,dy$$

δ) ως προς ευθεία L

$$I_L = \iint_D d^2(x,y)\, P(x,y)\,dx\,dy$$

$d(x,y)$ είναι η απόσταση του $M(x,y)$ από την L

Παράδειγμα

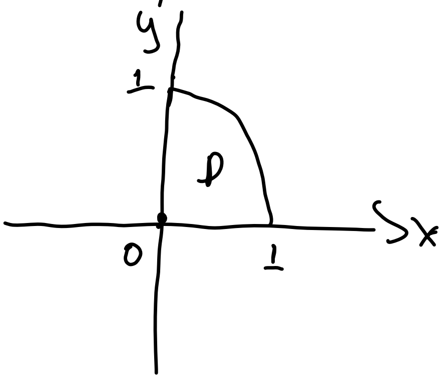
Να προσδιοριστεί το κέντρο μάζας του ομογενούς χωρίου

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

Να προσδιορίσετε το κέντρο βάρους ...

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , x^2+y^2 \leq 1, \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \}$

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy = E(D)} \qquad \bar{y} = \frac{\iint_D y\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy = E(D)}$$



$E(D) = \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{\pi}{4} \qquad R=1$

$x^2+y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x^2}$

$0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$

$0 \leq x \leq 1$

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left(x \cdot y \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int_0^1 \left(x \cdot \sqrt{1-x^2} \right) dx$$

$1-x^2 = k \Leftarrow$

$-2x\,dx = dk$

$x\,dx = -\frac{dk}{2}$

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\int \frac{1}{2}\sqrt{k}\,dk = \int -\frac{1}{2} k^{1/2}\,dk =$$

$$= -\int \frac{1}{2} \cdot \frac{k^{1/2+1}}{1/2+1}\,dk = -\int \cancel{\frac{1}{2}} \frac{k^{3/2}}{\cancel{3/2}} = -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2} \Big|_0^1$$

$$= -\left(\frac{1}{3}(0-1)\right) = \frac{1}{3}$$

$$\iint y\,dx\,dy = \int^1 \left(\int^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy \right) dx = \int^1 \left(\frac{y^2}{2} \Big|^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx =$$

$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_0 \left(\int_0 y\,dy\right) dx = \int_0 \left(\frac{y^2}{2}\Big|_0\right) dx =$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3} = \frac{1}{3}$$

$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{\pi}{4}}, \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\pi}{4}}\right) = \left(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi}\right)$$

Τριπλά Ολοκληρώματα

$f(x,y,z)$ φραγμένη π.ο. μια κλειστή περιοχή $D \subset \mathbb{R}^3$

κ' περιέχεται σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

$$\{a \le x \le b,\ \gamma \le y \le \delta,\ \kappa \le z \le \lambda\}$$

Θεωρούμε σημεία $x_i \in [\underset{x_0}{a}, \underset{x_n}{b}]$, $y_j \in [\underset{y_0}{\gamma}, \underset{y_m}{\delta}]$, $z_\nu \in [\underset{z_0}{\kappa}, \underset{z_n}{\lambda}]$

Με τα επίπεδα $x = x_i$ $\perp$ στον άξονα $x'x$

$y = y_j$ $\perp$ // $y'y$

$z = z_\nu$ $\perp$ // $z'z$

V_l τους όγκους των μικρών παραλληλεπ. .. $l = 1, 2, \ldots, \rho$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $\Delta z_\nu = z_\nu - z_{\nu-1}$

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{\Delta \to 0} \sum\limits_{l=1}^{\rho} f(x_l, y_l, z_l) V_l$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

… ολοκληρώματα.

D

- Υπολογισμός των τριπλού ολοκληρώματος.

Για τη κλειστή περιοχή D του χώρου

1/ $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, a\le x\le b,\ f_1(x)\le y\le f_2(x),\ g_1(x,y)\le z\le g_2(x,y)\}$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_a^b\left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)}\left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$

ή

2/ $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, a\le y\le b,\ f_1(y)\le z\le f_2(y),\ g_1(y,z)\le x\le g_2(y,z)\}$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_a^b\left(\int_{f_1(y)}^{f_2(y)}\left(\int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right)dz\right)dy$$

Για την 1 η ορθή προβολή της D στο Oxy είναι

$D'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, a\le x\le b,\ f_1(x)\le y\le f_2(x)\}$

Για τη 2 η ορθή προβολή της D στο Oyz είναι

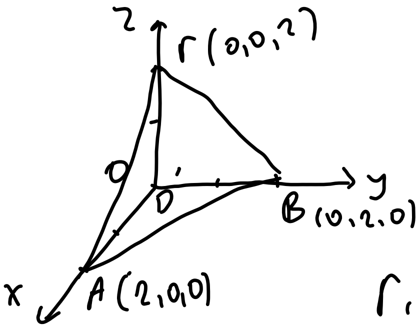
$D'=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 \,/\, a\le y\le b,\ f_1(y)\le z\le f_2(y)\}$

Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί το $I=\iiint x^2yz\,dx\,dy\,dz$ όπου

D η περιοχή του χώρου που περικλείεται από τα επίπεδα

D η περιοχή του χώρου που περικλείεται από τα επίπεδα
$x=0,\ y=0,\ z=0 \quad x+y+z=2.$



$x=0 \Rightarrow$ επίπεδο Oyz
$y=0 \Rightarrow$ -//- Ozx
$z=0 \Rightarrow$ -//- Oxy

D είναι το τετράεδρο ΑΒΓΟ

Για να βρω την ευθεία AB

$$y-y_B=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\cdot(x-x_B) \iff y-2=\frac{2-0}{0-2}(x-0) \iff y-2=-x \Rightarrow$$

$$y=-x+2$$

$$D'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le -x+2\}$$

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le -x+2,\ 0\le z\le 2-x-y$$

$$\iiint_D x^2yz\,dx\,dy\,dz=\int_0^2\left(\int_0^{-x+2}\left(\int_0^{2-x-y}x^2yz\,dz\right)dy\right)dx=$$

$$\int_0^{2-x+y}x^2yz\,dz=(x^2y)\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{2-x-y}=\frac{1}{2}x^2y(2-x-y)^2=$$

$$(2-x-y)^2=((2-x)-y)^2=(2-x)^2-2(2-x)\cdot y+y^2=$$
$$=(2^2-2\cdot 2x+x^2)-4y+2xy+y^2=$$
$$=4-4x+x^2-4y+2xy+y^2$$

$$=\frac{1}{2}x^2y(x^2+y^2+4+2xy-4x-4y)$$

$$\int_0^{-x+2} \frac{1}{2}x^2 y \left(x^2+y^2+4+2xy-4x-4y\right)dy$$

$$\frac{x^2}{2}\int_0^{-x+2}\left(x^2y+y^3+4y+2xy^2-4xy-4y^2\right)dy =$$

$$\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{4}y^4+\frac{4}{2}y^2+\frac{2x}{3}\cdot y^3-2xy^2-\frac{4}{3}y^3\right)\Bigg|_0^{-x+2} =$$

$$=\frac{1}{4}x^4(2-x)^2+\frac{1}{8}x^2(2-x)^4+x^2(2-x)^2+\frac{x^3}{3}(2-x)^3-x^3(2-x)^2-\frac{2}{3}x^2(2-x)^3$$

$$= x^2(2-x)^2\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}(2-x)^2+1+\frac{1}{3}x(2-x)-x-\frac{2}{3}(2-x)\right)=$$

$$=x^2(2-x)^2\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}(4-4x+x^2)+1+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}x^2-x-\frac{4}{3}+\frac{2x}{3}\right)=$$

$$=x^2(2-x)^2\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+1+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}x^2-x-\frac{4}{3}+\frac{2x}{3}\right)$$

$$=x^2(2-x)^2\left(x^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{3}\right)+x\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-1+\frac{2}{3}\right)+1\overset{+1/2}{}-\frac{4}{3}\right)=$$

$$=x^2(2-x)^2\left(x^2\left(\frac{1}{24}\right)+x\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{6}\right)=$$

$$-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=-\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{24}x^2(2-x)^2\left(x^2-4x+4\right)$$

$$=\frac{1}{24}x^2(2-x)^2(x-2)^2=\frac{1}{24}x^2(x-2)^4$$

$$\int_0^2\frac{1}{24}x^2(x-2)^4dx=\frac{1}{24}\int_0^2x^2(x-2)^4dx$$

$$x-2=u \Rightarrow \quad x=0 \quad u=-2$$
$$dx=du \qquad x=2 \quad u=0$$

$$\frac{1}{24}\int_{-2}^0u^4(u+2)^2du=\frac{1}{24}\int_{-2}^0u^4(u^2+4u+4)\,du=$$

$$\frac{1}{24}\int^0\left(u^6+4u^5+4u^4\right)du=$$

$$\frac{1}{24}\int_{-2}^{0}\left(u^6+4u^5+4u^4\right)du =$$

$$\frac{1}{24}\left(\frac{u^7}{7}+4\cdot\frac{1}{6}\cdot u^6+4\cdot\frac{1}{5}u^5\right)_{-2}^{0} =$$

$$\frac{1}{24}\left(\frac{(-2)^7}{7}+\frac{4}{6}\cdot(-2)^6+\frac{4}{5}\cdot(-2)^5\right) =$$

$$\frac{1}{24}\cdot\left(-\frac{1}{7}\cdot+\frac{4}{6}\cdot-\frac{4}{5}\cdot\quad\right) =$$

- Μετασχηματισμός του τριπλού ολοκληρώματος

1/ Γενική περίπτωση

$x=x(t,u,v)$, $y=y(t,u,v)$, $z=z(t,u,v)$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D'} g(t,u,v)\left|\frac{D(x,y,z)}{D(t,u,v)}\right| dt\,du\,dv$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(t,u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

2/ Μετασχηματισμός σε κυλινδρικές συντεταγμένες

2/ Μετασχηματισμοί σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$x=\rho\cos\theta \quad , y=\rho\sin\theta \quad , z=z \quad (\rho\geq 0 \;\; -\pi\leq\theta\leq\pi \text{ ή } 0\leq\theta\leq 2\pi)$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D'} g(\rho,\theta,z)\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$$

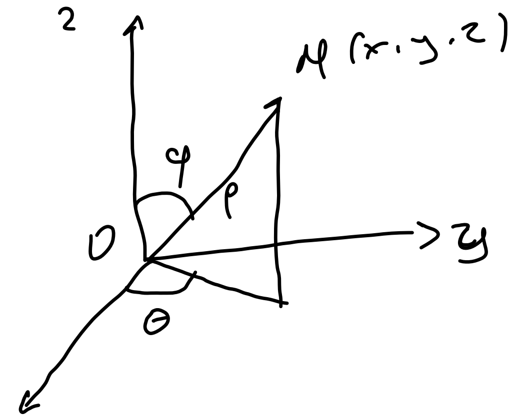
3/ Μετασχηματισμοί σε σφαιρικές συντεταγμένες

$x=\rho\sin\varphi\cos\theta \qquad y=\rho\sin\varphi\sin\theta \qquad z=\rho\cos\varphi$

$\rho\geq 0 \qquad 0\leq\theta\leq 2\pi \qquad 0\leq\varphi\leq\pi$

ή

$-\pi\leq\theta\leq\pi$



$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta\\ & 0 & -\rho\sin\varphi\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$\cos\varphi\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \end{vmatrix} +$$

$$-\rho\sin\varphi\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\varphi\left(-\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta - \rho^2\sin\varphi\cos\varphi\cdot\cos^2\theta\right) +$$

$$-\rho\sin\varphi\left(\rho\sin^2\varphi\cos^2\theta + \rho\sin^2\varphi\cdot\sin^2\theta\right) =$$

$$= \cos\varphi\left(-\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\,(\underbrace{\sin^2\theta+\cos^2\theta}_{1})\right)$$

$$-\rho\sin\varphi\left(\rho\sin^2\varphi\,(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{1})\right) =$$

$$= -\rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi - \rho^2\sin\varphi\cdot\sin^2\varphi =$$

$$= -\rho^2\sin\varphi\,(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{1}) = -\rho^2\sin\varphi.$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D'} g(\rho,\theta,\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$