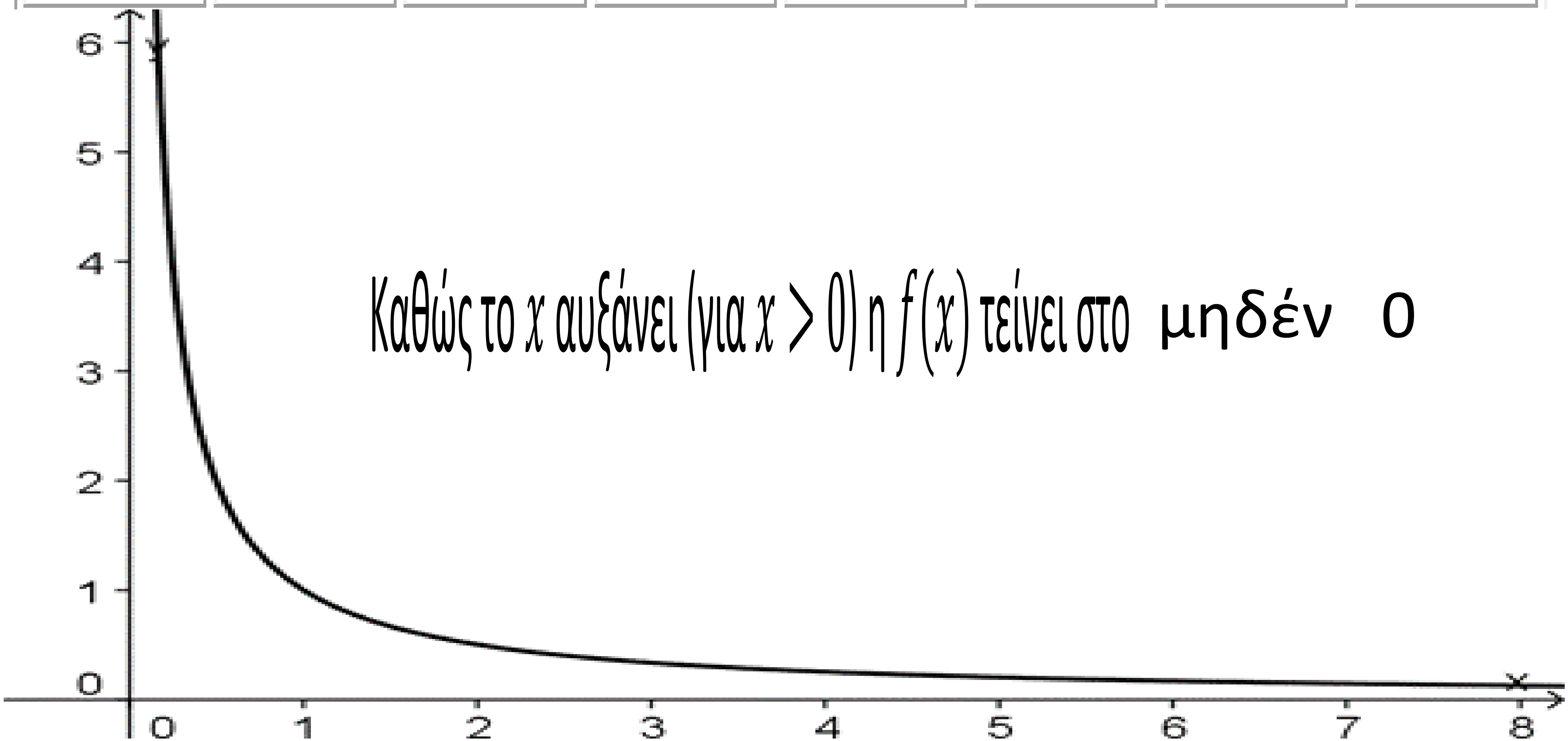
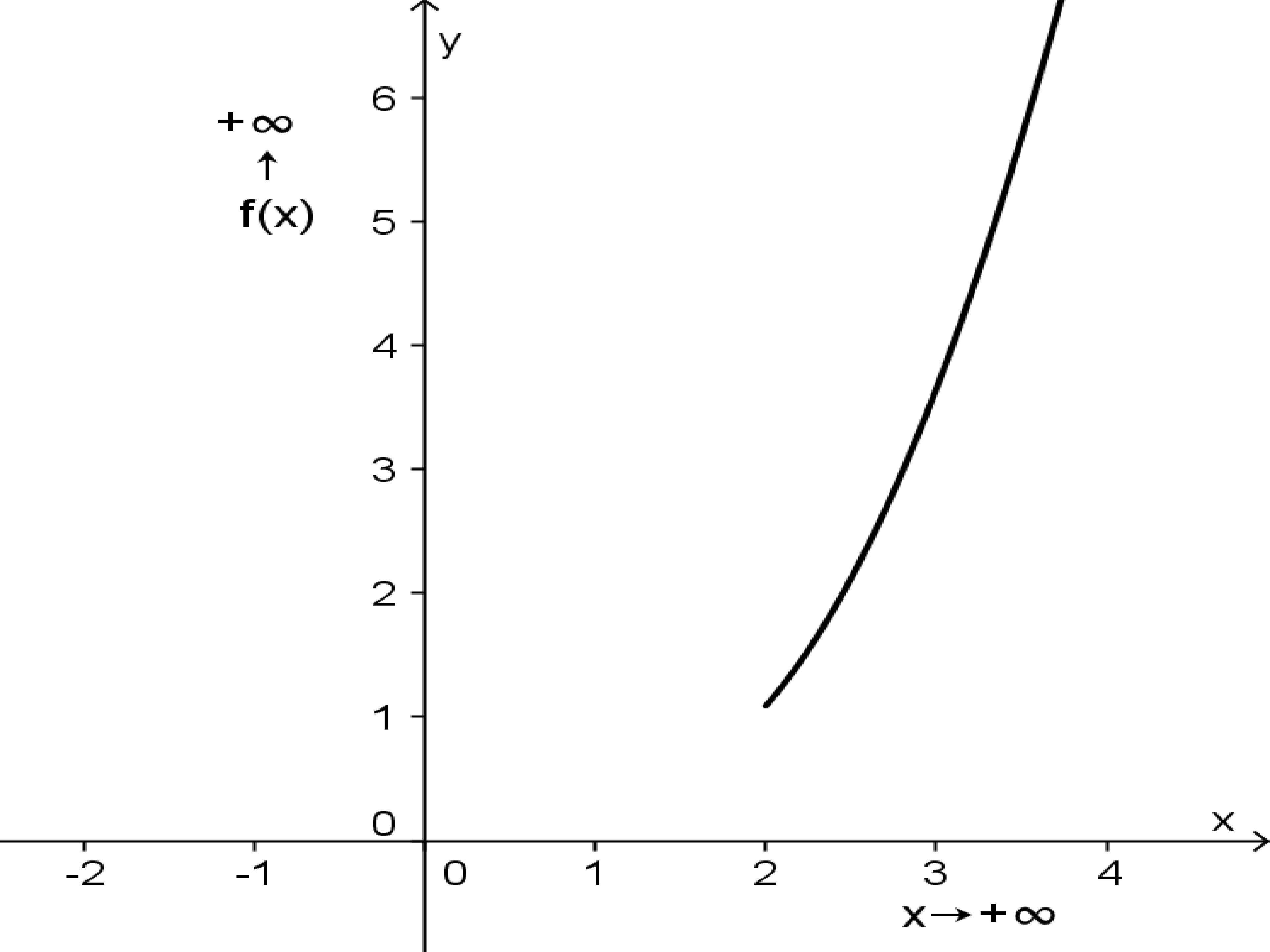
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 9

ΟΡΙΟ ΣΥΝΆΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΔΙΗΝΕΚΈΣ

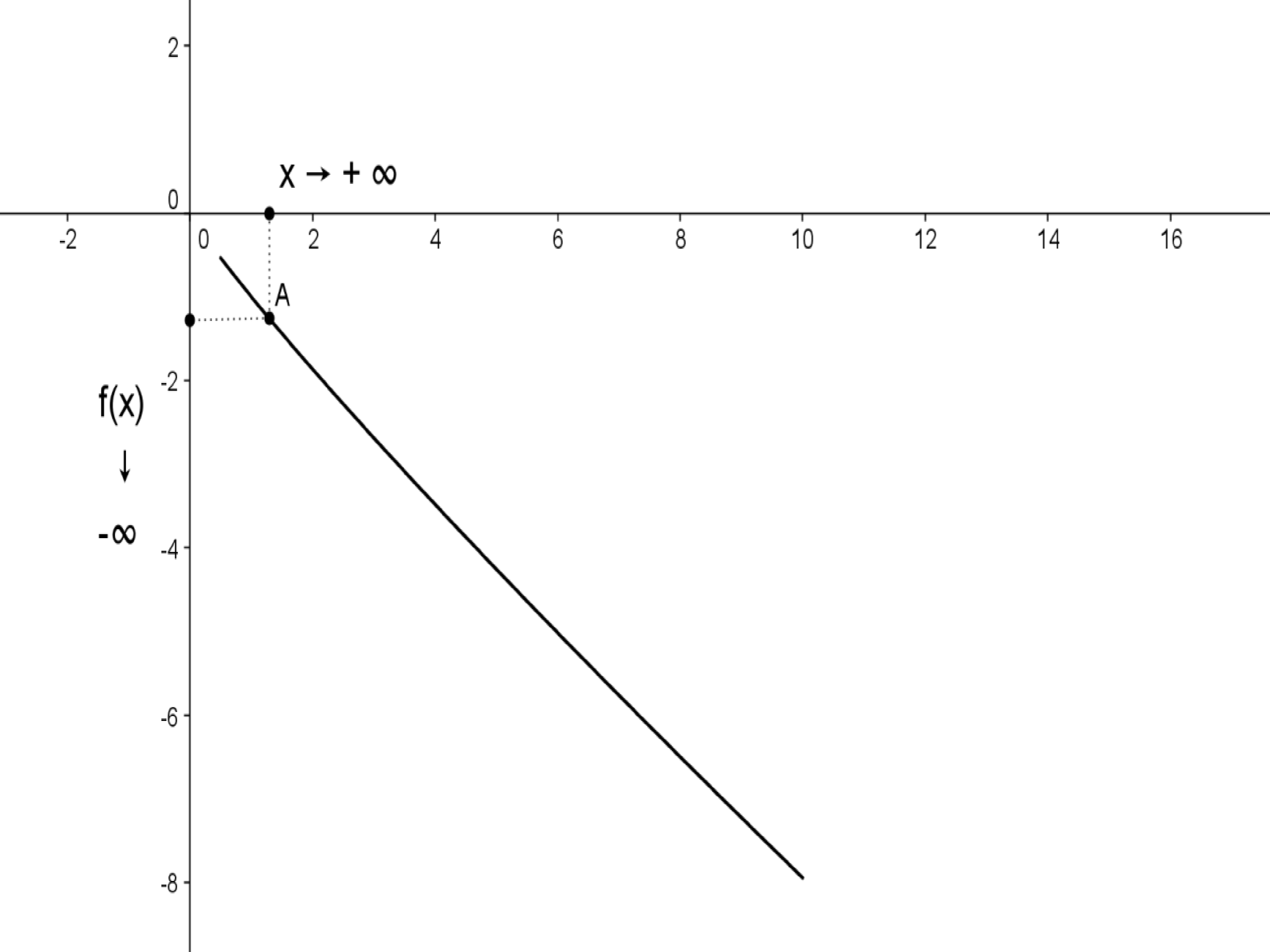
Ενδεικτικές τιμές της συνάρτησης $f(x) = {}^{1}/_{x}$, $(x > 0)$

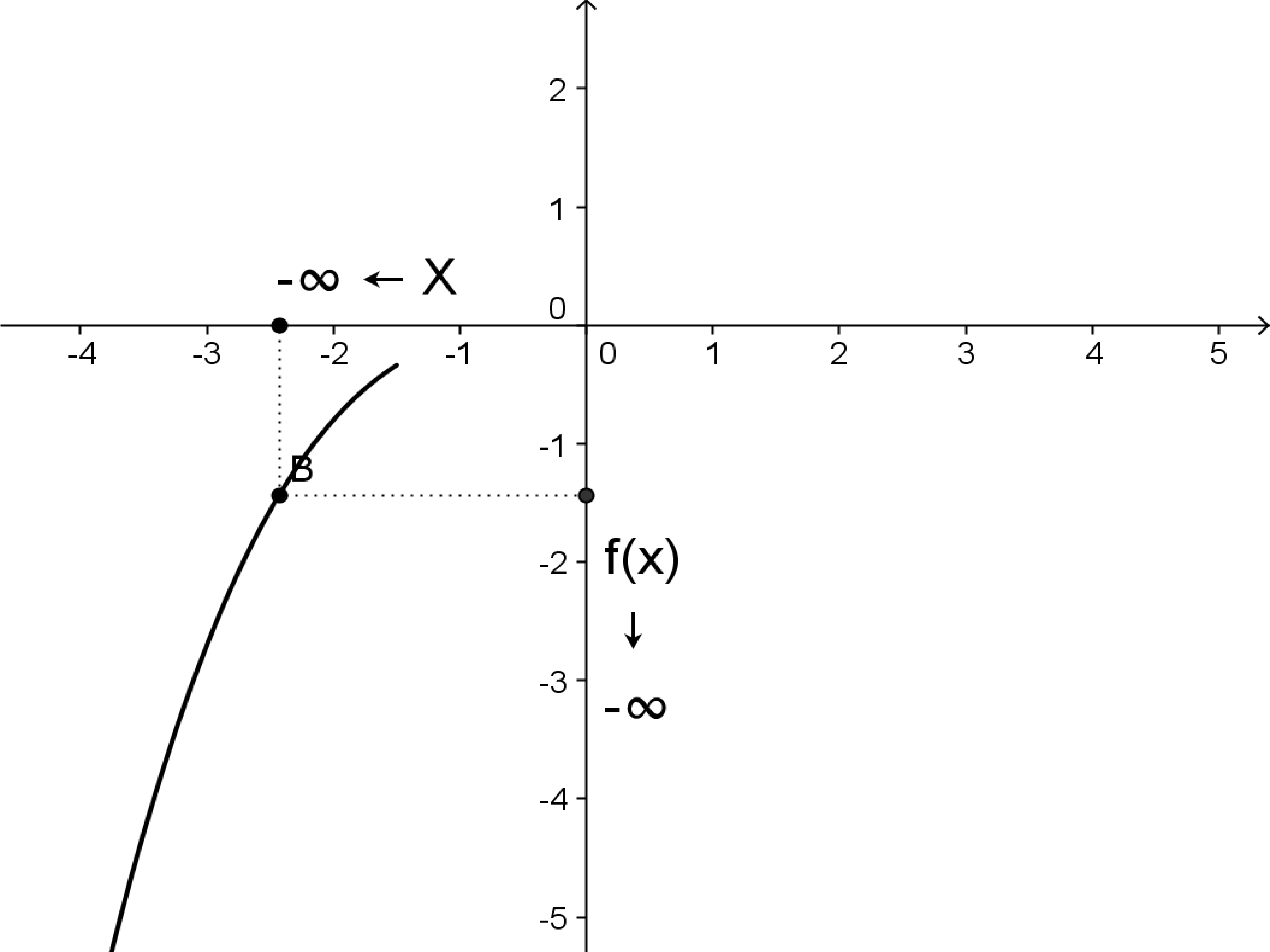
x	1	10	50	100	500	1.000	20.000
$1/x$	1	0,1	0,02	0,01	0,002	0,001	0,00005



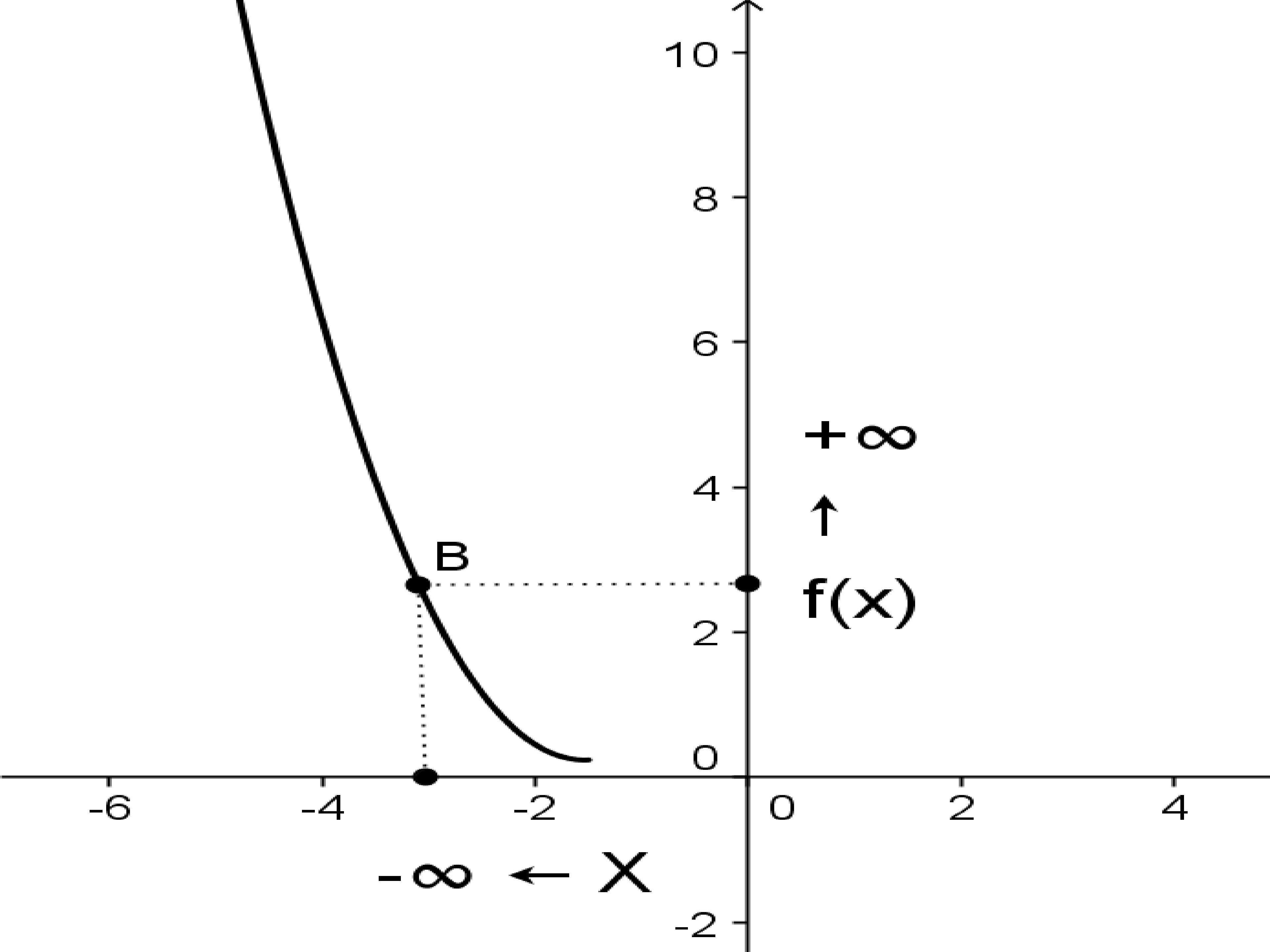


y
6
5
4
3
2
1
0
x
-2
-1
0
1
2
3
4
+∞
↑
f(x)
x→+∞


x → + ∞
f(x)
↓
-∞
A
0
2
4
6
8
10
12
14
16
-2
-4
-6
-8



-∞ ← X
B
f(x)
↓
-∞
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5


10
8
6
4
2
0
-2
-6
-4
-2
0
2
4
B
+∞
↑
f(x)
-∞ ← X

1. Το όριο πολυωνυμικής συνάρτησης

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

όταν το x τείνει στο άπειρο έχει ως αποτέλεσμα το $+\infty$ ή $-\infty$ ανάλογα με το πρόσημο του μεγαλύτερου σε βαθμό όρου. Συγκεκριμένα,

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n$ με συνθήκη $a_n \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}$. Το όριο $\lim_{x \to +\infty} a_n x^n$ διαφοροποιείται ανάλογα με την τιμή του α:

- για $\alpha > 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n = +\infty$, π.χ. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^5 = +\infty$

- για $\alpha < 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n = -\propto$ π.χ. $\lim\limits_{x\to+\infty} -5x^4 = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n$

  με συνθήκη $a_n \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}$. Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n$ διαφοροποιείται,

  όπως και παραπάνω, ανάλογα με την τιμή του α:

  - για $\alpha > 0$ και n άρτιος $\lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n = +\infty$, π.χ. $\lim\limits_{x\to-\infty} 7x^4 = +\infty$

  - για $\alpha > 0$ και n περιττός $\lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n = -\infty$, π.χ. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^3 = -\infty$

  - για $\alpha < 0$ και n άρτιος $\lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n = -\infty$, π.χ. $\lim\limits_{x\to-\infty} -5x^2 = +\infty$

  - για $\alpha < 0$ και n περιττός $\lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n = +\infty$, π.χ. $\lim\limits_{x\to-\infty} -7x^9 = +\infty$

- $\pm\infty \cdot 0 \longrightarrow$ Απροσδιοριστία
- $+\infty - \infty \rightarrow$ Απροσδιοριστία
- $\frac{0}{0} \longrightarrow$ Απροσδιοριστία
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \longrightarrow$ Απροσδιοριστία
- $0^0 \longrightarrow$ Απροσδιοριστία
- $\pm\infty^0 \longrightarrow$ Απροσδιοριστία
- $1^\infty \longrightarrow$ Απροσδιοριστία

1. Το όριο ρητής συνάρτησης

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + a_0}$$

μπορεί να βρεθεί με τη χρήση ενός πρακτικού κανόνα παρόμοιου με αυτόν του πολυωνύμου. Συγκεκριμένα,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + a_0} \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_k x^k}$$

με συνθήκη $Q(x) \neq 0$ και $n, k \in \mathbb{N}$. Με άλλα λόγια, το όριο της ρητής συνάρτησης καθορίζεται από τους μεγιστοβάθμιους όρους του αριθμητή και παρονομαστή.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^4 - x^3 - 3x - 5}{2x^3 + 7x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\left(\frac{x^4(3 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3} - \frac{5}{x^3}}{x^3\left(2 + \frac{7}{x^2}\right)}\right)}_{\substack{\kappa o\iota\nu\ \acute{o}\varsigma\ \pi\alpha\rho\ \acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\alpha\varsigma \\ \tau o\ x^4\ \kappa\alpha\iota\ \tau o\ x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x \cdot \frac{3 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3} - \frac{5}{x^3}}{\left(2 + \frac{7}{x^2}\right)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \cdot \lim_{x\to+\infty}\frac{3 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3} - \frac{5}{x^3}}{\left(2 + \frac{7}{x^2}\right)} = +\infty \cdot \frac{3}{2} = +\infty$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον κανόνα που προηγουμένως αναφέραμε μπορούμε να πάρουμε το όριο ως εξής:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^4-x^3-3x-5}{2x^3+7x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4}{2x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2}x=+\infty$$

Να βρεθούν τα όρια:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^5 - 2x^4 + 7x + 15}{-4x^2 + 2x + 3} \right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^5-2x^4+7x+15}{-4x^2+2x+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{-4x^2}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{4}x^3=-\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5x^7 - 4x^5 + 3x + 12}{2x^2 - 9x - 3} \right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5x^7 - 4x^5 + 3x + 12}{2x^2 - 9x - 3} \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{5x^7}{2x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{2} x^5 = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^4 + 3x^3 + x - 5}{3x^2 + 2x + 1} \right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^4+3x^3+x-5}{3x^2+2x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4}{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3}x^2=+\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{7x^2 + 3x + 2}{2x^3 - 2x^2 + 3} \right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{7x^2 + 3x + 2}{2x^3 - 2x^2 + 3} \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{7x^2}{2x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{7}{2x} = 0$$

- Για $0 < \alpha < 1$, τότε
  - $\lim_{x \to +\infty} \alpha^x = 0$
  - $\lim_{x \to -\infty} \alpha^x = +\infty$
- Για $\alpha > 1$, τότε
  - $\lim_{x \to +\infty} \alpha^x = +\infty$, π.χ. για τον αριθμό e έχουμε
    - $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
  - . $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1}$

Λύση: Κατ’ αρχήν θα βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Η υπόριζη ποσότητα πρέπει να είναι θετική. Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - x + 1$, η οποία είναι: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$, επομένως η παράσταση είναι θετική για κάθε $x \in \mathcal{R}$ και άρα το πεδίο ορισμού είναι όλο το $\mathcal{R}$. Για $x < 0$, καθώς το x τείνει στο μείον άπειρο, έχουμε:

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 - x + 1) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

Επομένως, $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} = \lim_{x \to -\infty} |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} -x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -(-\infty)$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} = +\infty$$

Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2})$

Λύση: Οι υπόριζες ποσότητες x^2+1 και x^2+2 είναι θετικές για κάθε $x \in \mathcal{R}$. Συνεπώς, το πεδίο ορισμού της παραπάνω συνάρτησης είναι όλο το $\mathcal{R}$. Για $x>0$ καθώς το x τείνει στο $+\infty$ έχουμε

- $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}\right)=+\infty-(+\infty)=+\infty-\infty \longrightarrow$ απροσδιοριστία.

Για να άρουμε την απροσδιοριστία πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε την παραπάνω παράσταση με τη συζυγή της.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}\right)=$$

- Αν η ρίζα είναι τετραγωνική τότε η συζυγής παράσταση του $a+b$ είναι το $a-b$ και αντίστροφα, δηλαδή $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$
- Αν η ρίζα είναι τρίτης τάξης της μορφής $(a+b)$ τότε η συζυγής παράσταση είναι το a^2-ab+b^2, δηλαδή $(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
- Αν η ρίζα είναι τρίτης τάξης της μορφής $(a-b)$ τότε η συζυγής παράσταση είναι το a^2+ab+b^2, δηλαδή $(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2} \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+2}} \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2+2}\right)^2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+2}} \right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{(x^2+1)-(x^2+2)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}} \right)}_{\substack{\text{στον παρονομαστή} \\ \text{βγάλαμε κοινό} \\ \text{παράγοντα το} \\ \text{μεγιστοβάθμιο } x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1-x^2-2}{(x)\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+(x)\cdot\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}} \right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} \cdot \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}} \right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{(1+0)} + \sqrt{(1+0)}}\right)}_{\text{το όριο } \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n}=0} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{25x^2+3}}{x+4}$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{cases} 25x^2 + 3 \geq 0 \\ x + 4 \neq 0 \end{cases}$$

η ποσότητα $25x^2 + 3$ είναι πάντα θετική, συνεπώς αρκεί το $x \neq -4$. Επομένως, το πεδίο ορισμού είναι το $\mathcal{R} - \{-4\}$. Το x τείνει στο $+\infty$, συνεπώς για $x > 0$ έχουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{25x^2 + 3}}{x + 4} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\sqrt{x^2(25+\frac{3}{x^2})}}^{\text{κοινός παράγοντας το } x^{2}}}{x+4}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\overbrace{\sqrt{(25+\frac{3}{x^2})}}^{|x|=x \text{ αφού } x>0}}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{25+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}}}{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x}}=\frac{\sqrt{25}}{1}=5$$

Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{2x^2 + x + 2} + 2x\right)$$

Λύση: Για να έχει νόημα η συνάρτηση το υπόριζο πρέπει να είναι θετικό. Συνεπώς, υπολογίζουμε τη διακρίνουσα του τριωνύμου $2x^2 + x + 2$ και έχουμε: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -15 < 0$, έπεται, λοιπόν, ότι η παράσταση είναι θετική για κάθε $x \in \mathcal{R}$ και άρα το πεδίο ορισμού είναι όλο το $\mathcal{R}$. Για $x < 0$, καθώς το x τείνει στο $-\infty$, έχουμε:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{2x^2 + x + 2} + 2x \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} + 2x \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(|x| \cdot \left(\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} \right) + 2x \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\left(-x \cdot \left(\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} \right) + 2x \right)}_{\text{επειδή } x<0, |x|=-x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\left(x \left(-1 \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} \right) + 2 \right)}_{\text{κοινός παράγοντας το } x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x \cdot \lim_{x\to-\infty}\left(-1\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+2\right)=$$

$$=-\infty\cdot\left(-1\cdot\sqrt{2}+2\right)=$$

$$=-\infty\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)=\underbrace{-\infty}_{\substack{2-\sqrt{2}>0 \\ \text{αφού} \\ 2>\sqrt{2}}}$$

Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2 + 3^{\frac{1}{x}}}$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathcal{R}$. Το όριο της συνάρτησης είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2+3^{\frac{1}{x}}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}x}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+3^{\frac{1}{x}}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}x}{2+\lim\limits_{x\to+\infty}3^{\frac{1}{x}}}=$$

$$= \overbrace{\frac{+\infty}{2+3^{\frac{1}{+\infty}}} = \frac{+\infty}{2+3^{0}}}^{\frac{\lambda}{\pm\infty}=0} =$$

$$\frac{+\infty}{2+1} = \frac{+\infty}{3} = +\infty$$

- ***Να βρεθεί το όριο***
- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3+3x}{4x^3+7}}$

- ***Να βρεθεί το όριο***
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^3+3x}{4x^3+7}}$
- **Λύση**
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^3+3x}{4x^3+7}} = \sqrt{\dfrac{\lim\limits_{x \to +\infty}(x^3+3x)}{\lim\limits_{x \to +\infty}(4x^3+7)}} = \sqrt{\dfrac{+\infty}{+\infty}}$
- *Άλγεβρα για να άρουμε την απροσδιοριστία*

- *Άλγεβρα για να άρουμε την απροσδιοριστία*
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3+3x}{4x^3+7}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3(1+\frac{3}{x^2})}{x^3(4+\frac{7}{x^3})}}$
-
- $= \sqrt{\frac{(1+\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x^2})}{(4+\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{7}{x^3})}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

- **_Να βρεθεί το όριο_**
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x-2}{x}$

- ***Να βρεθεί το όριο***
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x-2}{x}$
- **Λύση**
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x-2}{x} = \frac{-\propto}{-\infty}$
-
- *Άλγεβρα για να άρουμε την απροσδιοριστία*
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x-2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{3x}{x} - \frac{2}{x}) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3 - \frac{2}{x}) = 3$
- ή
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x-2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x}{x} = 3$

- ***Να βρεθεί το όριο***
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^3 - 17x^2)$

- ***Να βρεθεί το όριο***
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^3-17x^2)$
- **Λύση**

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^3-17x^2)=+\infty-\infty$ *απροσδιοριστία*
- *Άλγεβρα για να άρουμε την απροσδιοριστία*

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^3-17x^2)=\lim_{x\to+\infty}[x^2(3x-17)]=+\infty*+\infty=+\infty$$

Να βρεθεί το όριο

- $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2+3}{8x^2-1}}$

- $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2+3}{8x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{\frac{(x^2+3)*\frac{1}{x^2}}{(8x^2-1)*\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{8x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}} =$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{\frac{1+\frac{3}{x^2}}{8-\frac{1}{x^2}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

Να βρεθεί το όριο

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+2}{\sqrt{9x^2+1}}$

Λύση

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{\sqrt{9x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1+\frac{2}{x})}{\sqrt{x^2(9+\frac{1}{x^2})}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1+\frac{2}{x})}{|x|\sqrt{(9+\frac{1}{x^2})}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1+\frac{2}{x})}{-x\sqrt{(9+\frac{1}{x^2})}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-\frac{(1+\frac{2}{x})}{\sqrt{(9+\frac{1}{x^2})}}=-\frac{1}{\sqrt{9}}=-\frac{1}{3}$$

- **Να βρεθεί το όριο**

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - x^8)$$

- Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - x^8)$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^3(1 - x^5) = +\infty * (1 - \infty)$$

$$= +\infty * -\infty = -\infty$$