ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 7

Μη Πεπερασμένα Όρια

Εάν οι τιμές μιας συνάρτησης $f(x)$ αυξάνονται ή μειώνονται συνεχώς χωρίς να προσεγγίζουν μια συγκεκριμένη τιμή (κινούνται στο διηνεκές), ενώ παράλληλα η μεταβλητή x πλησιάζει με οποιονδήποτε τρόπο την τιμή x_0, τότε το όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι το $+\infty$ ή το $-\infty$.

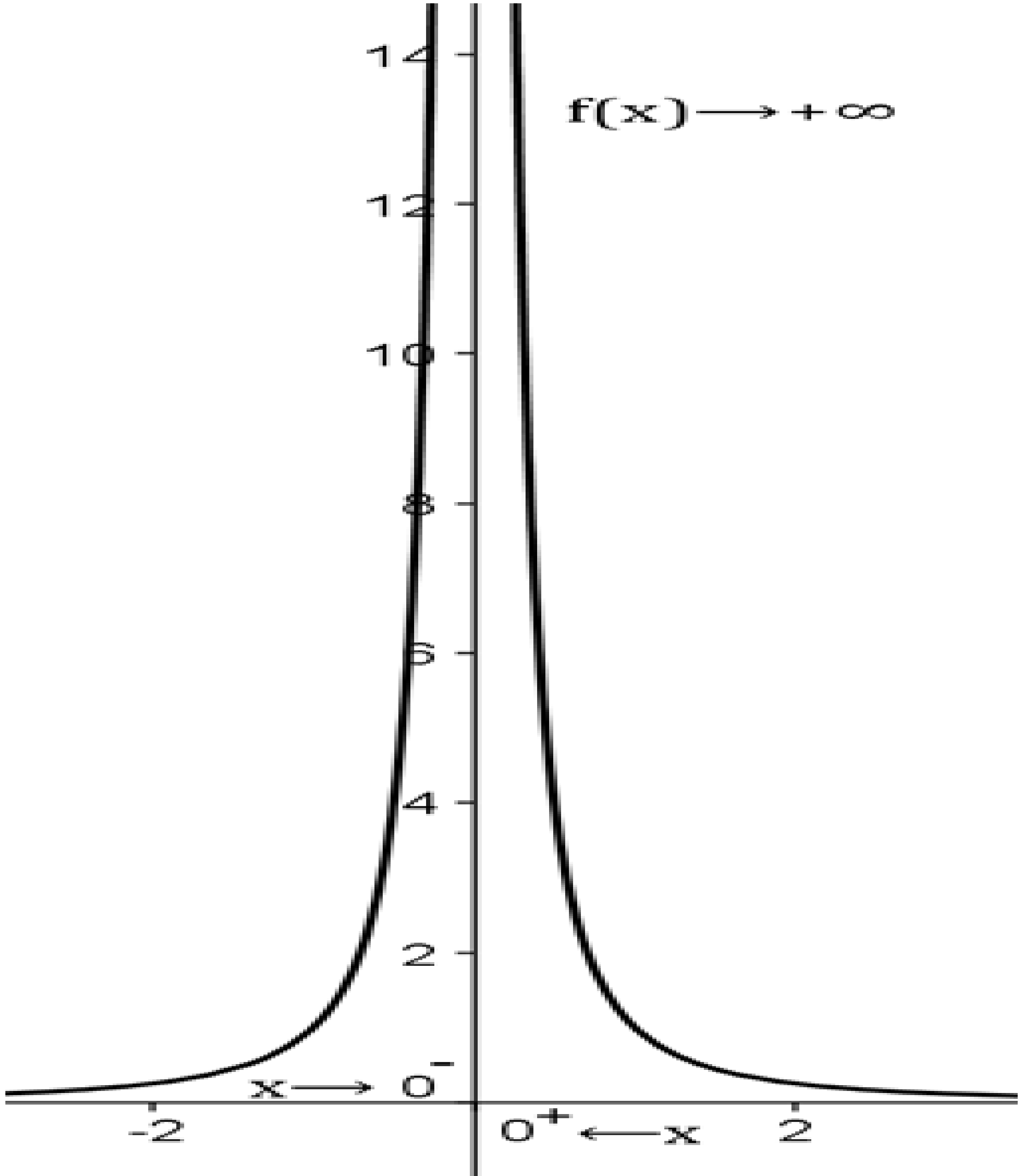
Ορισμός: Μια συνάρτηση $f(x)$, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, έχει στο x_0

- όριο $+\infty$, δηλαδή $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε x με $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει ότι $f(x) > \varepsilon$.

Έστω, η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2}$ και αναζητούμε το όριο αυτής στο $x_0 = 0$, τότε όσο **πλησιάζουμε στο 0**, είτε από δεξιά, είτε από αριστερά, τόσο η τιμή του $f(x)$ αυξάνεται με τάση, φυσικά, το διηνεκές.

$\boldsymbol{x}$ **δεξιά του** $\mathbf{0}^{+}$	$\mathbf{1/x^2}$	$\boldsymbol{x}$ **αριστερά του** $\mathbf{0}^{-}$
1	1	-1
$0,9$	$1,23$	$-0,9$
$0,8$	$1,56$	$-0,8$
$0,7$	$2,04$	$-0,7$
$0,5$	4	$-0,5$

x **δεξιά του** $\mathbf{0}^{+}$	$\mathbf{1/}x^{\mathbf{2}}$	x **αριστερά του** $\mathbf{0}^{-}$
1	1	-1
$0{,}3$	$11{,}11$	$-0{,}3$
$0{,}2$	25	$-0{,}2$
$0{,}1$	100	$-0{,}1$
$0{,}01$	10.000	$-0{,}01$
$0{,}001$	$1.000.000$	$-0{,}001$
$0{,}0001$	$100.000.000$	$-0{,}0001$



14
12
10
8
6
4
2
-2
2
f(x) ⟶ +∞
x ⟶ 0⁻
0⁺ ⟵ x

Γενικότερα, για $f(x) = \dfrac{c}{x^{2\lambda}}$ ισχύει:

- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{c}{x^{2\lambda}} \right) = +\infty, \quad c > 0 \text{ και } \lambda \in \mathbb{N}^*$

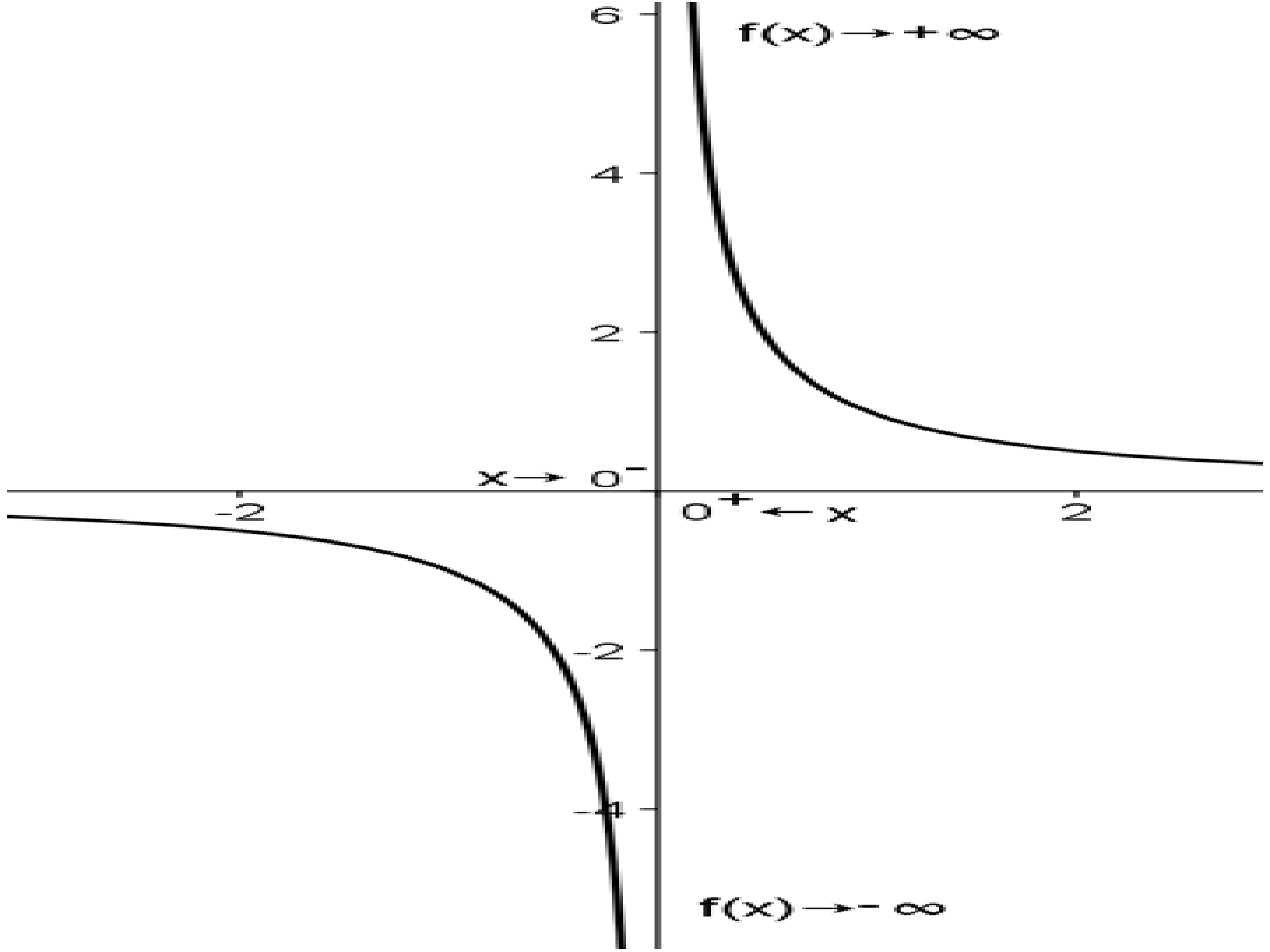
- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{c}{x^{2\lambda}} \right) = -\infty, \quad c < 0 \text{ και } \lambda \in \mathbb{N}^*$

Στην περίπτωση, βέβαια, της συνάρτησης $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)$ το όριο στο 0 δεν

υπάρχει, καθώς $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \neq \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$.

Δεξιά του μηδενός οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ βαίνουν αυξανόμενες καθώς το x τείνει στο 0, αριστερά του μηδενός οι τιμές της συνάρτησης είναι αρνητικές και συνεχώς μειούμενες καθώς το x πλησιάζει το μηδέν,

x με τιμές δεξιά του 0	$1/x$	x με τιμές αριστερά του 0	$1/x$
1	1	-1	-1
0,9	1,11	-0,9	-1,11
0,8	1,25	-0,8	-1,25
0,7	1,42	-0,7	-1,42
0,5	2	-0,5	-2
0,3	3,33	-0,3	-3,33
0,2	5	-0,2	-5
0,1	10	-0,1	-10
0,01	100	-0,01	-100
0,001	1.000	-0,001	-1.000
0,0001	10.000	-0,0001	-10.000



6
4
2
-2
-4
-2
2
f(x) → +∞
x → 0⁻
0⁺ ← x
f(x) → −∞

- Εάν $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

- Εάν $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, τότε $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$

- Εάν $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ στην περιοχή του x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

- Εάν $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ στην περιοχή του x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Περίπτωση	I	II	III
Όριο της συνάρτησης f	$c \in \mathcal{R}$	$c \in \mathcal{R}$	$+\infty$
Όριο της συνάρτησης g	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Όριο της συνάρτησης $f + g$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Περίπτωση	IV	V	VI
Όριο της συνάρτησης f	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Όριο της συνάρτησης g	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Όριο της συνάρτησης $f + g$	**Απροσδιοριστία**	**Απροσδιοριστία**	$-\infty$

Περίπτωση	I	II	III	IV
Όριο της συνάρτησης f	$c>0$	$c<0$	$c>0$	$c<0$
Όριο της συνάρτησης g	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Όριο της συνάρτησης $f \cdot g$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Περίπτωση	V	VI
Όριο της συνάρτησης f	0	0
Όριο της συνάρτησης g	$+\infty$	$-\infty$
Όριο της συνάρτησης $f \cdot g$	Απροσδιοριστία	Απροσδιοριστία

Περίπτωση	VII	VIII	IX	X
Όριο της συνάρτησης f	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Όριο της συνάρτησης g	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Όριο της συνάρτησης $f \cdot g$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Ασκήσεις:

1	$\lim_{x\to 3^-} f(x)$	$f(x)=\dfrac{x-1}{x-3}$

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$, καθώς ο παρονομαστής της $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$ θα πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός, δηλαδή $x - 3 \neq 0$. Το όριο της συνάρτησης είναι

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x-1}{x-3} = \frac{3-1}{3-3} = \frac{2}{0}$$

Πρώτο βήμα αποτελεί η εύρεση του ορίου του αριθμητή: $\lim_{x \to 3^-} (x - 1) = 3 - 1 = 2$.

Δεύτερο βήμα αποτελεί η εύρεση του ορίου του παρονομαστή: $\lim_{x \to 3^-} (x - 3) = 0$.

Τρίτο βήμα αποτελεί η εκτίμηση της παράστασης του παρονομαστή με αντικατάσταση όπου x του x_0 Επειδή αναζητούμε το πλευρικό όριο της f αριστερά του $x_0 = 3$, η ποσότητα $x - 3$ πρέπει να είναι μικρότερη από 0, αφού το x προσεγγίζει το 3 από αριστερά. Για παράδειγμα, $x = 2,99$, τότε $2,99 - 3 = -0,01 < 0$. Συνεπώς, η άσκηση εντάσσεται στην περίπτωση IV του πίνακα 10.5, επομένως $\lim_{x \to 3^-} \frac{x-1}{x-3} = -\infty$.

Άσκηση

2	$\lim_{x \to 1} f(x)$	$f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 2x + 1}$

- $$\lim_{x\to 1} \frac{3}{x^2-2x+1} = \frac{3}{1^2-2*1+1} = \frac{3}{0}$$

- $$x^2 - 2x + 1 \neq 0$$

- $$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$
- $$x \neq 1$$

- $$\lim_{x\to 1^+} \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

- $$\lim_{x\to 1^-} \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, καθώς ο παρονομαστής της $f(x) = \frac{3}{x^2-2x+1}$ θα πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός, δηλαδή $x^2 - 2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow (\chi - 1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Επειδή $\lim_{x\to 1} \frac{3}{x^2-2x+1} = \frac{3}{0}$, ακολουθούμε τα βήματα της προηγούμενης άσκησης.

Πρώτο βήμα: ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος του μηδενός ($c = 3 > 0$).

Δεύτερο βήμα: Το όριο του παρονομαστή είναι $\lim_{x\to 1}(x^2 - 2x + 1) = 0$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3}{x^2-2x+1}$$

Τρίτο βήμα: Ο παρονομαστής είναι ταυτότητα και γι αυτό είναι μεγαλύτερος του μηδενός, διότι $(x-1)^2>0$ ενώ το x δεν μπορεί να λάβει ποτέ την τιμή 1 παρά μόνο να την προσεγγίσει.

Για παράδειγμα, εάν γίνει $x=0{,}99$ τότε $(0{,}99-1)^2>0$ ή εάν γίνει $x=1{,}1$ πάλι $(1{,}1-1)^2>0$.

επομένως $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3}{x^2-2x+1}=+\infty$.

Άσκηση

3	$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$	$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}}$

Κατ’ αρχήν θα πρέπει να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Η συνάρτηση θα έχει νόημα όταν

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 1 \end{cases}$$

Συνεπώς, το πεδίο ορισμού της f θα είναι $A = [0,1)$. Το όριο της συνάρτησης στο $x_0 = 1$ δεν υπάρχει, καθώς η εν λόγω συνάρτηση ορίζεται μόνο αριστερά του 1, δηλαδή υπάρχει μόνο το αριστερό πλευρικό όριο.

Για τον υπολογισμό του πλευρικού ορίου $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{1-\chi}}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Πρώτο βήμα: Υπολογίζουμε το όριο του αριθμητή: $\lim\limits_{x \to 1^-} = 1$.

Τρίτο βήμα: Εκτιμούμε το μέγεθος του παρονομαστή $\sqrt{1-x}>0$ που ισχύει για κάθε x του πεδίου ορισμού, καθώς το x παίρνει σε κάθε περίπτωση οριακές τιμές μικρότερες του 1 αλλά ποτέ 1.

Για παράδειγμα, για $x=0{,}99$ τότε $\sqrt{1-0{,}99}>0$.

Η άσκηση εντάσσεται στην περίπτωση ΙΙΙ και επομένως $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}=+\infty$.

Άσκηση

4	$\lim_{x \to 0} f(x)$	$f(x) = \dfrac{x+1}{x^3 - 3x^2}$

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$, καθώς ο παρονομαστής της $f(x) = \frac{x+1}{x^3-3x^2}$ θα πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός, δηλαδή $f(x) = \frac{\chi+1}{x^3-3x^2} = \frac{\chi+1}{x^2(x-3)}$ που σημαίνει $\begin{cases} x^2 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$. Επειδή $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x+1}{x^2(x-3)} = \frac{1}{0}$ ακολουθούμε τα εξής βήματα.

Πρώτο βήμα: παρουσιάζουμε την συνάρτηση ως γινόμενο δυο κλασμάτων,

δηλαδή $f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x+1}{(x-3)}$.

Δεύτερο βήμα: Το όριο του πρώτου κλάσματος είναι $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Τρίτο βήμα:το όριο του δεύτερου κλάσματος είναι $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x+1}{(x-3)} = -\frac{1}{3} = c < 0$.

Η άσκηση εντάσσεται στην περίπτωση IV του πίνακα και επομένως

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{\chi + 1}{(x-3)} \right) = -\infty$$

Άσκηση

6	$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$	$f(x) = \dfrac{x-1}{x^4} + \dfrac{1}{x^2}$

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, καθώς ο παρονομαστής της $f(x) = \frac{x-1}{x^4} + \frac{1}{x^2}$ θα πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός. Δηλαδή θα πρέπει $x^4 \neq 0$ και $x^2 \neq 0$. που σημαίνει ότι θα πρέπει $x \neq 0$. Το όριο της συνάρτησης είναι

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{x-1}{x^4} + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\chi - 1}{x^4}\right) + \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\infty + \infty$$

δηλαδή έχουμε απροσδιοριστία.

Για να άρουμε την απροσδιοριστία κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα, ώστε να έχουμε έναν κοινό παρονομαστή $f(x) = \frac{x-1}{x^4} + \frac{x^2}{x^4} = \frac{x^2+x-1}{x^4}$.

Το όριο στην περίπτωση αυτή είναι $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+x-1}{x^4} = -\infty$.

Να σημειωθεί ότι τα πλευρικά όρια της f στο 0 οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα, καθώς ο παρονομαστής είναι υψωμένος σε άρτιο αριθμό, γεγονός που σημαίνει ότι είναι σε κάθε περίπτωση θετικός.

Άσκηση

7	$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$	$f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, καθώς ο παρονομαστής θα πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός. Δηλαδή,

$$x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Το όριο της συνάρτησης f είναι

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

που σημαίνει απροσδιοριστία.

Για να άρουμε την απροσδιοριστία εργαζόμαστε ως εξής:

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2)^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = x^2 + 1$$

Συνεπώς, το όριο της συνάρτησης θα είναι $\lim\limits_{x \to 1}(x^2 + 1) = 2$.

Άσκηση

8	$\lim_{x \to -1} f(x)$	$f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - 2x - 3}$

ο παρονομαστής θα πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός. Η διακρίνουσα του παρονομαστή $x^2 - 2x - 3 = 0$ είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$, οπότε οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2a} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \\ x_2 = \dfrac{-(-3) - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \\ x_2 = \dfrac{-(-3) - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2 + 4}{2} \\ x_2 = \dfrac{2 - 4}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$, Το όριο της συνάρτησης f είναι

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-2x-3}=\frac{(-1)^3+3(-1)^2+2(-1)}{(-1)^2-2(-1)-3}=\frac{0}{0}$$

που σημαίνει απροσδιοριστία. Για να άρουμε την απροσδιοριστία μετασχηματίζουμε τη συνάρτηση ως εξής:

ρίζες $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-2 \end{cases}$

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-2x-3}=\frac{x(x^2+3x+2)}{(x-3)(x+1)}=\frac{x(x+1)(x+2)}{(x-3)(x+1)}=\frac{x(x+2)}{(x-3)}$$

Το όριο της συνάρτησης f θα είναι

$$\lim_{x\to -1}\frac{x(x+2)}{(x-3)}=\frac{-1\cdot(-1+2)}{(-1-3)}=\frac{-1\cdot(1)}{(-4)}=\frac{1}{4}$$

Άσκηση

9	$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$	$f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$,

καθώς ο παρονομαστής θα πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός, δηλαδή

$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Το όριο της συνάρτησης είναι

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt[3]{1} - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

που σημαίνει απροσδιοριστία.

Για να άρουμε την απροσδιοριστία εργαζόμαστε ως εξής

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 - 1^3} = \quad (\alpha^3 - \beta^3)$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt[3]{x} - 1}}{\cancel{\sqrt[3]{x} - 1}\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x} \cdot 1\right) + 1^2\right)} =$$

$$(\alpha^3 - \beta^3) = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x} + 1}$$

Κατόπιν τούτου το όριο της συνάρτησης είναι

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{1}\right)^2 + \sqrt[3]{1} + 1} = \frac{1}{3}$$

10	$\lim_{x \to 0^+} f(x)$	$f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (0, +\infty)$, καθώς ο παρονομαστής θα πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός και τα υπόριζα μεγαλύτερα ή ίσα του μηδενός, δηλαδή

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

Επειδή

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{0}{0}$$

έχουμε απροσδιοριστία

Για να άρουμε την απροσδιοριστία μετασχηματίζουμε τη συνάρτηση ως

εξής:

$$f(x) = \frac{\chi - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}}$$

Το όριο της συνάρτησης είναι:

$$\lim_{x \to 0^+}\left(\sqrt{x} - 1\right) = \left(\sqrt{0} - 1\right) = -1.$$

- ***Να βρεθεί το όριο***
- $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2}{x^2 - 16}$

- ***Να βρεθεί το όριο***
- $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2}{x^2 - 16}$
- *Λύση*
- $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2}{x^2 - 16} = \frac{16}{16 - 16} = \frac{16}{0}$
- *Θα πρέπει να εξετάσουμε τα πλευρικά όρια για να διαπιστώσουμε εάν το όριο είναι* $+\infty$ *ή* $-\infty$

- *Εάν* $x \to 4^-$
- $\lim_{x \to 4^-} \frac{x^2}{x^2-16} = \lim_{x \to 4^-} \frac{x^2}{(x-4)(x+4)} = -\infty$
- $-\infty$ *διότι* $\frac{(+)^2}{(-)(+)} = -$
-
- *Εάν* $x \to 4^+$
- $\lim_{x \to 4^+} \frac{x^2}{x^2-16} = \lim_{x \to 4^+} \frac{x^2}{(x-4)(x+4)} = +\infty$
- $+\infty$ *διότι* $\frac{(+)^2}{(+)(+)} = +$
-
- *Συνεπώς το όριο δεν υπάρχει*

- ***Να βρεθεί το όριο***
- $\lim\limits_{x-3} \frac{x^2-2x-3}{x^2+6x+9}$

- ***Να βρεθεί το όριο***
- $\lim\limits_{x-3} \frac{x^2-2x-3}{x^2+6x+9}$
- *Λύση*
- $\lim\limits_{x\to-3} \frac{x^2-2x-3}{x^2+6x+9} = \lim\limits_{x\to-3} \frac{(-3)^2-2*(-3)-3}{(-3)^2+6*(-3)+9} = \frac{9+6-3}{9-18+9} = \frac{12}{0}$
- *Θα πρέπει να εξετάσουμε τα πλευρικά όρια για να διαπιστώσουμε εάν το όριο είναι* $+\infty$ *ή* $-\infty$

- $Εάν\ x \to -3^-$ $\qquad \lim_{x \to -3^-} \frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)^2} = +\infty$
- $-3{,}2 \ldots . -3{,}1 \ldots - 3 \ldots - 2{,}9 \ldots - 2{,}8$
- $+\infty$ *διότι έστω* $x \to -3^- \approx -3{,}1,$
- *τότε* $\frac{(-3{,}1-3)(-3{,}1+1)}{(-3{,}1+3)^2} = \frac{(-)(-)}{(-)^2} = +$
-
- $Εάν\ x \to -3^+$ $\qquad \lim_{x \to -3^+} \frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)^2} = +\infty$
- $+\infty$ *διότι έστω* $x \to -3^+ \approx -2{,}9,$
- *τότε* $\frac{(-2{,}9-3)(-2{,}9+1)}{(-2{,}9+3)^2} = \frac{(-)(-)}{(+)^2} = +$
- *Συνεπώς το όριο είναι* $+\infty$ $\qquad \lim_{x \to -3} \frac{x^2-2x-3}{x^2+6x+9} = +\infty$

Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 4} =$$

Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+4}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+4)(x-1)}{(x-2)^2}=\frac{6*1}{0^+}$$

$$=+\infty$$

Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{0^- * (2)}$$

$$= -\infty$$