Μαθηματικά 12

Ακρότατα Συνάρτησης

- Εάν μια τιμή a του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f είναι τέτοια

 που για κάθε x του εν λόγω πεδίου ορισμού ισχύει

$$f(x) \leq f(a)$$

τότε θα λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει *μέγιστο* στο a (το $f(a)$).

- Εάν μια τιμή a του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f είναι τέτοια που για κάθε x του εν λόγω πεδίου ορισμού ισχύει

$$f(x) \geq f(a)$$

τότε θα λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει *ελάχιστο* στο a (το $f(a)$).

- Εάν μια τιμή a που ανήκει σε ένα ανοιχτό διάστημα Δ του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f είναι τέτοια που για κάθε x του εν λόγω διαστήματος ισχύει

$$f(x) \leq f(a)$$

τότε θα λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει *τοπικό μέγιστο* στο a (το $f(a)$).

- Εάν μια τιμή a που ανήκει σε ένα ανοιχτό διάστημα Δ του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f είναι τέτοια που για κάθε x του εν λόγω διαστήματος ισχύει

$$f(x) \geq f(a)$$

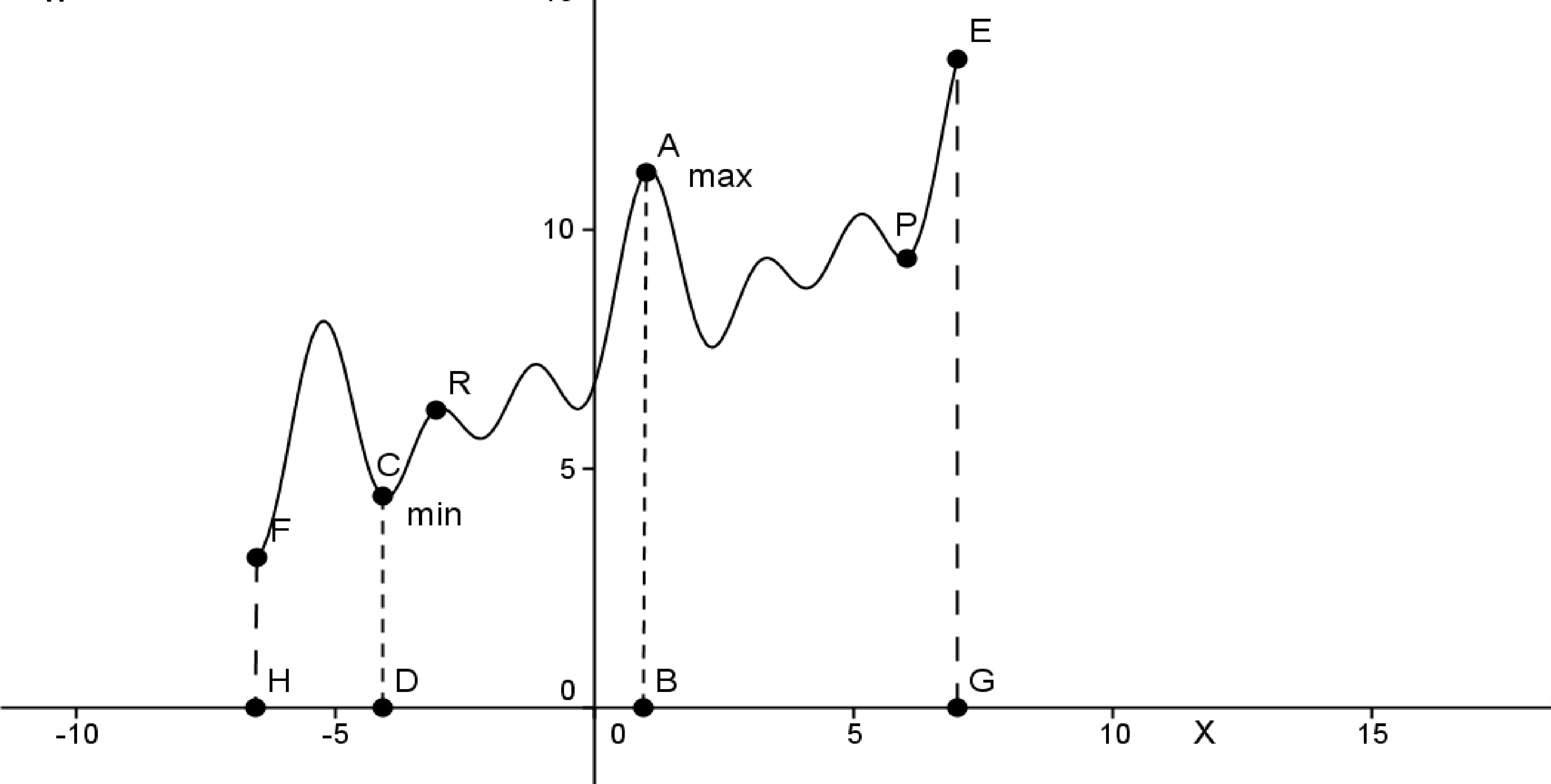
τότε θα λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει *τοπικό ελάχιστο* στο a (το $f(a)$).

Το μέγιστο και το ελάχιστο μιας συνάρτησης f ονομάζονται *ακρότατα*, ενώ το μέγιστο και το ελάχιστο σε διαστήματα της f ονομάζονται *τοπικά ακρότατα*.

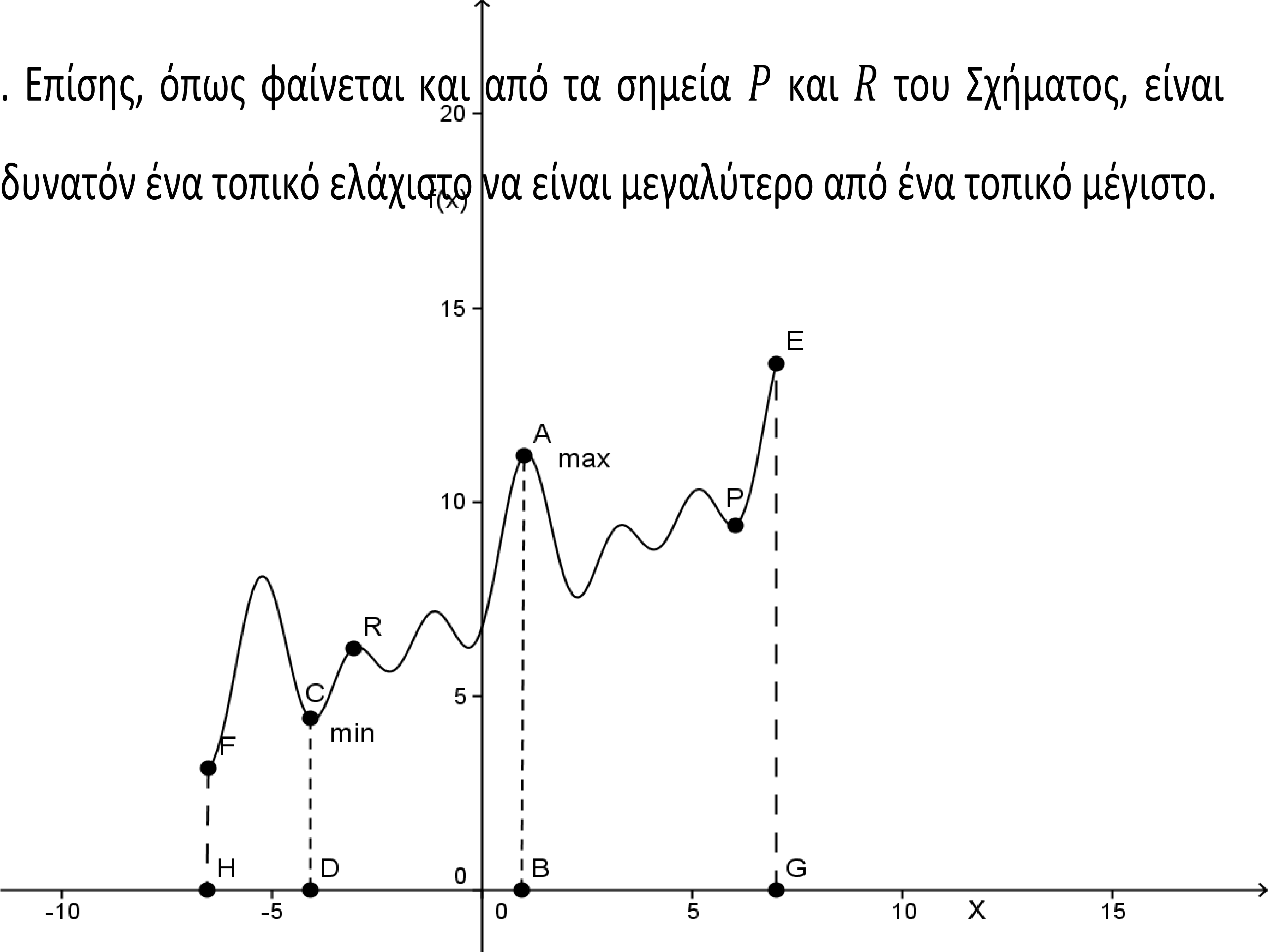
Εξ ορισμού, το μέγιστο είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα και το ελάχιστο είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα.

Υπάρχει το ενδεχόμενο μια συνάρτηση f να μην έχει ακρότατα.

το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα δεν είναι πάντοτε μέγιστο της συνάρτησης, όπως και το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα δεν είναι ελάχιστο. Για παράδειγμα, στο Σχήμα παρατηρούμε ότι το σημείο A, το οποίο είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, είναι κάτω από το σημείο E.



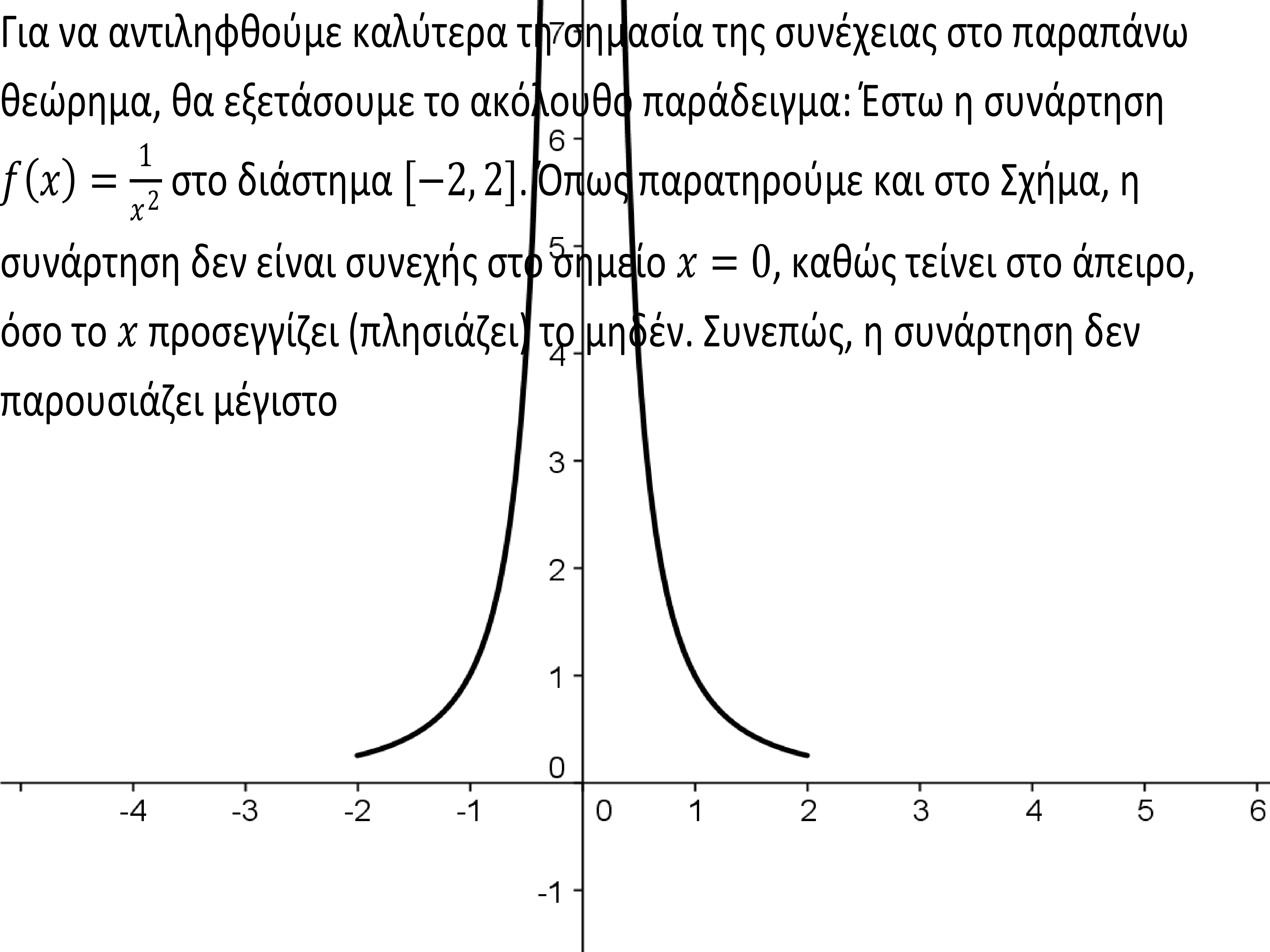
. Επίσης, όπως φαίνεται και από τα σημεία P και R του Σχήματος, είναι δυνατόν ένα τοπικό ελάχιστο να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.



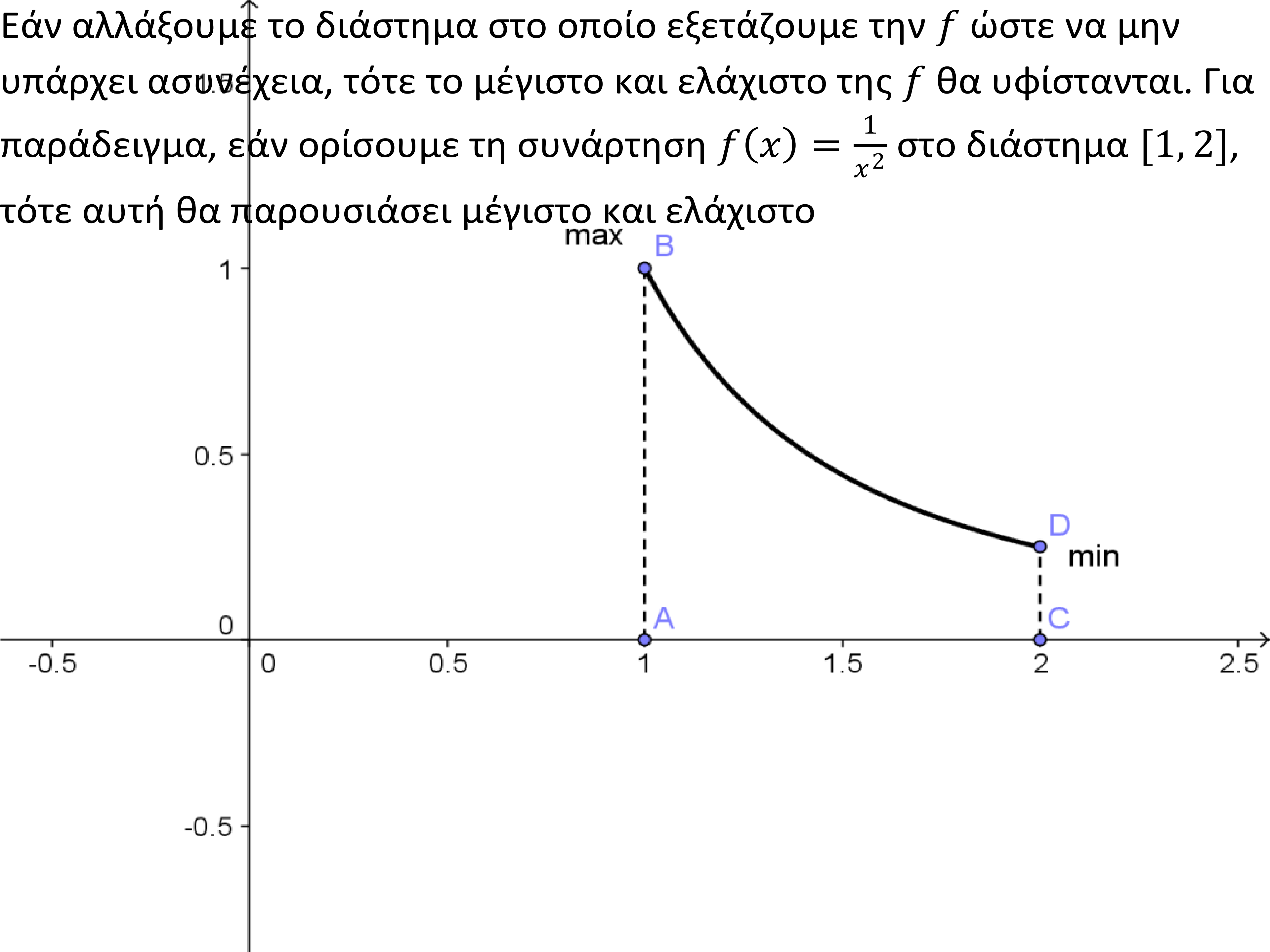
Θεώρημα των Ακραίων Τιμών: Έστω f είναι συνάρτηση συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί c και d στο εν λόγω κλειστό διαστήματος για τους οποίους

- η συνάρτηση f έχει μέγιστη τιμή στο $x = c$ (ή παρουσιάζει μέγιστο στο $c, f(c)$) και
- η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή στο $x = d$ (ή παρουσιάζει ελάχιστο στο $d, f(d)$).

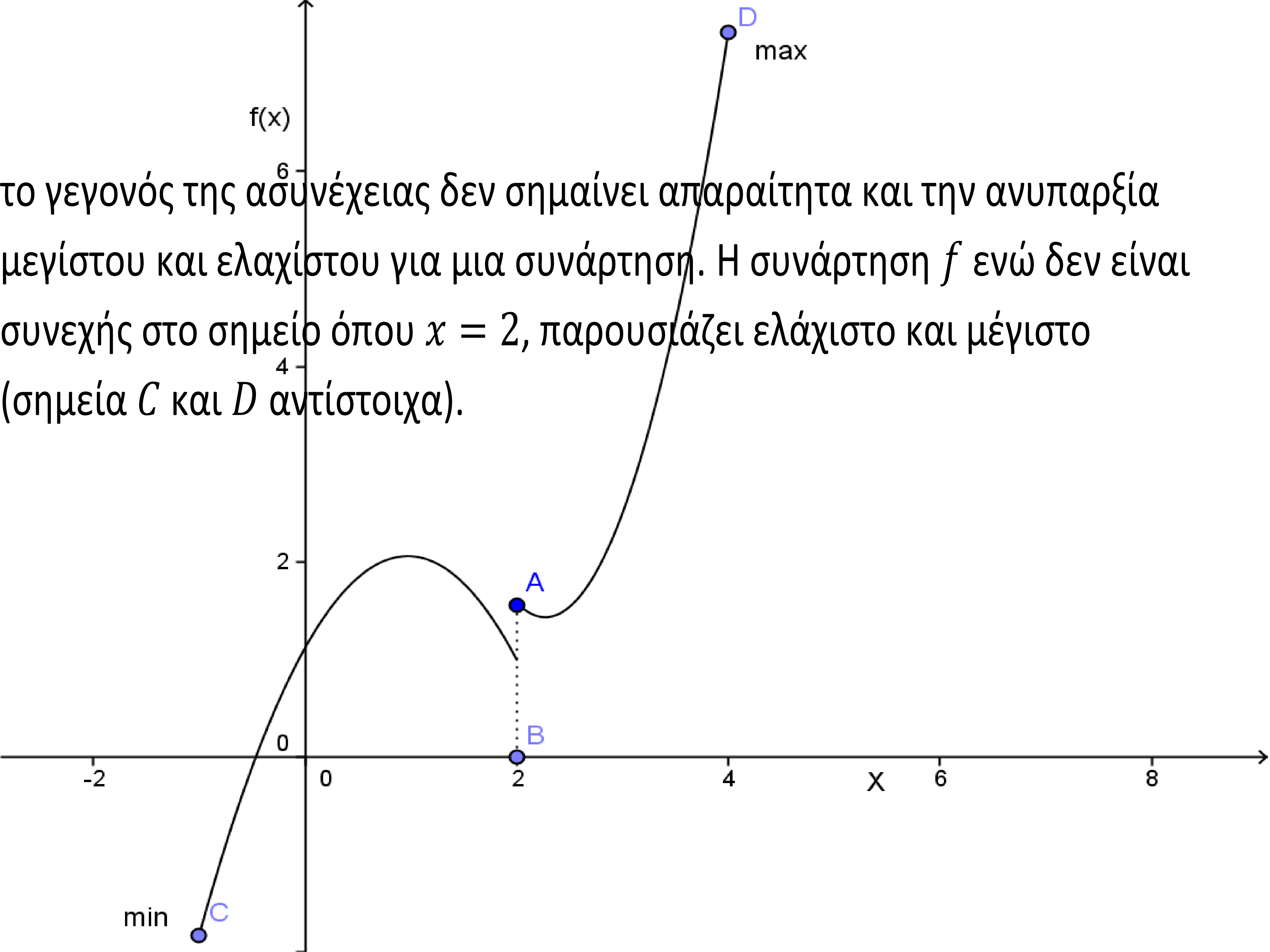
Για να αντιληφθούμε καλύτερα τη σημασία της συνέχειας στο παραπάνω θεώρημα, θα εξετάσουμε το ακόλουθο παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2}$ στο διάστημα $[-2, 2]$. Όπως παρατηρούμε και στο Σχήμα, η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο σημείο $x = 0$, καθώς τείνει στο άπειρο, όσο το x προσεγγίζει (πλησιάζει) το μηδέν. Συνεπώς, η συνάρτηση δεν παρουσιάζει μέγιστο



Εάν αλλάξουμε το διάστημα στο οποίο εξετάζουμε την f ώστε να μην υπάρχει ασυνέχεια, τότε το μέγιστο και ελάχιστο της f θα υφίστανται. Για παράδειγμα, εάν ορίσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2}$ στο διάστημα $[1, 2]$, τότε αυτή θα παρουσιάσει μέγιστο και ελάχιστο



το γεγονός της ασυνέχειας δεν σημαίνει απαραίτητα και την ανυπαρξία μεγίστου και ελαχίστου για μια συνάρτηση. Η συνάρτηση f ενώ δεν είναι συνεχής στο σημείο όπου $x = 2$, παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο (σημεία C και D αντίστοιχα).



Θεώρημα του Fermat: Εάν μια συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα σημείο $x = c$ ενός διαστήματος Δ και επιπλέον είναι παραγωγίσιμη σε αυτό (υπάρχει δηλαδή η $f^{'}(c)$), τότε η παράγωγος συνάρτηση στο σημείο αυτό μηδενίζεται, δηλαδή $f^{'}(c) = 0$. Το σημείο $x = c$ ονομάζεται στάσιμο σημείο, καθώς ο ρυθμός μεταβολής (η παράγωγος) στο εν λόγω σημείο είναι μηδέν.

Με βάση το Θεώρημα του Fermat διακρίνουμε δυο κατηγορίες σημείων με δυνατότητα τοπικού ακρότατου:

- **Εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η συνάρτηση f παραγωγίζεται και μηδενίζεται, δηλαδή $f'(x) = 0$ είναι πιθανά ακρότατα της συνάρτησης.**

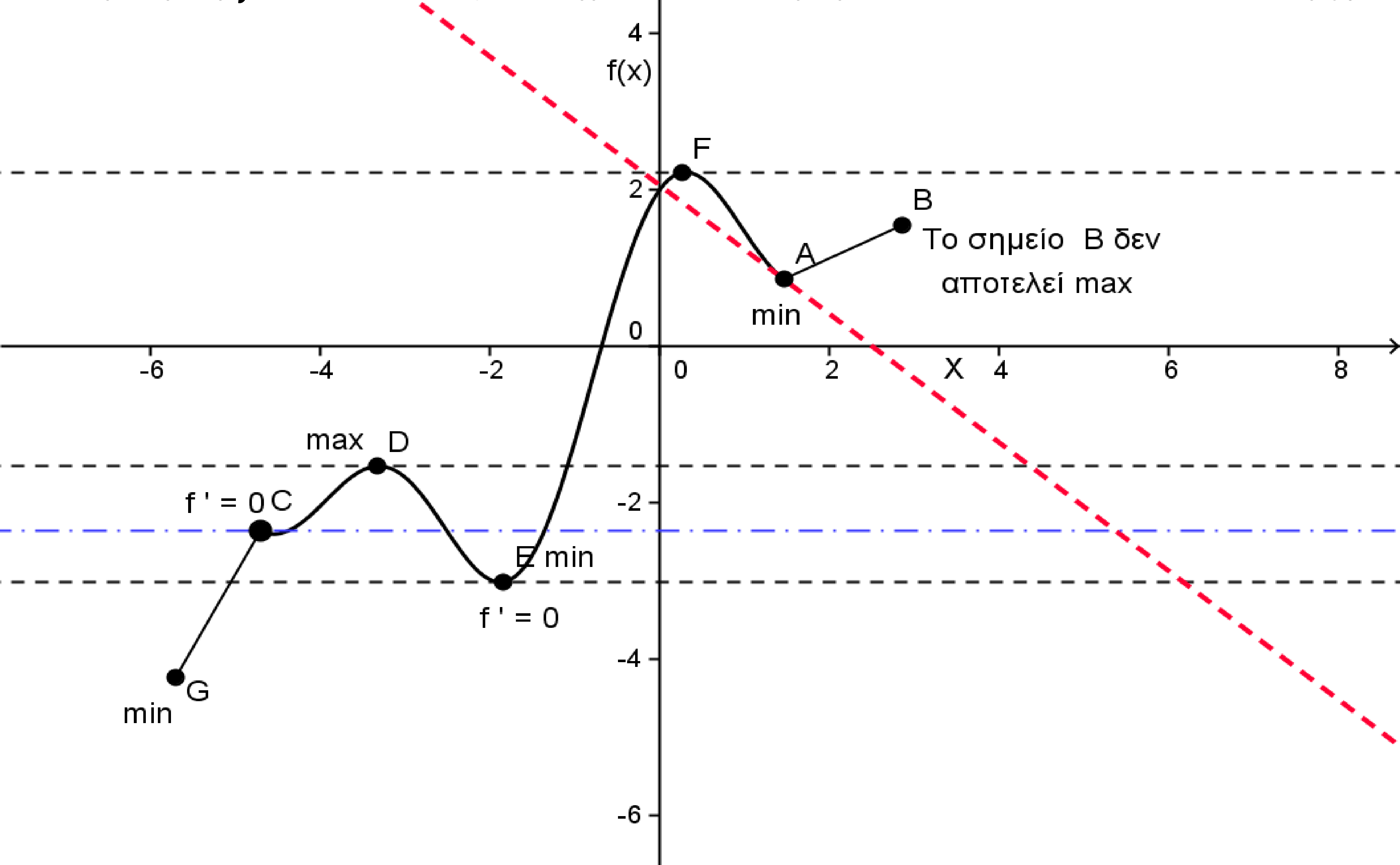
- **Εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.**

Με άλλα λόγια, το γεγονός ότι η παράγωγος μηδενίζεται σε κάποια εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος δεν σημαίνει ότι αυτά αποτελούν οπωσδήποτε τοπικά ακρότατα, αντίθετα, αν η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται σε κάποια εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος, στα οποία όμως παραγωγίζεται, τότε αυτά αποκλείεται να είναι τοπικά ακρότατα.

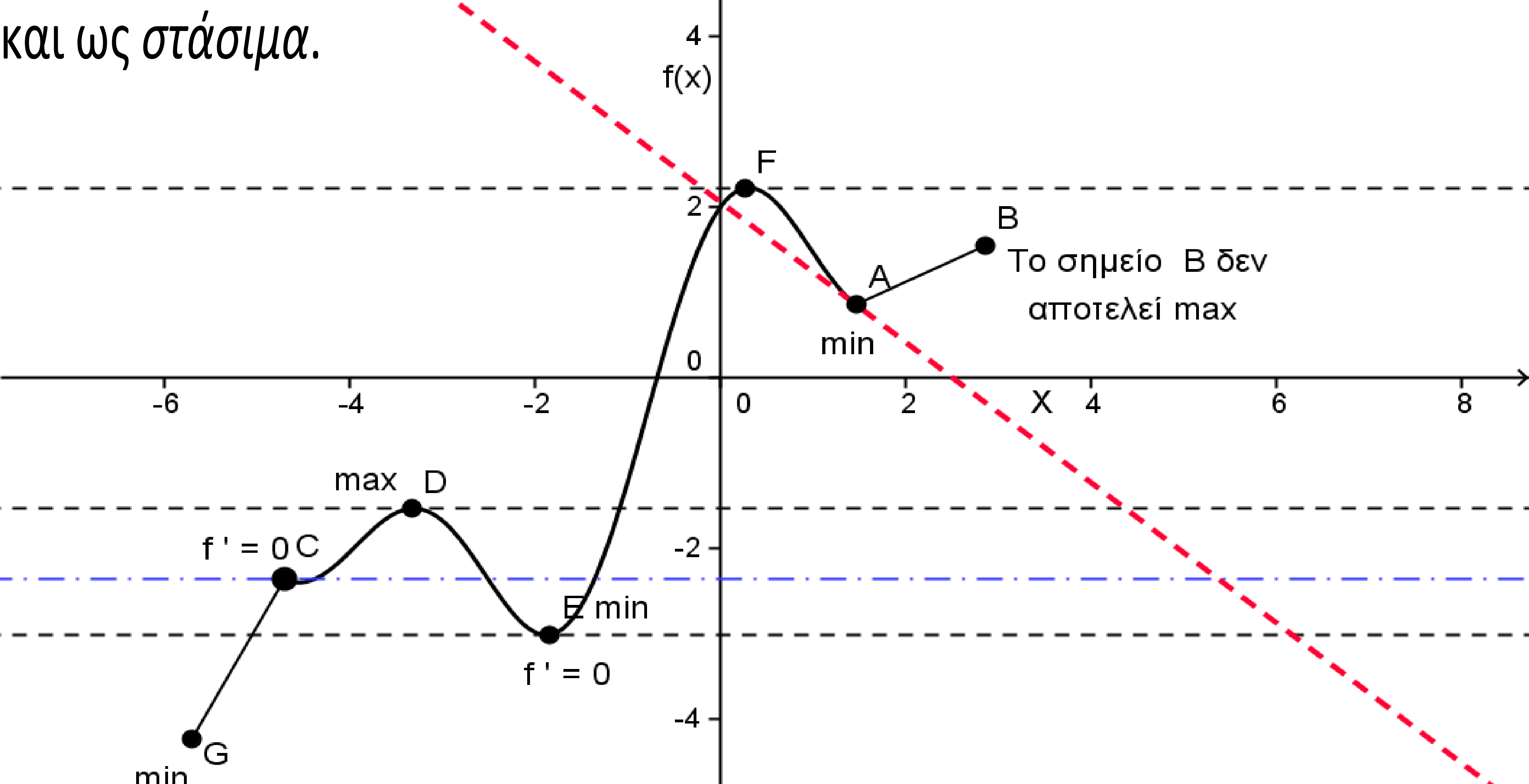
Τα παραπάνω σημεία ονομάζονται *κρίσιμα σημεία*

Στα κρίσιμα σημεία είτε η παράγωγος είναι μηδέν είτε δεν υπάρχει.

τα σημεία C, D, E, F και A, είναι κρίσιμα, διότι η παράγωγος της συνάρτηση f στα εν λόγω σημεία, είτε μηδενίζεται, είτε δεν υπάρχει.



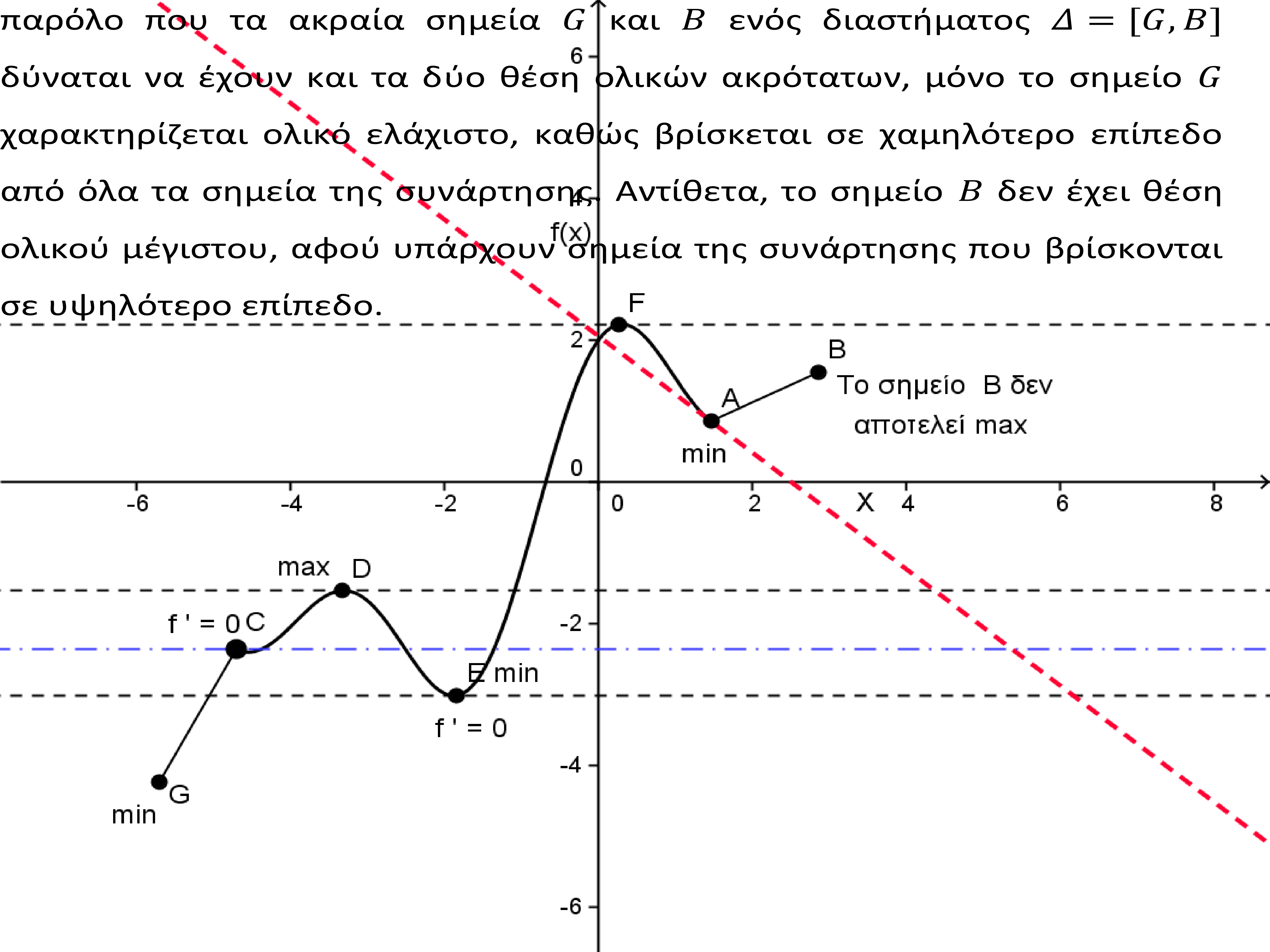
Τα σημεία στα οποία η παράγωγος μηδενίζεται, όπως είναι τα C, D, E και F, ή αλλιώς σημεία στα οποία η εφαπτομένη είναι μηδέν, χαρακτηρίζονται και ως *στάσιμα*.



Όταν η παράγωγος είναι μηδέν η εφαπτομένη είναι παράλληλη με τον άξονα x. Το σημείο A δεν περιλαμβάνεται παρόλο που παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο διότι δεν είναι παραγωγίσιμη και συνεπώς η εφαπτομένη του δεν είναι παράλληλη με τον άξονα x.

Όσον αφορά στα ακραία σημεία, αυτά δύνανται να έχουν θέση μόνο ολικού ακρότατου, εφόσον συγκριτικά με τα υπόλοιπα σημεία του υπό εξέταση διαστήματος παίρνουν είτε την υψηλότερη τιμή (*ολικό μέγιστο*), είτε τη χαμηλότερη (*ολικό ελάχιστο*). Προϋπόθεση, βέβαια, για την ύπαρξη ολικών ακρότατων στα ακραία σημεία είναι η περίληψη τους στο πεδίο ορισμού.

παρόλο που τα ακραία σημεία G και B ενός διαστήματος $\Delta = [G, B]$ δύναται να έχουν και τα δύο θέση ολικών ακρότατων, μόνο το σημείο G χαρακτηρίζεται ολικό ελάχιστο, καθώς βρίσκεται σε χαμηλότερο επίπεδο από όλα τα σημεία της συνάρτησης. Αντίθετα, το σημείο B δεν έχει θέση ολικού μέγιστου, αφού υπάρχουν σημεία της συνάρτησης που βρίσκονται σε υψηλότερο επίπεδο.



Μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα (a,b) έχει *τοπικό μέγιστο* σε ένα σημείο c του διαστήματος (a,b), αν είναι γνησίως αύξουσα ($\nearrow$) στο (a,c) και γνησίως φθίνουσα ($\searrow$) στο (c,b). Αλλιώς, τα πρόσημα της πρώτης παραγώγου εναλλάσσονται από + σε – στα αντίστοιχα διαστήματα (a,c) και (c,b). Συγκεκριμένα,

- $f^{'}(x) > 0$ στο (a,c): το πρόσημο της πρώτης παραγώγου είναι $+$.
- $f^{'}(x) < 0$ στο (c,b): το πρόσημο της πρώτης παραγώγου είναι $-$.

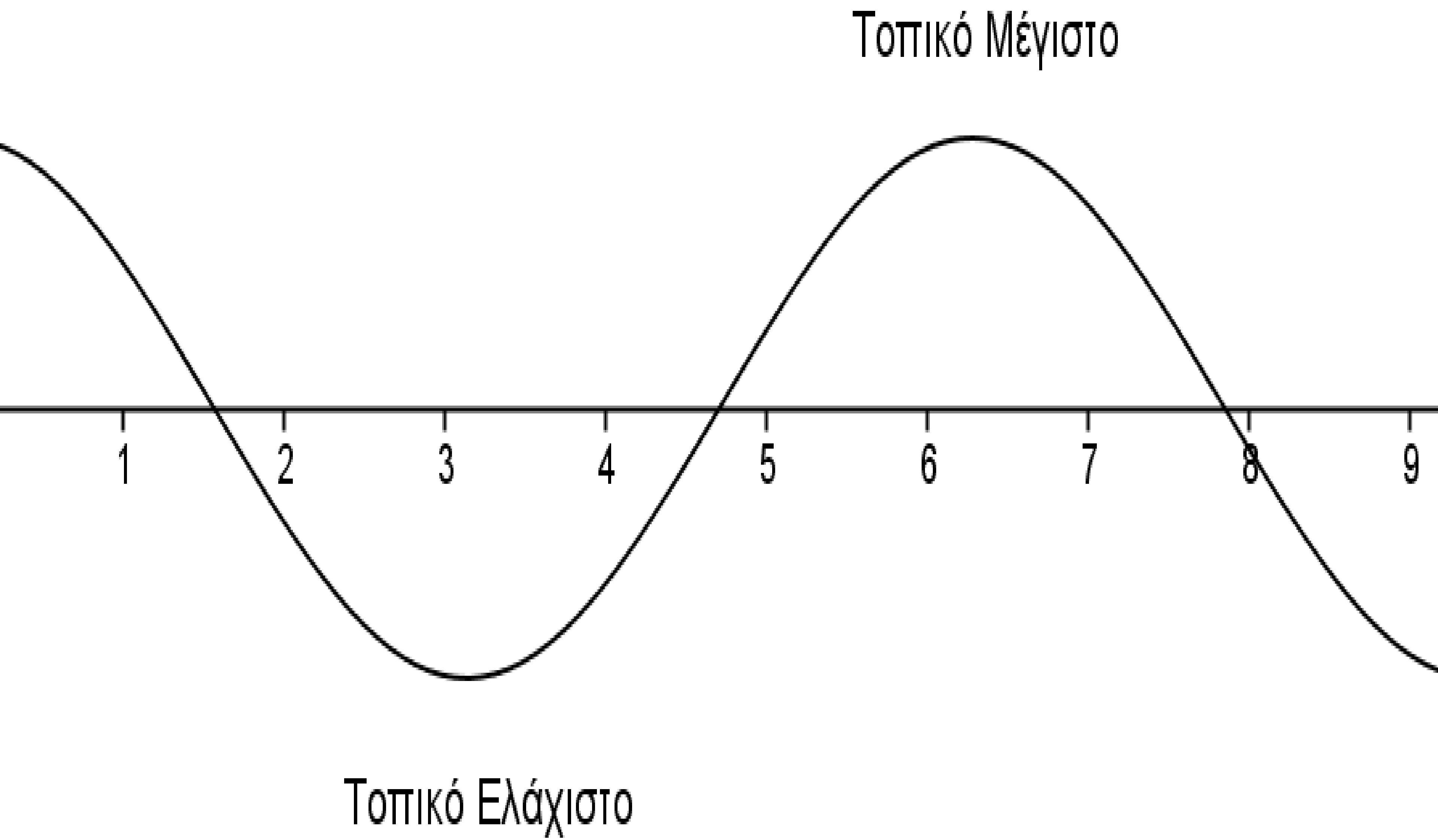
Σχηματικά η συνάρτηση f λαμβάνει τη μορφή $\cap$

Η συνέχεια είναι απαραίτητη για τα συμπεράσματα του Θεωρήματος, καθώς σε μια ασυνεχή συνάρτηση είναι δυνατό η ασυνέχεια να εναλλάσσεται γύρω από ένα σημείο, αλλά αυτό να μην αποτελεί τοπικό μέγιστο/ελάχιστο της συνάρτησης.

Μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα (a, b) έχει *τοπικό ελάχιστο* σε ένα σημείο c του διαστήματος (a, b), αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα (↘) στο (a, c) και γνησίως αύξουσα (↗) στο (c, b). Αλλιώς, τα πρόσημα της πρώτης παραγώγου εναλλάσσονται από $-$ σε $+$ στα αντίστοιχα διαστήματα (a, c) και (c, b). Συγκεκριμένα,

- $f'(x) < 0$ στο (a, c): το πρόσημο της πρώτης παραγώγου είναι $-$.
- $f'(x) > 0$ στο (c, b): το πρόσημο της πρώτης παραγώγου είναι $+$.

Σχηματικά η συνάρτηση f λαμβάνει τη μορφή ∪



Τοπικό Μέγιστο
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Τοπικό Ελάχιστο

Εάν μια συνάρτηση f διατηρεί τη μονοτονία της εκατέρωθεν ενός σημείου c, τότε είναι γνησίως μονότονη στο υπό εξέταση διάστημα (a, b) και το $f(c)$ δεν αποτελεί τοπικό ακρότατο.

Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση

$$f(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 1$$

Λύση: Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathcal{R}$. Επιπλέον, η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$ ως πολυωνυμική. Συνεπώς, εάν υπάρχουν κρίσιμα σημεία αυτά θα είναι και στάσιμα και επειδή στασιμότητα σημαίνει $f^{'}(x) = 0$, τα σημεία θα είναι οι ρίζες της πρώτης παραγώγου.

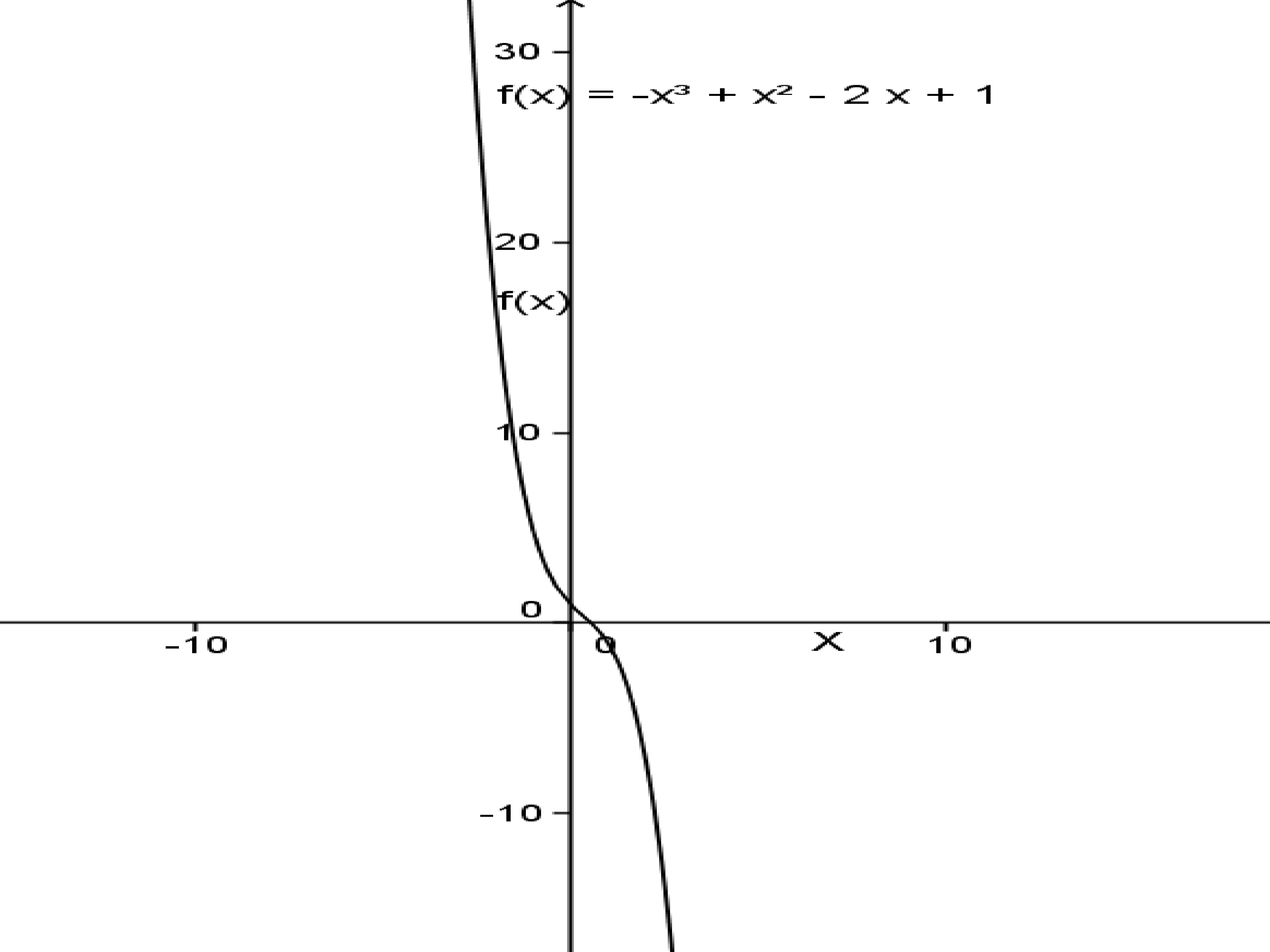
$$f^{'}(x) = (-x^3 + x^2 - 2x + 1)^{'} = -3x^2 + 2x - 2$$

$$f^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2x - 2 = 0$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης $-3x^2 + 2x - 2 = 0$ είναι:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-2) = -20 < 0$ επομένως η παράγωγος συνάρτηση f' είναι μικρότερη από το μηδέν για κάθε $x \in \mathcal{R}$, καθώς το πρόσημο του μεγιστοβάθμιου όρου είναι αρνητικό $(-3x^2)$.

Επειδή, λοιπόν, $f'(x) < 0$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathcal{R}$ και δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα, γεγονός που είναι ορατό και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης, καθώς η καμπύλη είναι κατερχόμενη από τα αριστερά προς τα δεξιά


30
f(x) = -x³ + x² - 2 x + 1
20
f(x)
10
0
-10
0
x
10
-10

Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση

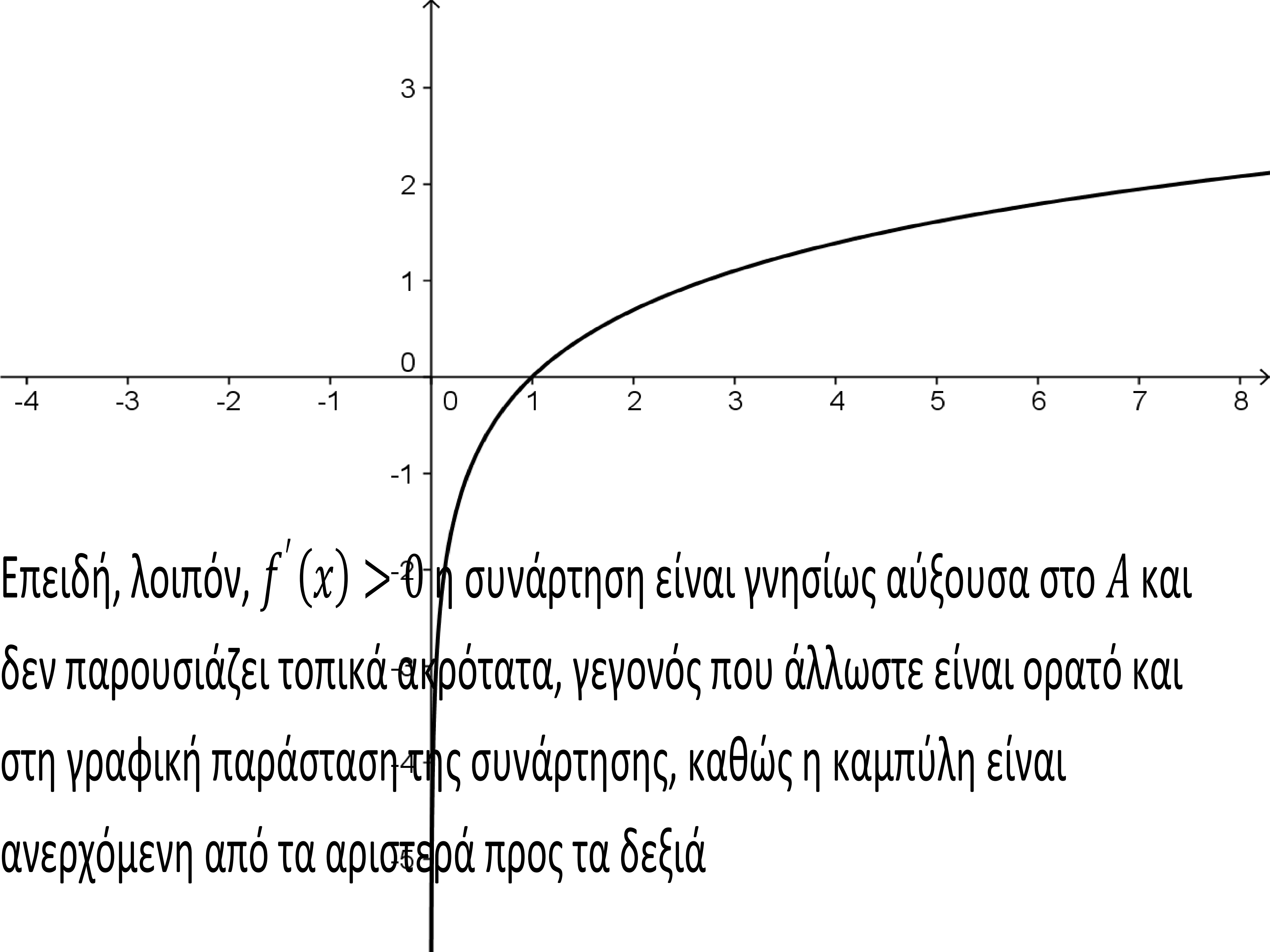
$$f(x) = lnx$$

Λύση: Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$. Επιπλέον, η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. Συγκεκριμένα,

$$f^{'}(x) = (lnx)^{'} = \frac{1}{x}$$

Η παράγωγος συνάρτηση $f^{'}(x) = \frac{1}{x}$ είναι μεγαλύτερη του μηδενός για $x \in \mathcal{R}$, καθώς το πεδίο ορισμού είναι το $A = (0, +\infty)$. Συνεπώς,

$$f^{'}(x) = \frac{1}{x} > 0$$



Επειδή, λοιπόν, $f^{'}(x) > 0$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο A και δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα, γεγονός που άλλωστε είναι ορατό και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης, καθώς η καμπύλη είναι ανερχόμενη από τα αριστερά προς τα δεξιά

Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 2x + 4$$

Λύση: Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathcal{R}$. Επιπλέον, η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$. Συγκεκριμένα,

$$f'(x) = (x^2 - 2x + 4)' = 2x - 2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Συνεπώς, το σημείο $x = 1$ χαρακτηρίζεται όχι μόνο κρίσιμο αλλά και στάσιμο καθώς η παράγωγος μηδενίζεται.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$
f	τοπικό ελάχιστο		

Στον παρακάτω πίνακα προσήμων ξεκινάμε στο διάστημα $(-\infty, 1)$ με το πρόσημο $+$ διότι το πρόσημο του x στην εξίσωση $2x - 2 = 0$ είναι θετικό και επομένως το αποτέλεσμα της $f'(x)$ για τιμές μικρότερες του 1 θα είναι αρνητικό

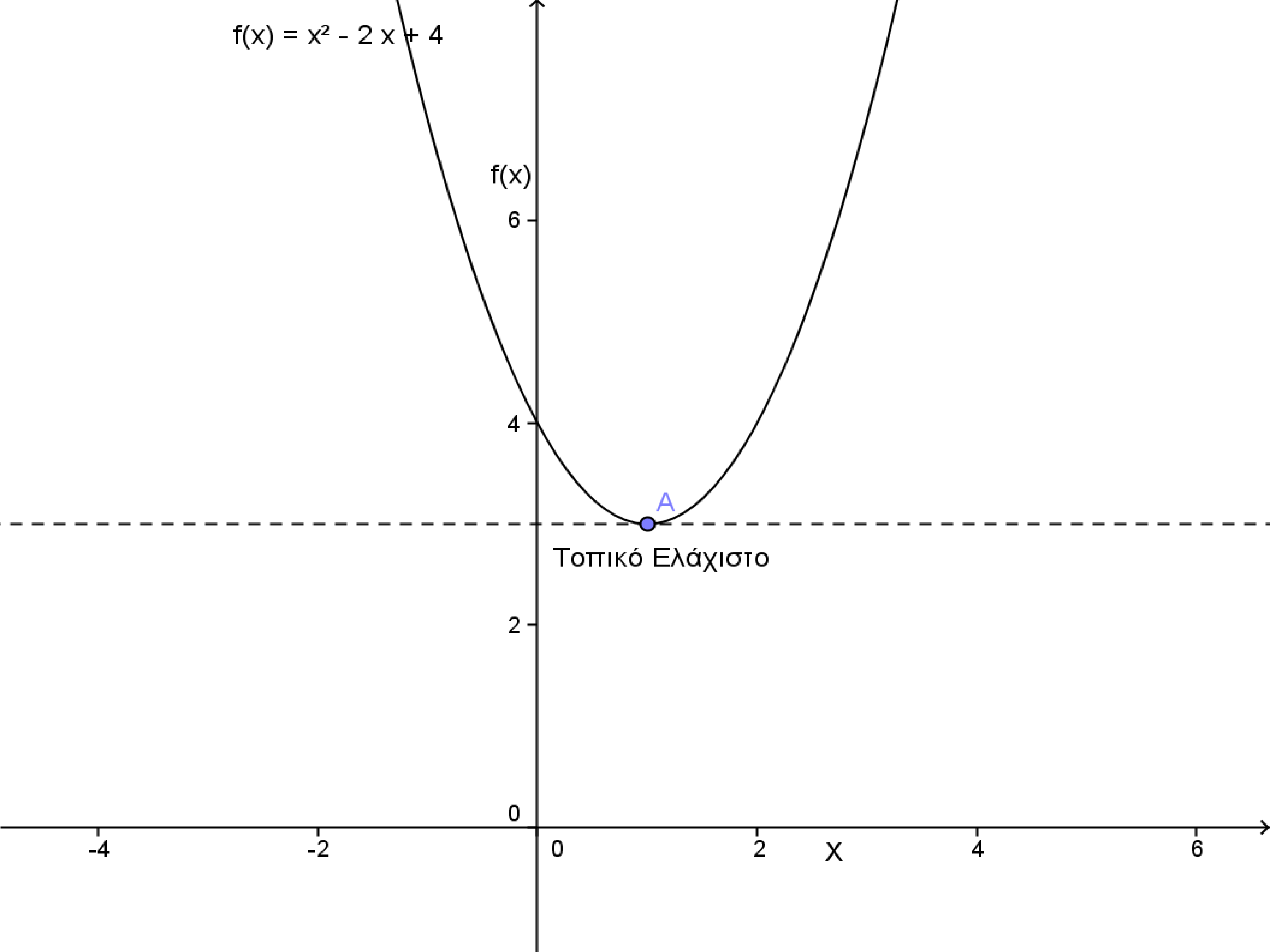
x	$-\infty$ 1 $+\infty$	
f'	$-$	$+$
f	↘	↗
f	τοπικό ελάχιστο	

η μονοτονία της συνάρτησης είναι:

- γνησίως φθίνουσα από $(-\infty, 1)$, καθώς η καμπύλη της συνάρτησης είναι κατερχόμενη από τα δεξιά προς τα αριστερά, και
- γνησίως αύξουσα από $(1, +\infty)$, καθώς η καμπύλη της συνάρτησης είναι ανερχόμενη από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Όσον αφορά στον χαρακτηρισμό του ακρότατου, η συνάρτηση f βρέθηκε να έχει ένα κρίσιμο σημείο, το οποίο παράλληλα είναι και στάσιμο. Συγκεκριμένα, το σημείο αυτό (στο $x = 1$) είναι τοπικό ελάχιστο, καθώς τα πρόσημα εναλλάσονται στα αντίστοιχα διαστήματα από $-$ σε $+$. Η συνάρτηση για $x = 1$ παίρνει την τιμή $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 4 = 3$, η οποία σημειώνεται ότι είναι και ολικό ελάχιστο.

$$f(x) = x^2 - 2x + 4$$


f(x) = x² - 2 x + 4
f(x)
6
4
2
0
A
Τοπικό Ελάχιστο
-4
-2
0
2
x
4
6

Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

Λύση: Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathcal{R}$. Επιπλέον, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$. Συγκεκριμένα,

$$f'(x) = (2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1)' = 6x^2 + \frac{2}{2}x - 2 = 6x^2 + x - 2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + x - 2 = 0$$

Η διακρίνουσα της εξίσωση $6x^2 + x - 2 = 0$ είναι:

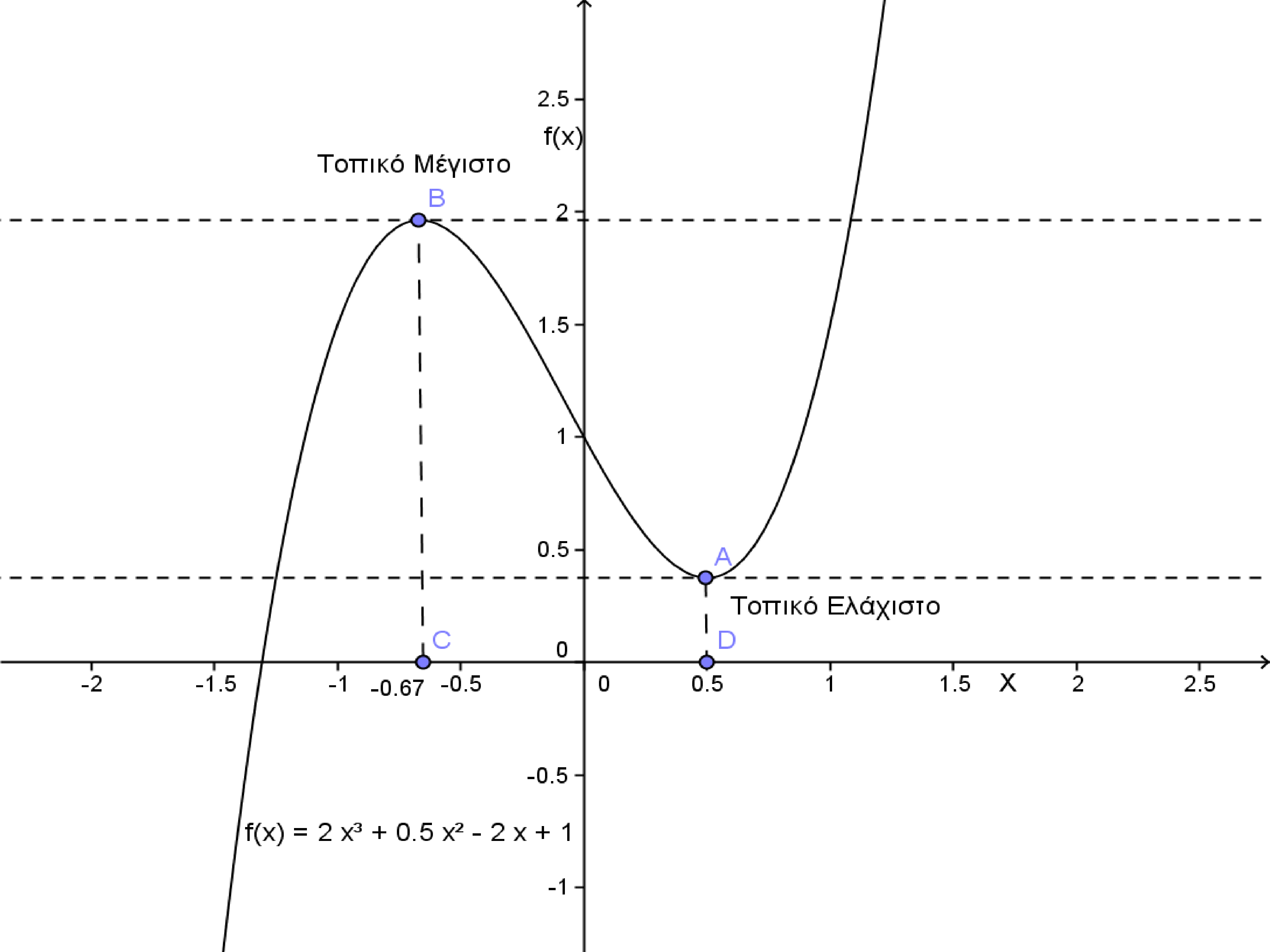
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot (6) \cdot (-2) = 49$, συνεπώς οι ρίζες της εξίσωσης

είναι

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2a} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+7}{12} \\ x_2 = \dfrac{-1-7}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0{,}5 \\ x_2 = -0{,}67 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-0{,}67$	$0{,}5$	$+\infty$
f'	$+$	$-$	$+$	
f	↗	↘	↗	
f	τ.μ. $f(-0{,}67) = 1{,}96$	τ.ε. $f(0{,}5) = 0{,}375$		


Τοπικό Μέγιστο
Τοπικό Ελάχιστο
f(x)
X
B
A
C
D
-0.67
f(x) = 2 x³ + 0.5 x² - 2 x + 1

Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$$

Λύση: Για την εύρεση του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f θα πρέπει να εξετάσουμε την ανισότητα $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$, καθώς το υπόριζο θα πρέπει να είναι θετικό. Η διακρίνουσα της εξίσωση $-x^2 - 2x + 3 = 0$ θα είναι:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (3) = 16$, συνεπώς οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2+4}{-2} \\ x_2 = \dfrac{2-4}{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

	$-\infty$	-3	1 $+\infty$
$-x^2 - 2x + 3$	$-$	$+$	$-$

Στον παρακάτω πίνακα ξεκινάμε με το πρόσημο του μεγιστοβάθμιου όρου $(-x^2)$, επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $A = [-3, 1]$.

$$f'(x) = (\sqrt{-x^2-2x+3})' = \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{-x^2-2x+3}}(-x^2-2x+3)'}^{\substack{\text{παρ άγωγος σύνθετης συν άρτησης} \\ (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' \text{ όπου } u = -x^2-2x+3}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-x^2-2x+3}} \overbrace{(-2x-2)}^{\substack{\text{κοιν ός} \\ \text{παρ άγοντας το } -2}} = -\frac{2(x+1)}{2\sqrt{-x^2-2x+3}}$$

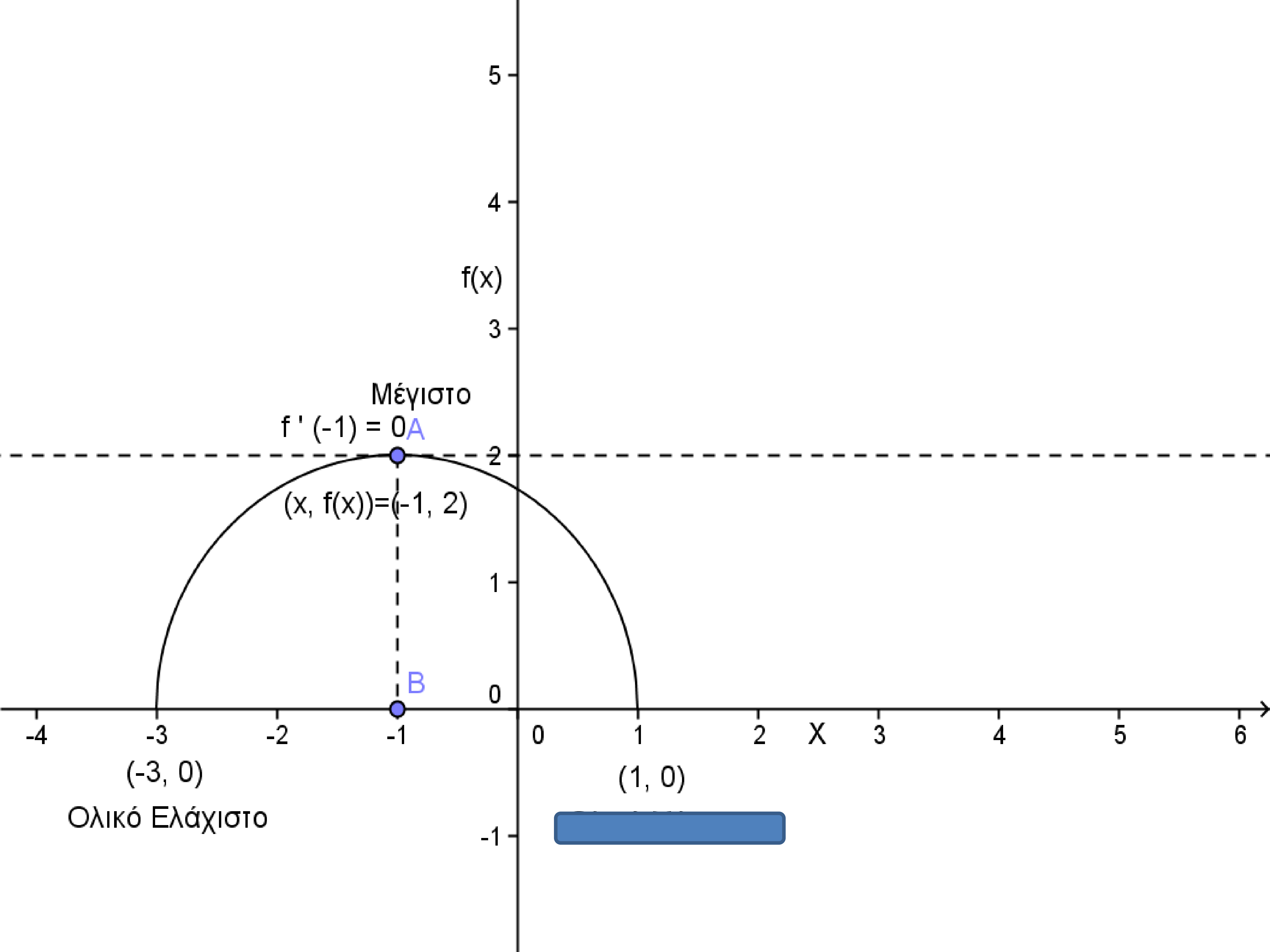
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{2(x+1)}{2\sqrt{-x^2-2x+3}} = 0}_{\substack{\text{για να μηδενιστε ί} \\ \text{η παρ άσταση θα πρ έπει} \\ \text{ο αριθμητ ής της να είναι} \\ \text{ίσος με μηδ έν, καθ ώς} \\ \text{ο παρονομαστ ής είναι} \\ \text{θετικ ός και δι άφορος του} \\ \text{μηδεν ός, δηλαδ ή} -2(x+1)=0}} \xRightarrow[x=1]{x \neq -3} x = -1$$

Όσον αφορά στα ακρότατα, η συνάρτηση f έχει ένα κρίσιμο σημείο, το οποίο είναι και στάσιμο. Συγκεκριμένα, για $x = -1$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, στο $f(-1) = 2$. Επίσης, η συνάρτηση έχει δύο ακραία σημεία, τα οποία περιλαμβάνονται στο πεδίο ορισμού και επομένως δύνανται να έχουν θέση ολικού ακρότατου.

- για $x = -3$: $f(-3) = \sqrt{-(-3)^2 - 2(-3) + 3} = 0$ και
- για $x = 1$: $f(1) = \sqrt{-(1)^2 - 2(1) + 3} = 0$

Συνεπώς, τα σημεία $(-3, f(-3))$ ή $(-3, 0)$ και $(1, f(1))$ ή $(1, 0)$ αποτελούν ολικά ελάχιστα, καθώς έχουν τη χαμηλότερη τιμή στη συνάρτηση f, γεγονώς που άλλωστε είναι ορατό και στο Σχήμα.

x	$-3 \qquad\qquad -1 \qquad\qquad 1$	
f'	$+$	$-$
f	$\nearrow$	$\searrow$
f	τοπικό μέγιστο	



f(x)
Μέγιστο
f ' (-1) = 0
A
(x, f(x))=(-1, 2)
B
X
(-3, 0)
(1, 0)
Ολικό Ελάχιστο
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το $\mathcal{R}$, καθώς ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός για κάθε $x \in \mathcal{R}$. Επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$ ως ρητή συνάρτηση. Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{\overbrace{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}^{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1(x^2+1) - x \cdot (2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

Οι ρίζες της $f'(x)$ καθορίζονται από τον αριθμητή καθώς ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός για κάθε $x \in \mathcal{R}$, δηλαδή $(x^2+1)^2 > 0$.

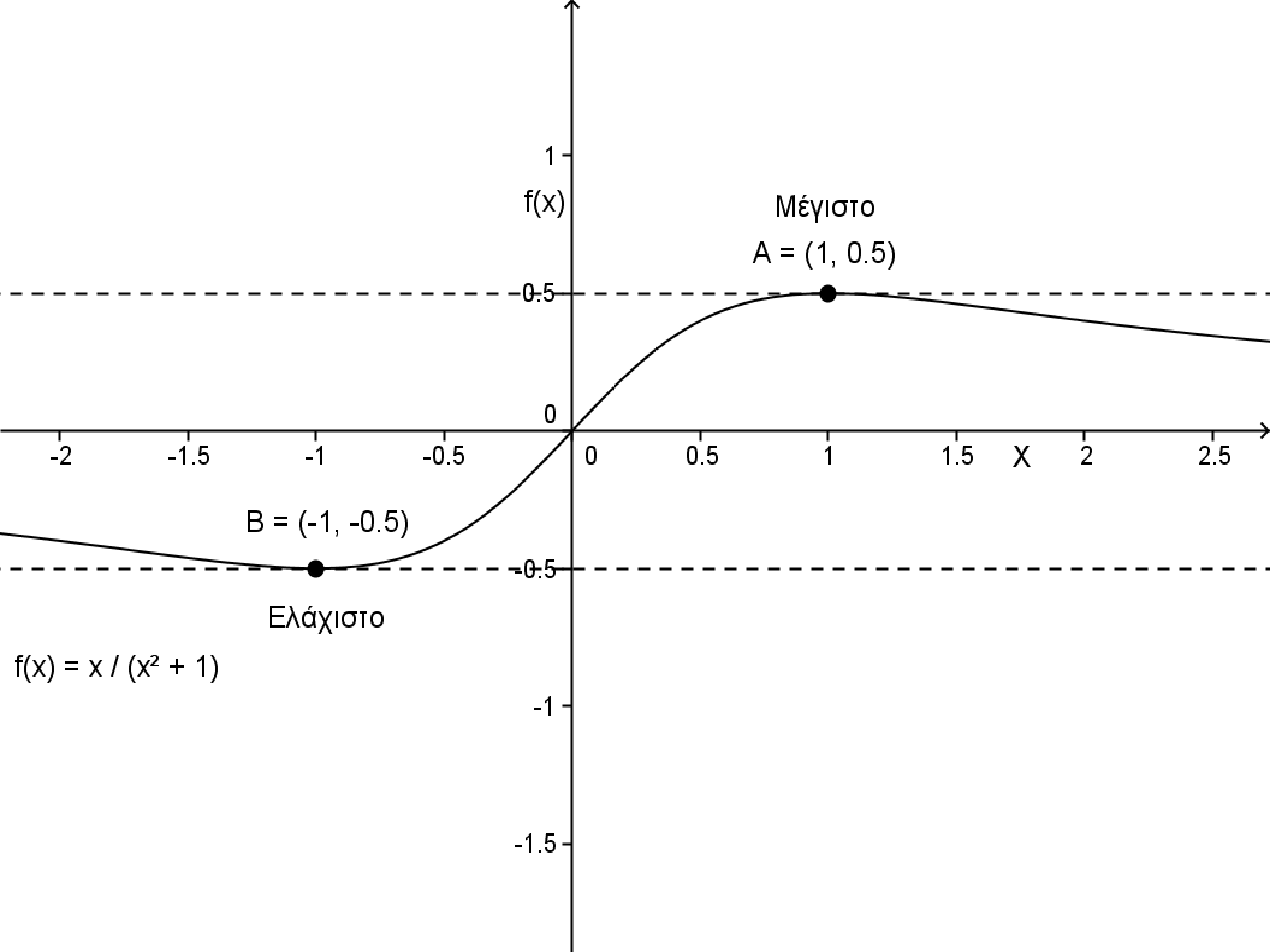
Συνεπώς,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow -(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$ $\quad$ -1	1	$+\infty$
f'	$-$	$+$	$-$
f	↘	↗	↘
f	τ.ε. $f(-1)=-0{,}5$	τ.μ. $f(1)=0{,}5$	

Στον παρακάτω πίνακα προσήμων ξεκινάμε με το πρόσημο $+$ διότι το πρόσημο του x στη δευτεροβάθμια εξίσωση $-(x^2-1)=0$ είναι αρνητικό.



f(x)
1
Μέγιστο
A = (1, 0.5)
0.5
0
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
X
2
2.5
B = (-1, -0.5)
-0.5
Ελάχιστο
f(x) = x / (x² + 1)
-1
-1.5

Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση

$$f(x) = x^6(x-2)^5$$

Το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το $\mathcal{R}$. Επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση. Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης είναι:

$$f'(x) = (x^6(x-2)^5)' = \overbrace{x^{6'}(x-2)^5 + x^6((x-2)^5)'}^{(fg)'=f'g+fg'} =$$

$$= 6x^5(x-2)^5 + x^6 \cdot \overbrace{5(x-2)^{5-1} \cdot x'}^{\substack{\text{παρ άγωγος σύνθετης} \\ \text{συν άρτησης } u^{5'}=5u^{5-1}\cdot u}} =$$

$$= 6x^5(x-2)^5 + x^6 \cdot 5(x-2)^4$$

$$= 6x^5(x-2)^5 + 5x^6(x-2)^4 = \overbrace{x^5(x-2)^4(6(x-2)+5x)}^{\text{Κοιν ός παρ άγοντας το } x^5(x-2)^4} =$$

$$= x^5(x-2)^4(6x-12+5x) = x^5(x-2)^4(11x-12)$$

Για $f^{'}(x) = 0$ έχουμε:

$$x^5(x-2)^4(11x-12) = 0$$

Στον παρακάτω πίνακα αναλύονται οι ρίζες της εξίσωσης $f^{'}(x) = 0$ ανάλογα με τα πρόσημα τους ώστε να προκύψουν τα τελικά πρόσημα της $f^{'}$ στα αντίστοιχα διαστήματα των ριζών. Συγκεκριμένα

- $x^5 = 0 \Rightarrow x = 0$ λαμβάνει το πρόσημο – αριστερά του μηδενός και το πρόσημο $+$ δεξιά του μηδενός, καθώς το x είναι υψωμένο σε περιττή δύναμη.

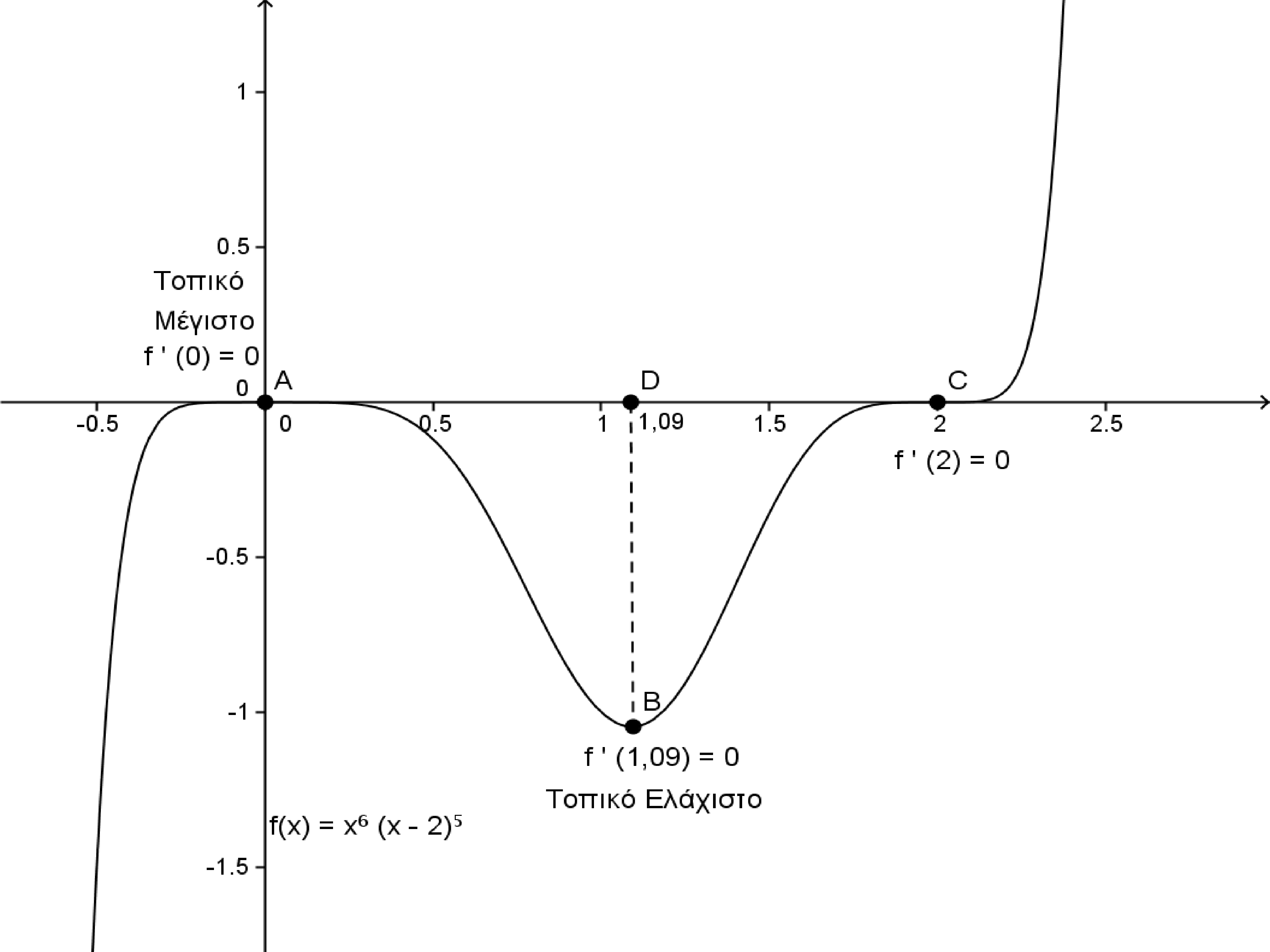
- $(x-2)^4 = 0 \Rightarrow x = 2$ λαμβάνει γενικώς το πρόσημο $+$, καθώς η παράσταση $(x-2)$ είναι υψωμένη σε άρτια δύναμη και άρα το αποτέλεσμά της θα είναι σε κάθε περίπτωση θετικό.

- $(11x-12) = 0 \Rightarrow x = \frac{12}{11} = 1{,}09$ λαμβάνει το πρόσημο – αριστερά του 1,09 και το πρόσημο $+$ δεξιά του 1,09, καθώς το πρόσημο του x είναι θετικό και συνεπώς $x - 1{,}09 > 0$ όταν το $x > 1{,}09$ και το αντίστροφο.

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $1{,}09$ $\qquad$ 2 $\qquad$ $+\infty$			
x^5	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)^4$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(11x-12)$	$-$	$-$	$+$	$+$
f'	$+$ $(- \cdot + \cdot -)$	$-$ $(+ \cdot + \cdot -)$	$+$ $(+ \cdot + \cdot +)$	$-$ $(+ \cdot + \cdot +)$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
f	τ.μ. $\qquad$ τ.ε. $f(0) = 0$ $\qquad$ $f(1{,}09) = 1{,}046$			

Όσον αφορά στα ακρότατα, η συνάρτηση f έχει τρία κρίσιμα σημεία, τα οποία είναι παράλληλα και στάσιμα. Συγκεκριμένα,

- για $x = 0$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, στο $f(0) = 0^6(0-2)^5 = 0$
- για $x = 1{,}09$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό και ολικό μέγιστο, στο $f(0) = 1{,}09^6(1{,}09-2)^5 = 1{,}046$
- για $x = 2$ η συνάρτηση δεν έχει ακρότατο. Η συνάρτηση συνεχίζει την ανοδική της πορεία, παρόλο που η πρώτης παράγωγος μηδενίζεται.



Τοπικό
Μέγιστο
f ' (0) = 0
A
D
C
B
0
1,09
f ' (2) = 0
f ' (1,09) = 0
Τοπικό Ελάχιστο
f(x) = x⁶ (x - 2)⁵
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
-1
-1.5

- Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση

$$f(x) = -\frac{1}{x^2+1}$$

1ο Βήμα : βρίσκουμε το πεδίο ορισμού

Ο παρονομαστής θα πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός και συνεπώς $x \neq 1 \Rightarrow x \neq 1\; A = \mathbb{R} - \{1\}$

2ο Βήμα: Η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη

$$f'(x) = (\frac{1}{x-1} + 1)' = ((x-1)^{-1} + x)'$$

$$= \overbrace{-1(x-1)^{-1-1}(x-1)'}^{\substack{\pi\varepsilon\varphi\tau\varepsilon\iota\ \eta\ \delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\eta\ \mu\pi\rho o\sigma\tau\alpha \\ \kappa\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\Omega\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\ (x-1)}} + 1 =$$

$$-1(x-1)^{-2} * 1 + 1 = -\frac{1}{(x-1)^2} + 1$$

- $-\frac{1}{(x-1)^2}+1=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow$

- $\frac{-1+x^2-2x+1}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

- **3ο Βήμα**: Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων
- Για την εύρεση του προσήμου πολυωνυμικής συνάρτησης εκτελούμε τα ακόλουθα:
- Τοποθετούμε τις ρίζες της παραγώγους στον άξονα (ή και σημεία στα οποία η παραγωγός δεν υπάρχει π.χ. σημεία που εξαιρούνται από το πεδίο ορισμού επειδή μηδενίζουν τον παρονομαστή μιας συνάρτησης).
- Ξεκινάμε με το πρόσημο του μεγιστοβάθμιου όρου.
- Αν υπάρχουν διπλές ρίζες το πρόσημο δεν εναλλάσσεται.

- *Επιπλέον των ριζών 0 και 2 συμπεριλαμβάνεται και το 1, καθώς στο σημείο αυτό η συνάρτηση δεν ορίζεται.*

x	-∞	0	1	2	+∞
f'	+	-	‖	-	+
f	↗	↘	‖	↘	↗

Αρχίζουμε με το πρόσημο του μεγιστοβάθμιου όρου (+) και εναλλάσσουμε τα πρόσημα.
Στην μονάδα το πρόσημο αριστερά και δεξιά δεν αλλάζει, διότι η παράγωγος έχει στον παρονομαστή τη ρίζα στο τετράγωνο $(x-1)^2$.

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = x^4 - 4x^3$$

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = x^4 - 4x^3$$

- *Το πεδίο ορισμού είναι όλο το R. Η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.*
- $f'(x) = (4x^3 - 12x^2)' = 4x^2(x-3) \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

- $f'(x) = (4x^3 - 12x^2)' = 4x^2(x-3) \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

x	-∞	0	3	+∞
$(x-3)$	-	-	+	
x^2	+	+	+	
$x^2(x-3)$	-	-	+	
f	↘	↘	↗	

Πολλαπλασιάζουμε τα πρόσημα των μονωνύμων για να εξαχθεί το πρόσημο του πολυωνύμου
Αντικαθιστούμε όπου χ=2 και βρίσκουμε το τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης

$$f(x) = x^4 - 4x^3 \Rightarrow f(3) = 3^4 - 4 * 3^3 = -27$$

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 e^x$$

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 e^x$$

$$f'(x) = (x^2 e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x = xe^x(2 + x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

x	**-∞**	**-2**	**0** **+∞**
$(2 + x)$	-	+	+
x	-	-	+
$x^2(x - 3)$	+	-	+
f	↗	↘	↗

Πολλαπλασιάζουμε τα πρόσημα των μονωνύμων για να εξαχθεί το πρόσημο του πολυωνύμου

Αντικαθιστούμε όπου χ=-2 και x=0 για να βρούμε το μέγιστο και το τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης