



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων & Συστημάτων



Τεχνική Μηχανική

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μέρος Β-Αντοχή Υλικών

Λυγισμός

Άνθιμος Σ. ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΔΗΣ

Δρ. Πολιτικός Μηχανικός, Eurlng

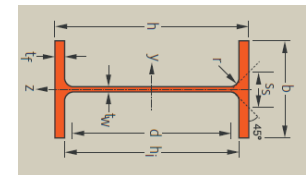
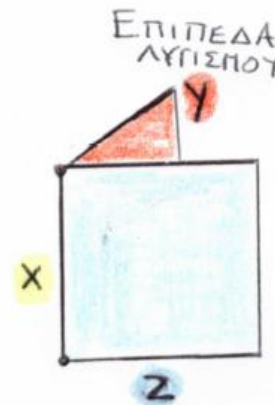
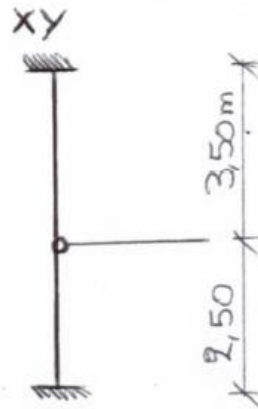
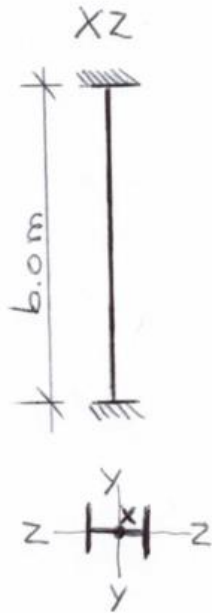
Άσκηση 1

Για το παρακάτω σχήμα, και λαμβάνοντας υπόψη τις σχετικές συνθήκες στήριξης, θεωρώντας ότι το υποστύλωμα είναι κατασκευασμένο από μεταλλική πρότυπη διατομή IPE 270 [τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά παρέχονται από πίνακες κατασκευαστών πρότυπων μεταλλικών διατομών], [μέτρο ελαστικότητας $E = 210 \text{ GPa}$]:

Ζητούνται:

(α) Να βρεθούν τα μήκη λυγισμού στα επίπεδα xz και xy.

(β) Να βρεθούν οι γεωμετρικές λυγηρότητες στα επίπεδα xz και xy.



G	I_y	W_{ely}	W_{ply}	i_y	A_{vz}	I_z	W_{elz}	W_{plz}	i_z	S_s	I_t	I_w
kg/m	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm	cm ²	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm	cm	cm ⁴	cm ⁶
												x10 ³

IPE O 360	66,0	19040	1046	1186	15,0	40,20	1251	145,4	226,9	3,8	5,9	55,74	380,2
IPE 360	57,1	16260	903,6	1019	14,9	35,13	1043	122,7	191,0	3,7	5,4	37,44	313,5
IPE A 360	50,2	14510	811,8	906,7	15,0	29,76	944,2	111,0	171,8	3,8	5,0	27,36	281,9
IPE AA 360	47,0	13670	767,5	853,5	15,1	27,43	894,8	105,2	162,4	3,8	4,8	23,37	266,3

IPE O 330	57,0	13910	832,9	942,7	13,8	34,88	960,3	118,5	184,9	3,6	5,6	42,20	245,6
IPE 330	49,1	11760	713,1	804,3	13,7	45,9	788,1	98,51	153,6	3,5	5,1	28,06	199,0
IPE A 330	43,0	10230	625,7	701,9	13,6	26,98	685,1	85,64	133,2	3,5	4,7	19,63	171,5

IPE O 300	49,3	9994	657,5	743,8	12,6	29,04	745,7	98,12	152,5	3,4	5,0	30,97	157,6
IPE 300	42,2	8356	557,0	628,3	12,4	25,68	603,7	80,50	125,2	3,3	4,6	19,91	125,9
IPE A 300	36,5	7173	483,0	541,7	12,4	22,24	518,9	69,19	107,3	3,3	4,2	13,34	107,1

IPE O 270	42,3	6947	507,0	574,6	11,3	25,22	513,4	75,51	117,7	3,0	4,9	24,98	87,64
IPE 270	36,1	5789	428,8	483,9	11,2	22,13	419,8	62,20	96,95	3,0	4,4	15,90	70,57
IPE A 270	30,7	4917	368,3	412,4	11,2	18,74	357,9	53,03	82,34	3,0	4,0	10,41	59,50

<https://sections.arcelormittal.com/>

(α) Να βρεθούν τα μήκη λυγισμού στα επίπεδα xz και xy.

Αρχικά συλλέγουμε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διατομής IPE 270

Εμβαδόν: 45,90 cm²

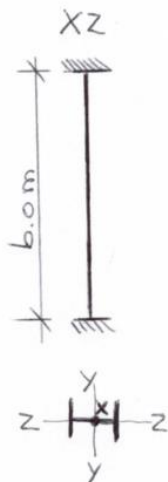
Ροπή αδράνεια y-y: 5789 cm⁴

Ροπή αδράνεια z-z: 419.80 cm⁴

Ακτίνα αδράνειας y-y: 11.20 cm

Ακτίνα αδράνειας z-z: 3.00 cm

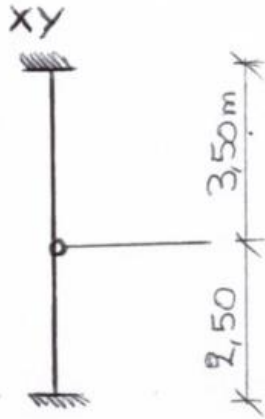
(i) Επίπεδο λυγισμού xz



$$L_b(xz) = 0.65 * 6.0 = 3.90 \text{ m}$$

Buckled shape of column shown by dashed line						
Theoretical K value	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0
Recommended design value K	0.65	0.80	1.2	1.0	2.10	2.0

(ii) Επίπεδο λυγισμού xy



Buckled shape of column shown by dashed line						
Theoretical K value	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0
Recommended design value K	0.65	0.80	1.2	1.0	2.10	2.0

$$L_b(xy) = 1.0 * 3.50 = 3.50 \text{ m}$$

$$L_b(xy) = 1.0 * 2.50 = 2.50 \text{ m}$$

Επιλέγεται το δυσμενέστερο $L_b(xy) = 3.50 \text{ m}$

(β) Να βρεθούν οι γεωμετρικές λυγηρότητες στα επίπεδα xz και xy.

Σχέση λυγηρότητας: $\lambda = L_b / i$

(i) Επίπεδο λυγισμού xz

$$\lambda_{xz} = L_{b(xz)} / i_y = 390 / 11.2 = 34.82$$

(ii) Επίπεδο λυγισμού xy

$$\lambda_{xy} = L_{b(xy)} / i_y = 350 / 3.0 = 116.66$$

Η μεγαλύτερη λυγηρότητα βρίσκεται στο επίπεδο λυγισμού xy, δηλαδή στον ασθενή άξονα του υποστυλώματος [z-z]. Αυτό συμβαίνει διότι ενώ το μήκος λυγισμού είναι μικρότερο, σε αυτό τον άξονα, ωστόσο η ακτίνα αδράνειας είναι κατά πολύ μικρότερη από αυτή του ισχυρού άξονα. Συνεπώς, η μεγαλύτερη τάση για λυγισμό του υποστυλώματος είναι προς το επίπεδο xy.

Άσκηση 2

Για το υποστύλωμα της άσκησης 1, θεωρώντας την ίδια γεωμετρία και τις ίδιες συνθήκες στηρίξεις:

Ζητείται:

(α) Να βρεθεί το κρίσιμο φορτίο κατά Euler.

(i) Επίπεδο λυγισμού xz

$$P_{cr(xz)} = (3,14)^2 * 21000 * 5789 / 390^2 = 7880.48 \text{ KN.}$$

(ii) Επίπεδο λυγισμού xy

$$P_{cr(xy)} = (3,14)^2 * 21000 * 419,80 / 350^2 = 709,55 \text{ KN.}$$

Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι 709,55 KN.

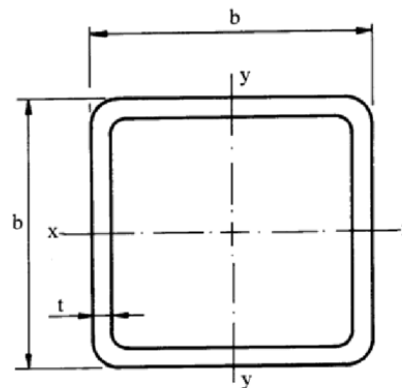
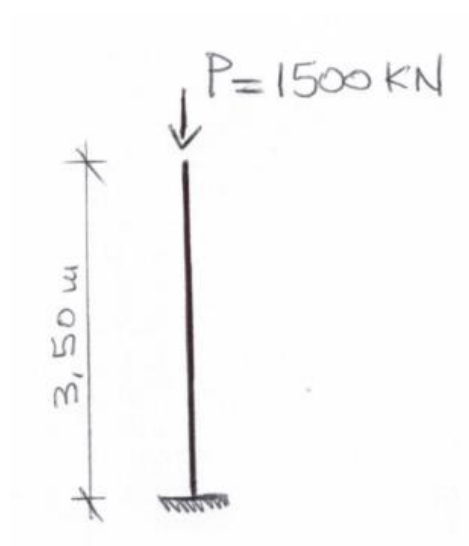
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{(K L_u)^2}$$

Άσκηση 3

Υποστύλωμα με στατικό σύστημα προβόλου κατασκευάζεται από μεταλλική σωληνωτή διατομή. Στο υποστύλωμα ασκείται αξονικό φορτίο 1500 kN:

Ζητείται:

(α) Να βρεθεί η διατομή έτσι ώστε να μπορεί να φέρει το αξονικό φορτίο χωρίς αυτό να υποστεί λυγισμό.



Μέτρο ελαστικότητας χάλυβα: $E = 210 \text{ GPa}$

Εφόσον το στατικό σύστημα είναι πρόβολος ο συντελεστής $K = 2.0$

Μήκος λυγισμού $2 \times 3,50 = 6,0\text{m}$

Λαμβάνετε υπόψη ο θεωρητικός συντελεστής

Η διατομή είναι τετράγωνη, δηλ. τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της είναι όμοια και για τους δύο άξονες, συνεπώς ο λυγισμός είναι όμοιος και για τα δύο επίπεδα.

Buckled shape of column shown by dashed line						
Theoretical K value	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0
Recommended design value K	0.65	0.80	1.2	1.0	2.10	2.0

$$P_{cr} = P = \frac{\pi^2 EI}{(L_b)^2} \Rightarrow I_{nec} = \frac{P(L_b)^2}{\pi^2 E} = \frac{1500(2 \times 350)^2}{(3,14)^2 \cdot 21.000} = 3549,83 \text{ cm}^4$$

$$I_{nec} = 3549.83 \text{ cm}^4 < I_{app}$$

Από τους παρακάτω πίνακες προκύπτει ότι η διατομή του υποστυλώματος που εκπληρώνει την παραπάνω συνθήκη πρέπει να είναι τουλάχιστον: SHS 180*180*12.5 [$I_{app} = 3790 \text{ cm}^4$]

Section designation		Dimensions and properties					
		Mass per metre	Area of section	Ratio for local buckling	Second moment of area	Radius of gyration	Elastic modulus
Size	Thickness						
$D \times D$	t						
mm	mm	kg/m	cm^2	$d/t^{(1)}$	I	r	Z
					cm^4	cm	cm^3
160 x 160	5.0	24.1	30.7	29.0	1220	6.31	153
	5.6 #	26.9	34.2	25.6	1350	6.29	169
	6.3	30.1	38.3	22.4	1500	6.26	187
	7.1 #	33.7	42.9	19.5	1660	6.22	207
	8.0	37.6	48.0	17.0	1830	6.18	229
	8.8 #	41.1	52.4	15.2	1980	6.14	247
	10.0	46.3	58.9	13.0	2190	6.09	273
	11.0 #	50.4	64.3	11.5	2350	6.05	294
	12.5	56.6	72.1	9.80	2580	5.98	322
	14.2 #	63.3	80.7	8.27	2810	5.90	351
	16.0	70.2	89.4	7.00	3030	5.82	379
180 x 180	6.3	34.0	43.3	25.6	2170	7.07	241
	7.1 #	38.1	48.6	22.4	2400	7.04	267
	8.0	42.7	54.4	19.5	2660	7.00	296
	8.8 #	46.7	59.4	17.5	2880	6.96	320
	10.0	52.5	66.9	15.0	3190	6.91	355
	11.0 #	57.4	73.1	13.4	3440	6.86	382
	12.5	64.4	82.1	11.4	3790	6.80	421
	14.2 #	72.2	92.0	9.68	4150	6.72	462
	16.0	80.2	102	8.25	4500	6.64	500

<https://www.tatasteelbluebook.com/en-gb/building-codes/bs-5950/structural-hollow-sections/celsius/shs/section-properties-dimensions-properties/>

Σημείωμα Αναφοράς σε έργα Τρίτων

Βιβλιογραφία

1. Beer F., Johnston E.R., Mazurek D.: Τεχνική Μηχανική-Στατική. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 11^η 2019, [κωδ. Εύδοξος 59421317].
2. Gere J., Goodno B.: Αντοχή Υλικών. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 9^η 2021, [κωδ. Εύδοξος 86055253].
3. Nash W.: Στατική και Μηχανική των Υλικών. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 1^η 2002, [κωδ. Εύδοξος 18549012].
4. Π.Α. Βουθούνης: Τεχνική Μηχανική. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 10^η 2019, [ISBN 978-618-83280-4-4].
5. F.P. Beer, E.R. Johnston Jr., J.T. Wolf, D.F. Mazuerk: Μηχανική των Υλικών. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 2012-2019. [ISBN: 978-960-418-381-4]. Ελληνική μετάφραση.
6. Π.Α. Βουθούνης: Στατική-Μηχανική του απαραμόρφωτου στερεού. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 6^η 2017, [ISBN 978-618-83280-1-3].
7. Π.Α. Βουθούνης: Αντοχή των Υλικών-Μηχανική του παραμορφώσιμου στερεού. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 4^η 2019, [ISBN 978-618-83280-3-7].
8. Μ. Ματσιοκούδη-Ηλιοπούλου: Τεχνική Μηχανική: Αρχές Στατικής και Εισαγωγή στην Θεωρία των Παραμορφώσιμων Σωμάτων. Εκδόσεις Ζυγός. Έκδοση 1991/2016. [ISBN13: 97896080652533], [κωδ. Εύδοξος 1753].
9. Γ. Γκρός. Μηχανική. Τόμος Α. Ευγενίδιο Ίδρυμα, 1976.

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

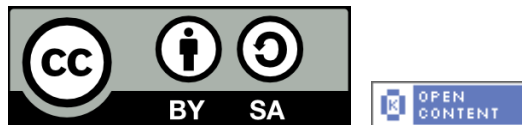
Άνθιμος Σ. Αναστασιάδης. «Τεχνική Μηχανική: Στατική και Αντοχή Υλικών». Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας. Πολυτεχνική Σχολή. Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων & Συστημάτων. Έκδοση 5^η , Κοζάνη, 2025.

Διαθέσιμο από την διαδικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.uowm.gr/courses/MRE250/>

Σημείωμα αδειοδότησης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [<https://creativecommons.org/>] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να περιλαμβάνει τα παρακάτω:

- ❖ Σημείωμα Αναφοράς
- ❖ Σημείωμα Αδειοδότησης
- ❖ Δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ❖ Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει), μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Λυγισμός

