



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων & Συστημάτων



Τεχνική Μηχανική

Μέρος Β - Αντοχή Υλικών

Λυγισμός

Άνθιμος Σ. ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΔΗΣ
Δρ. Πολιτικός Μηχανικός, Eurlng

1. Πρόβλημα λυγισμού

Η αλλαγή στην γεωμετρία ενός μηχανικού συστήματος, [δομικού στοιχείου ή ενός φορέα], που υπόκειται σε θλίψη έχει ως αποτέλεσμα την αδυναμία να φέρει φορτία, χάνει την φέρουσα ικανότητα, και οδηγείται σε μια ασταθή κατάσταση [instability]. Το μηχανικό σύστημα υφίσταται λυγισμό [buckling], που οδηγεί σε κατάρρευση.

Κατά τον λυγισμό το μηχανικό σύστημα εκτρέπεται από την ευθύγραμμη θέση ισορροπίας αποκτά μια νέα ισορροπία με καμπύλο άξονα, όπου όταν το κρίσιμο φορτίο, που μπορεί να φέρει το σύστημα, ξεπεραστεί, τότε αυτό καταρρέει.



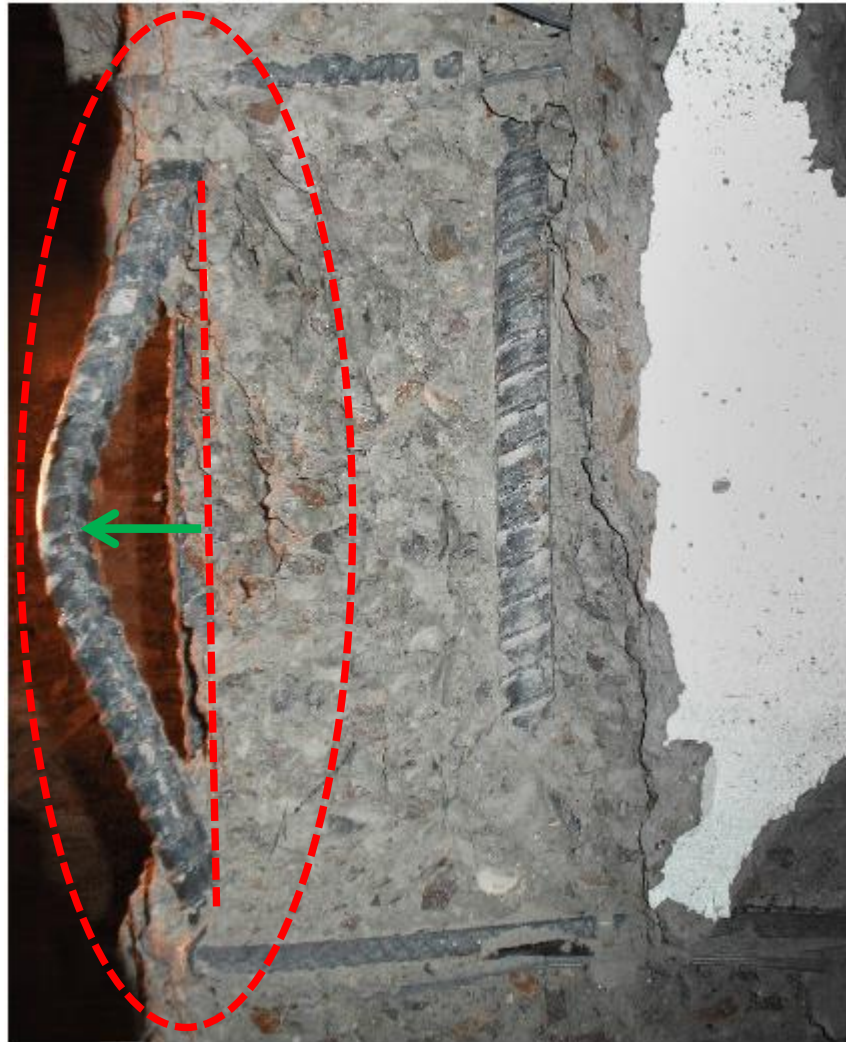
<https://fse1.engr.utexas.edu/research/spotlight/293-time-dependent-buckling>



[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)CF.1943-5509.0000302](https://doi.org/10.1061/(ASCE)CF.1943-5509.0000302)



<https://public.nrao.edu/gallery/the-collapsed-300foot-telescope/>



Analytical Evaluation of FRP Wrapping Effectiveness in Restraining Reinforcement Bar Buckling

Journal of Structural Engineering - July 2014

DOI: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000985



Ο λυγισμός δεν είναι καταπόνηση αλλά μορφή αστοχίας. Διαφέρει από την θλίψη και την κάμψη διότι:

- Στον λυγισμό το δομικό στοιχείο κάμπτεται ενώ στην θλίψη υφίσταται βράχυνση.
- Στον λυγισμό το δομικό στοιχείο κάμπτεται από δυνάμεις που ενεργούν παράλληλα στον άξονα του, ενώ στην κάμψη οι δυνάμεις ενεργούν κάθετα στον άξονα.
- Ο λυγισμός αναπτύσσεται μετά από μια συγκεκριμένη τιμή δύναμης [κρίσιμο φορτίο] που προκαλεί την αστάθεια στο σύστημα.

Ο λυγισμός εξαρτάται άμεσα από την θλίψη, δηλ χωρίς θλιπτικό φορτίο δεν μπορεί να εμφανιστεί λυγισμός.

Η θλίψη δεν εξαρτάται άμεσα από τον λυγισμό, δηλ. ένα στοιχείο υπό θλίψη μπορεί να μην υφίσταται λυγισμό, [τα γεωμετρικά, μηχανικά και κατασκευαστικά χαρακτηριστικά εξασφαλίζουν την ευστάθεια του στοιχείου, όποτε το στοιχείο θλίβεται μόνο και δεν λυγίζει].

Το μηχανικό σύστημα μπορεί να διαθέτει την απαραίτητη αντοχή για να φέρει το θλιπτικό φορτίο, ωστόσο κατά την φάση φόρτισης ξαφνικά αυτό χάνει την ευστάθεια του, ενώ υπό διαφορετικές συνθήκες το στοιχείο θα εξασφάλιζε το όριο αντοχής και παραμόρφωσης έναντι θλίψης.

Οι **παράγοντες** που προκαλούν τον λυγισμό μπορεί να είναι:

- **Ελλειμματικός σχεδιασμός.** [ακατάλληλη επιλογή γεωμετρικών και μηχανικών χαρακτηριστικών, π.χ. αναλογικά μεγάλο μήκος ως προς την επιφάνεια της διατομής, χαμηλό μέτρο ελαστικότητας υλικού, ακατάλληλη επιλογή μηχανικού συστήματος, κ.α.].
- **Ατέλειες σε επίπεδο υλικού και γεωμετρίας.**
- **Κατασκευαστικές ατέλειες.**
- **Εγκάρσιες μετακινήσεις από σεισμικά φορτία ή φορτία λειτουργίας μηχανών.**

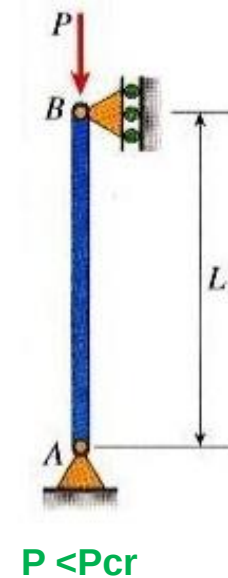
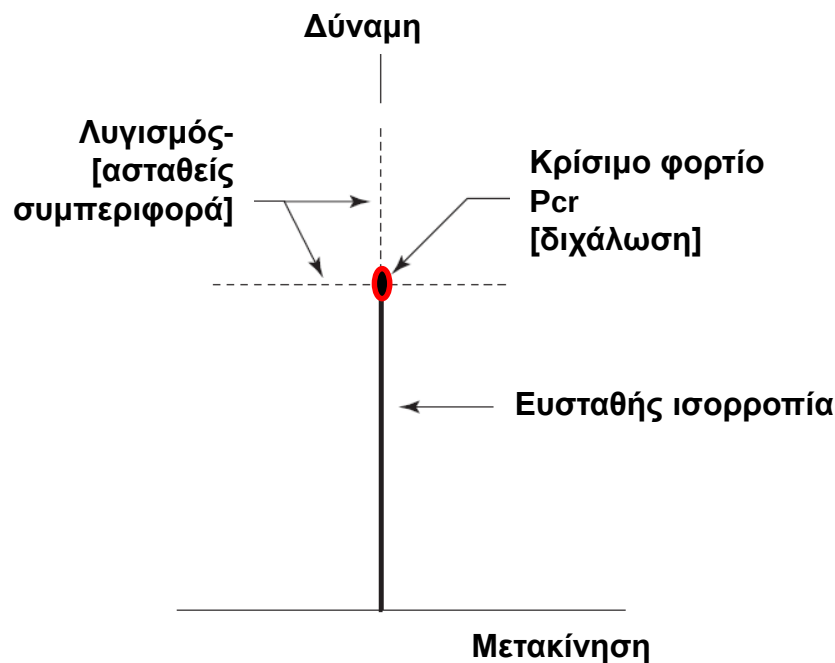
Τα βασικά στοιχεία που χαρακτηρίζουν τον σχεδιασμό
έναντι λυγισμού είναι:

- Το **κρίσιμο φορτίο** εμφάνισης του λυγισμού.
- Το **μήκος λυγισμού** του μηχανικού συστήματος [δομικού στοιχείου ή φορέα].
- Η **λυγηρότητα** του μηχανικού συστήματος [δομικού στοιχείου ή φορέα].

2. Κρίσιμο φορτίο

Κρίσιμο φορτίο λυγισμού, P_{cr} , ονομάζεται εκείνο το θλιπτικό φορτίο η τιμή του οποίου όταν ξεπεραστεί εμφανίζεται το φαινόμενο του λυγισμού.

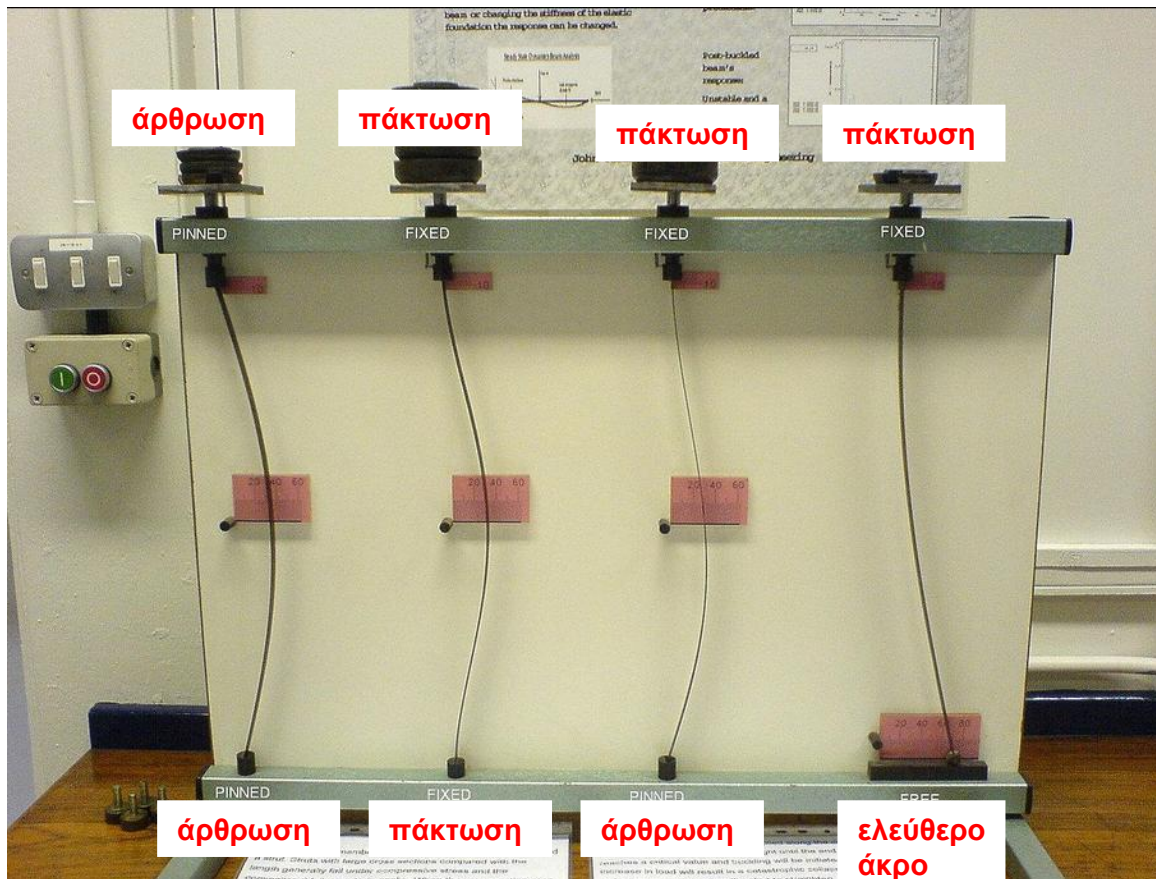
Εξαρτάται από το μήκος του στοιχείου, τις στηρίξεις, το μέτρο ελαστικότητας και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διατομής.

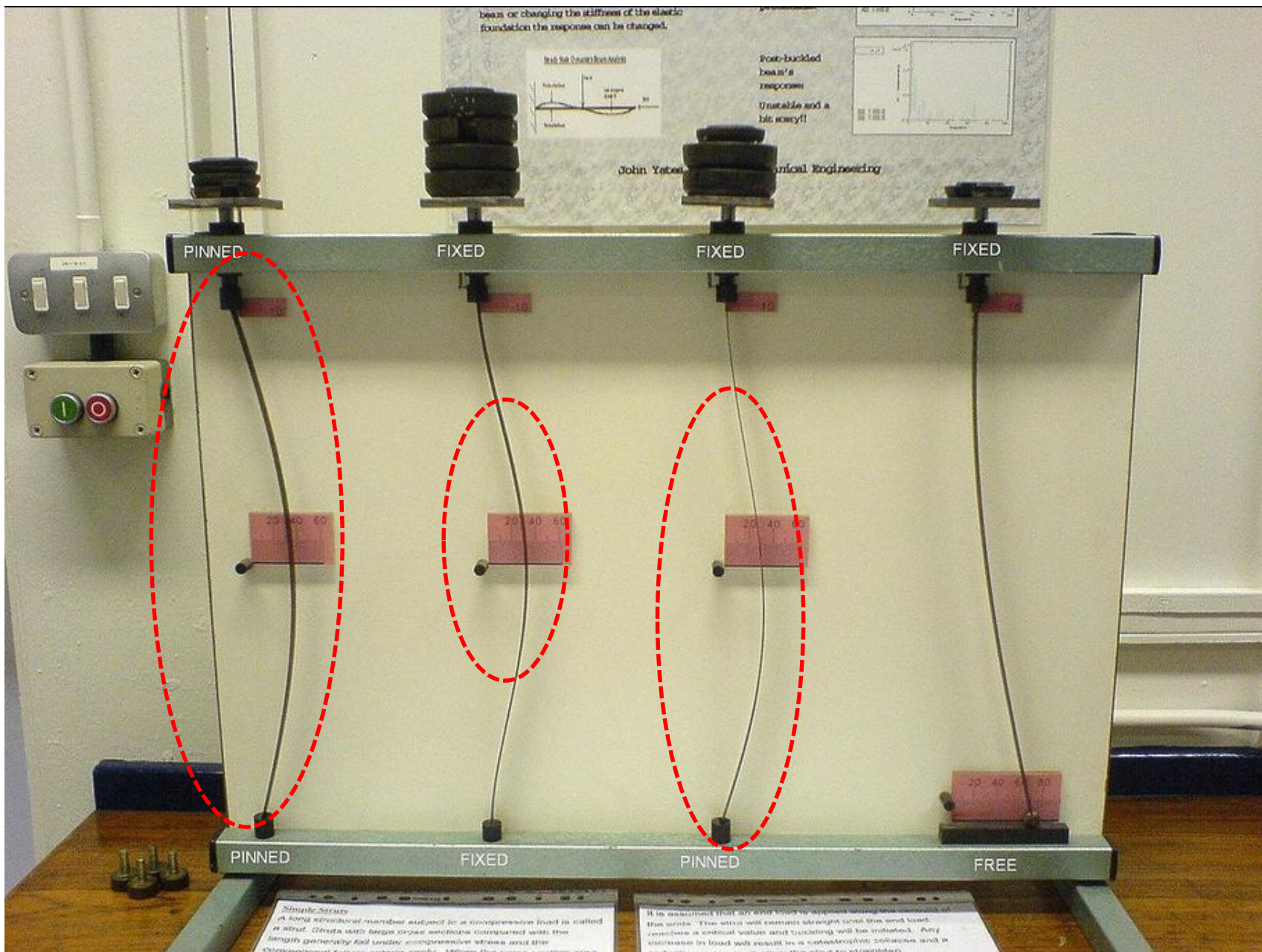


3. Μήκος λυγισμού

Το μήκος λυγισμού, ή ισοδύναμο μήκος λυγισμού, είναι το μήκος που λαμβάνει το στοιχείο όταν υφίσταται το φαινόμενο του λυγισμού.

Εξαρτάται από τις συνθήκες στήριξης του στοιχείου.



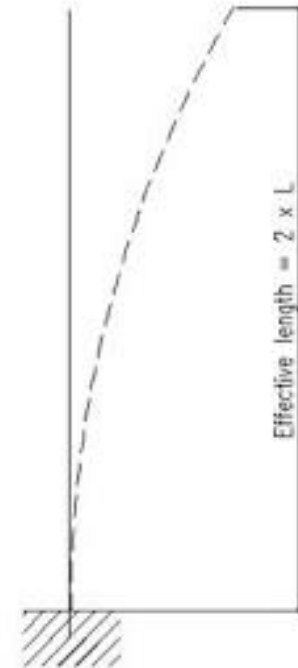
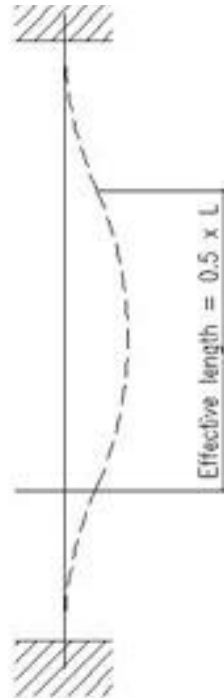
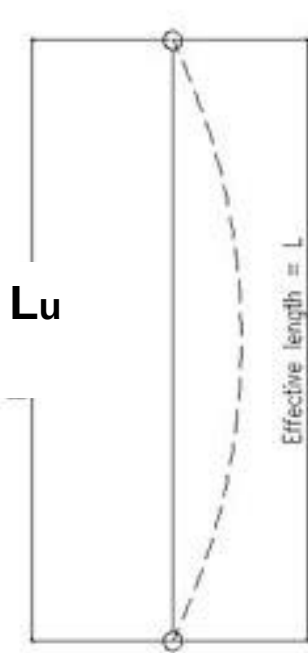


Αμφιαρθρωτή δοκός

Αμφίπακτη δοκός

Μονόπακτη δοκός

Πρόβολος



$L_b \rightarrow L_u$

$0.50 L_u$

$0.70 L_u$

$2.0 L_u$

L_u : Το ελεύθερο άνοιγμα της δοκού μεταξύ των στηρίξεων.

L_b : Το μήκος λυγισμού.

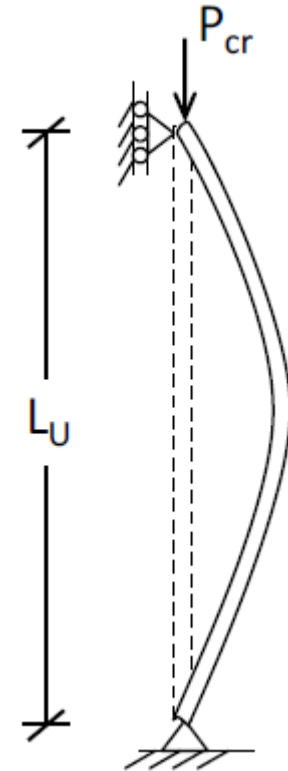
Θεωρητικές τιμές Τιμές σχεδιασμού Συνθήκες στήριξης	Buckled shape of column shown by dashed line					
	Theoretical K value	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0
	Recommended design value K	0.65	0.80	1.2	1.0	2.10
	End condition key		Rotation fixed and translation fixed Rotation free and translation fixed Rotation fixed and translation free Rotation free and translation free			

https://www.wikiwand.com/en/Euler%27s_critical_load

Μήκος λυγισμού

$$L_b = K * L_u$$

K: Συντελεστής που λαμβάνει υπόψη το μήκος λυγισμού σε σχέση με τις συνθήκες στήριξης.



4. Λυγηρότητα

Η λυγηρότητα [slenderness] χαρακτηρίζει την ευαισθησία ενός στοιχείου να εμφανίσει φαινόμενα αστάθειας. Όσο πιο λυγηρό ένα στοιχείο, τόσο μεγαλύτερη η τάση να λυγίσει.

Η λυγηρότητα, λ , είναι αδιάστατο μέγεθος και ισούται με το μήκος λυγισμού, L_u , προς την ακτίνα αδράνειας, r [radius of gyration].

$$\lambda = K \cdot L_u / r$$

Ακτίνα αδράνειας

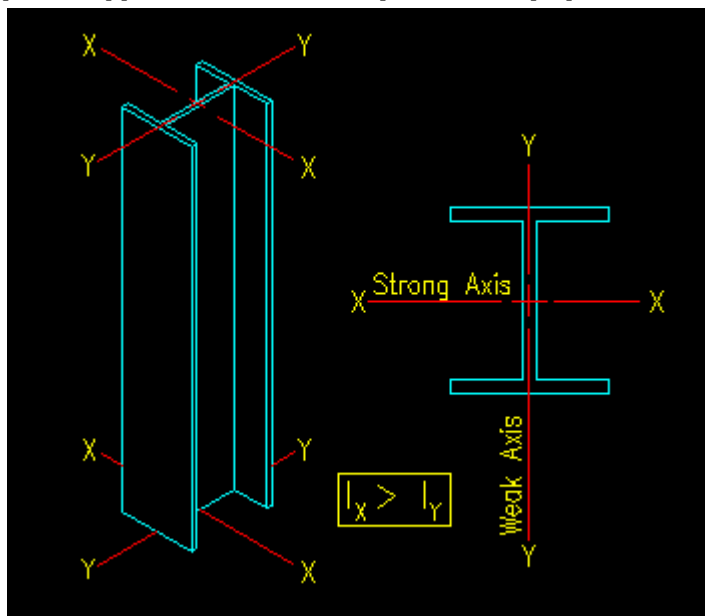
$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

Η λυγηρότητα εξαρτάται από:

- Από το μήκος λυγισμού.
- Τις συνθήκες στήριξης.
- Την μορφή της διατομής.
- Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διατομής.

Η ακτίνα αδράνειας συμβολίζεται με r [Αγγλοσαξονικός συμβολισμός ή με i [Ευρωπαϊκός συμβολισμός].

Παράδειγμα: Υποστύλωμα διατομή διπλού T

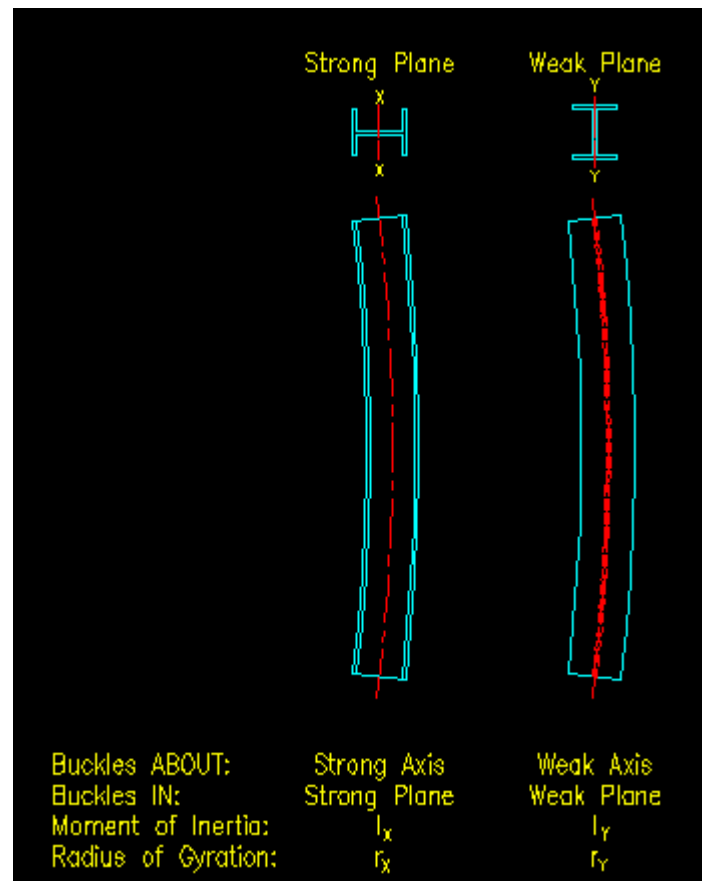


Λυγηρότητα ως προς του κύριου άξονες

$$(x) \text{ --- } \lambda_x = K_x \cdot L_u / r_x$$

$$(y) \text{ --- } \lambda_y = K_y \cdot L_u / r_y$$

Ισχυρός άξονας Ασθενής άξονας



5. Κρίσιμο φορτίο – Φορτίο Euler

Βασικές παραδοχές:

- (i) Η ράβδος είναι ιδανικά ευθύγραμμη και έχει σταθερή διατομή σε όλο το μήκος της.
- (ii) Το θλιπτικό φορτίο ενεργεί ιδανικά, ακριβώς, στο άξονα της ράβδου, με μηδενική εκκεντρότητα.
- (iii) Η συμπεριφορά της δοκού χαρακτηρίζεται από τον νόμο του Hooke, και βρίσκεται εντός της ελαστικής περιοχής καταπόνησης.
- (iv) Το υλικό είναι ισότροπο και ομογενές.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{(K L u)^2}$$

Το κρίσιμο φορτίο εξαρτάται από το μέτρο ελαστικότητας, την ροπή αδράνειας, το μήκος λυγισμού και τις συνθήκες στήριξης.

Θεωρώντας $K=1$ ----- αμφιαρθρωτή δοκός

Κρίσιμη τάση λυγισμού:

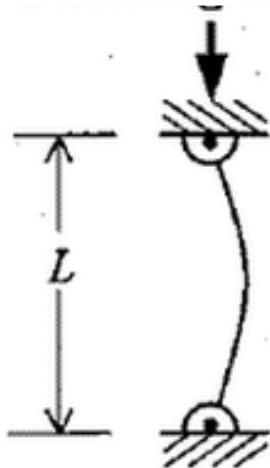
$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E I}{(L_u)^2 A}$$



$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_u}{r}\right)^2}$$

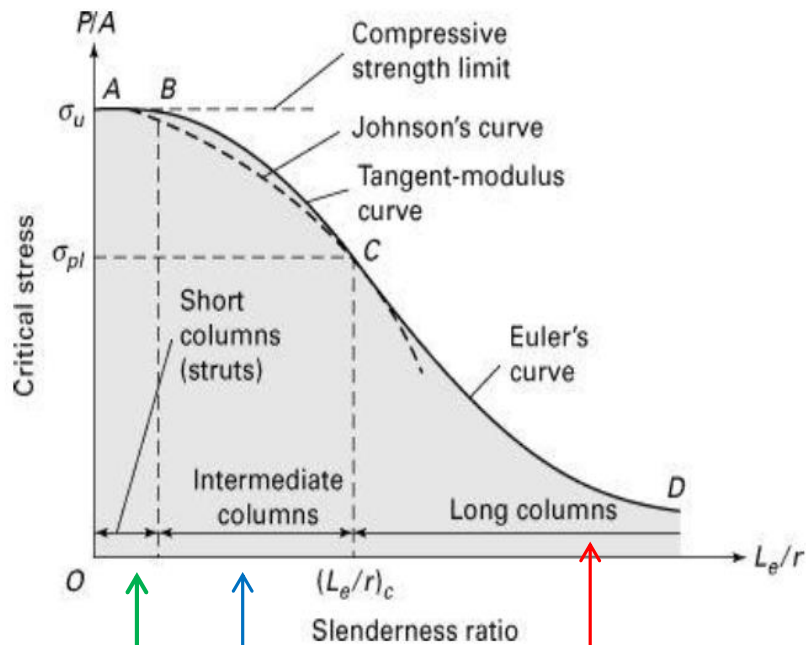
Η κρίσιμη τάση πρέπει να βρίσκεται εντός του ελαστικού πεδίου συμπεριφοράς του υλικού, [π.χ.για τον δομικό χάλυβα να είναι πάντα μικρότερη από το όριο διαρροής του υλικού]

Κρίσιμο φορτίο λυγισμού ανάλογα με τις συνθήκες στήριξης

					
Buckling Load	$\frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$\frac{4\pi^2 EI}{L^2}$	$\frac{2.045\pi^2 EI}{L^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{L^2}$
Effective Length	L	$0.5L$	$0.699L$	$2L$	L

Όσο μεγαλύτερος ο βαθμός στατικής αοριστίας τόσο μεγαλύτερο κρίσιμο φορτίο έναντι λυγισμού.

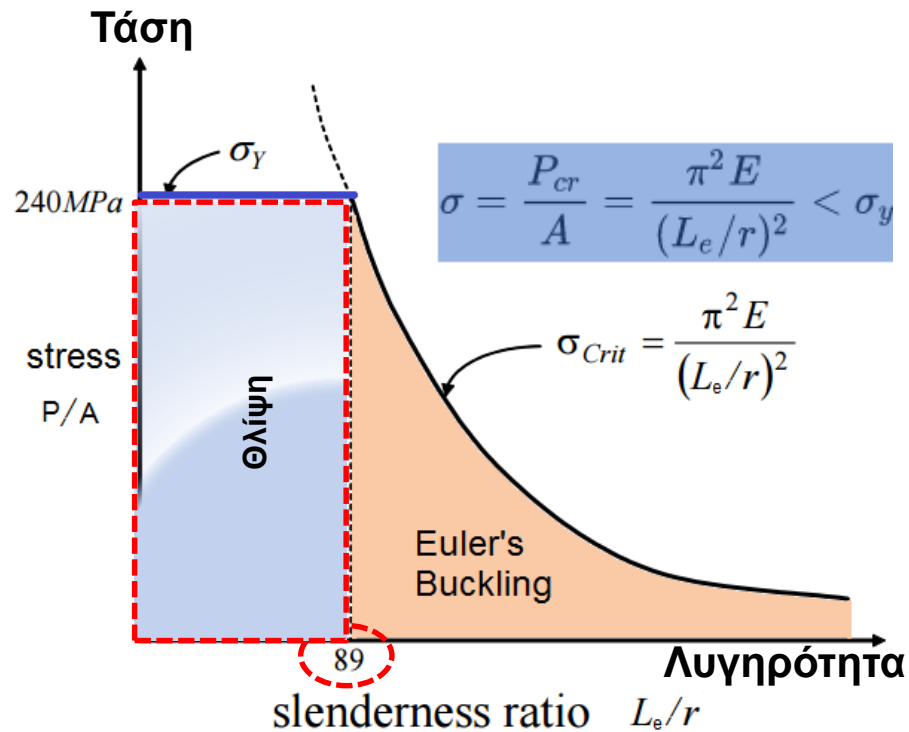
<http://engineering.myindialist.com/2015/twelve-viva-questions-on-columns-and-struts/#.Xn4lYLjXxlQ>



Περιοχή
μικρής
λυγηρότητας

Περιοχή
ενδιάμεσης
λυγηρότητας

Περιοχή
μεγάλης
λυγηρότητας



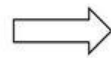
Παράδειγμα: Όριο λυγηρότητας για υλικό με μέτρο ελαστικότητας $E = 200$ GPa και όριο διαρροής 240 MPa.



DESIGN OF COLUMNS

Column Buckling

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{L_E^2}$$



$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{A L_E^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Critical stress

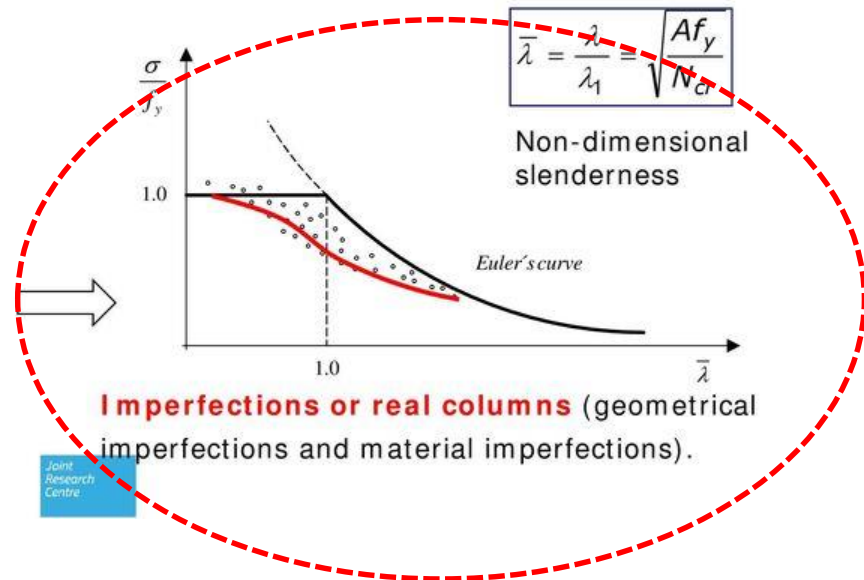
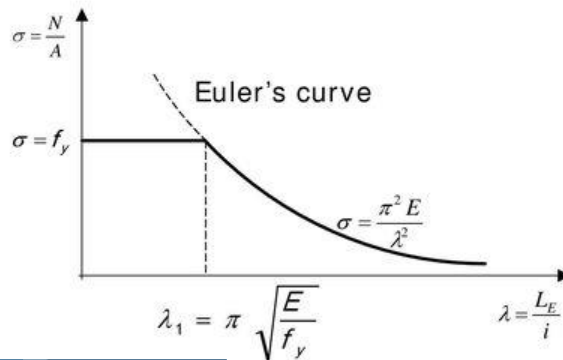
$$\lambda = \frac{L_E}{i}$$

Slenderness

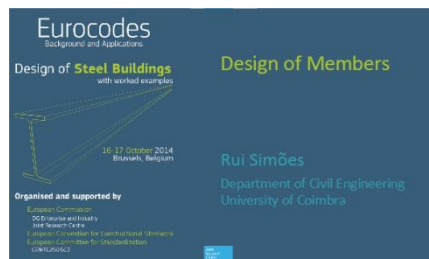
$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

Radius of gyration

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_1^2} = f_y \Rightarrow \lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$



Πραγματικά υποστυλώματα με ατέλειες σε επίπεδο γεωμετρίας και υλικού.



Σημείωμα Αναφοράς σε έργα Τρίτων

Βιβλιογραφία

1. Beer F., Johnston E.R., Mazurek D.: Τεχνική Μηχανική-Στατική. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 11^η 2019, [κωδ. Εύδοξος 59421317].
2. Gere J., Goodno B.: Αντοχή Υλικών. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 9^η 2021, [κωδ. Εύδοξος 86055253].
3. Nash W.: Στατική και Μηχανική των Υλικών. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 1^η 2002, [κωδ. Εύδοξος 18549012].
4. Π.Α. Βουθούνης: Τεχνική Μηχανική. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 10^η 2019, [ISBN 978-618-83280-4-4].
5. F.P. Beer, E.R. Johnston Jr., J.T. Wolf, D.F. Mazuerk: Μηχανική των Υλικών. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 2012-2019. [ISBN: 978-960-418-381-4]. Ελληνική μετάφραση.
6. Π.Α. Βουθούνης: Στατική-Μηχανική του απαραμόρφωτου στερεού. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 6^η 2017, [ISBN 978-618-83280-1-3].
7. Π.Α. Βουθούνης: Αντοχή των Υλικών-Μηχανική του παραμορφώσιμου στερεού. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 4^η 2019, [ISBN 978-618-83280-3-7].
8. Μ. Ματσιοκούδη-Ηλιοπούλου: Τεχνική Μηχανική: Αρχές Στατικής και Εισαγωγή στην Θεωρία των Παραμορφώσιμων Σωμάτων. Εκδόσεις Ζυγός. Έκδοση 1991/2016. [ISBN13: 97896080652533], [κωδ. Εύδοξος 1753].
9. Γ. Γκρός. Μηχανική. Τόμος Α. Ευγενείδιο Ίδρυμα, 1976.

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

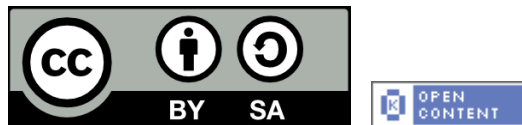
Άνθιμος Σ. Αναστασιάδης. «Τεχνική Μηχανική: Στατική και Αντοχή Υλικών». Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας. Πολυτεχνική Σχολή. Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων & Συστημάτων. Έκδοση 5^η , Κοζάνη, 2025.

Διαθέσιμο από την διαδικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.uowm.gr/courses/MRE250/>

Σημείωμα αδειοδότησης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [<https://creativecommons.org/>] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να περιλαμβάνει τα παρακάτω:

- ❖ Σημείωμα Αναφοράς
- ❖ Σημείωμα Αδειοδότησης
- ❖ Δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ❖ Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει), μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Λυγισμός

