7. Πολυώνυμα

Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων και Συστημάτων

Περιεχόμενα

- Πολυώνυμα.
- Συναρτήσεις Πολυωνύμων.
- Προσαρμογή δεδομένων.

Πολυώνυμα

Πολυώνυμο είναι μια αλγεβρική παράσταση σταθερών και μιας μεταβλητής η οποία εμφανίζεται υψωμένη σε διάφορες δυνάμεις και συμβολίζεται p(x).

Στη MATLAB τα πολυώνυμα αναπαρίστανται από διανύσματα. Τα διανύσματα αυτά περιέχουν τους συντελεστές τους σε κατιούσα διάταξη.

Πολυώνυμα

Οι συντελεστές συμβολίζονται με ένα γράμμα με δείκτη τη δύναμη της μεταβλητής που συνοδεύει. Ο σταθερός όρος έχει συνήθως δείκτη μηδέν.

Π.χ. $p(x)=x^2-7x+15$

Το αντίστοιχο διάνυσμα

P=[1,-7,15]

Πολυώνυμα

Το MATLAB μπορεί να συσχετίσει ένα διάνυσμα μήκους ***n* + 1** με ένα πολυώνυμο βαθμού ***n***. Αν κάποιες από τις δυνάμεις του *x* “λείπουν” από το πολυώνυμο (δηλ. κάποιοι από τους συντελεστές του πολυωνύμου είναι 0) πρέπει να θυμηθούμε να τους συμπεριλάβουμε στο διάνυσμα, όπως ακριβώς έγινε στο πιο πάνω παράδειγμα.

Παραδείγματα μετατροπής πολυωνύμων σε διανύσματα

το πολυώνυμο

$p(x) = x^2 - 3x + 5$ αντιπροσωπεύεται από το διάνυσμα **p = [1, -3, 5]**

το πολυώνυμο

$q(x) = x^4 + 27x^2 - 2x$ από το διάνυσμα

q = [1, 0, 27, -2, 0] .

Βαθμός πολυωνύμου

Ο βαθμός του πολυωνύμου βρίσκεται από την εντολή length(p)-1.

Η εντολή length μας δίνει το μήκος ενός διανύσματος.

Πρόσθεση Πολυωνύμων

Για την πρόσθεση πολυωνύμων, αρκεί τα πολυώνυμα να είναι του ιδίου βαθμού.

Σε διαφορετική περίπτωση, το πολυώνυμο με το μικρότερο βαθμό πρέπει να συμπληρωθεί με αρχικά μηδενικά, ώστε να αποκτήσει τον ίδιο βαθμό με το πολυώνυμο υψηλότερου βαθμού.

Παράδειγμα πρόσθεσης Πολυωνύμων

Έστω τα πολυώνυμα

$p(x)=2x^4+x^3+7x^2+5x+7$

$q(x)=-3x+5$

Τα αντίστοιχα διανύσματα είναι:

p=[2 1 7 5 7] και q=[-3 5]

Το q διάνυσμα το γράφουμε

qnew=[0 0 0 -3 5] για να γίνει ιδίου βαθμού με το p. Για το υπολογισμό του αθροίσματος p+qnew

Δημιουργία συνάρτησης υπολογισμού αθροίσματος

```
function pplusq =athrisma( p,q )
%pplusq=athrisma(p,q)
% υπολογίζει το άθροισμα των διανυσμάτων p και q
x1=length(p);
x2=length(q);
if x1==x2
    pplusq=p+q;
elseif x1>x2
    pplusq=p+[zeros(1,x1-x2) q];
else
    pplusq=q+[zeros(1,x2-x1) p];
end


end
```

```
>> p=[2 3 4 6]

p =

     2     3     4     6

>> q=[5 6 1]

q =

     5     6     1

>> athrisma(p,q)

ans =

     2     8    10     7
```

Συναρτήσεις πολυωνύμων

polyval	Βρίσκει την τιμή ενός πολυωνύμου p(x) σε ένα σημείο x. **Δομή: polyval(p, x)** p: το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο p(x) x: το σημείο όπου υπολογίζεται το πολυώνυμο
roots	Βρίσκει τις ρίζες ενός πολυωνύμου p(x). **Δομή: roots(p)** p: το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο p(x)

Συναρτήσεις πολυωνύμων

conv	Βρίσκει τη συνέλιξη (γινόμενο) δύο πολυωνύμων p(x) και q(x). **Δομή: conv(p, q)** p: το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο p(x) q: το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο q(x)
polyder	Βρίσκει την παράγωγο ενός πολυωνύμου p(x). **Δομή: polyder(p)** p: το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο p(x)

Συναρτήσεις πολυωνύμων

deconv	Βρίσκει τη αποσυνέλιξη (διαίρεση) δύο πολυωνύμων p(x) και q(x). **Δομή: [s, r] = deconv(p, q)** p: το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο p(x) q: το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο q(x) s: το πηλίκο της διαίρεσης r: το υπόλοιπο της διαίρεσης

Παράδειγμα εντολή polyval

Για να βρούμε τη τιμή ενός πολυωνύμου (που έχει οριστεί στο MATLAB ως διάνυσμα) χρησιμοποιούμε την εντολή **polyval**.

Για παράδειγμα, για να βρούμε την τιμή του πολυωνύμου $q(x)= 5x^4 +4x^3+3x^2 +x$ όταν το $x = –1$, λέμε

```
>>q=[5 4 3 1 0]

 >>polyval(q,-1)

ans =

3
```

Εντολή roots

Η εντολή **roots** δίνει τις ρίζες δοθέντος πολυωνύμου:

```
>> roots(p)

ans =


    1.5000 + 1.6583i

    1.5000 - 1.6583i
```

Εντολή roots

Παρατηρούμε ότι η MATLAB δουλεύει και με μιγαδικούς αριθμούς, όπου i=sqrt(-1).

(Δύο από τις 4 ρίζες του πολυωνύμου είναι μιγαδικές.)

Πολλαπλασιασμός Πολυωνύμων

Αν θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε δύο πολυώνυμα, κάνουμε συνέλιξη (*convolution*) των διανυσμάτων με τους συντελεστές των πολυωνύμων. Για παράδειγμα, αν $s(x) = x + 2$ και

$t(x) = x^2 + 4x + 8$ τότε

Παράδειγμα Πολλαπλασιασμού Πολυωνύμων

Στη MATLAB, γράφουμε

```
>> s=[1 2];
>> t=[1 4 8];
>> z=conv(s,t)

z =

     1     6    16    16
```

$z(x)=p(x)q(x)=x^3+6x^2+16x+16$

Διαίρεση πολυωνύμων

Η διαίρεση δύο πολυωνύμων είναι παρόμοια και επιτυγχάνεται με την εντολή **deconv**, η οποία μπορεί να δώσει και το υπόλοιπο της διαίρεσης. Ας διαιρέσουμε το *z* με το *t* (από το προηγούμενο παράδειγμα) για να δούμε αν θα πάρουμε το *s*:

Παράδειγμα Διαίρεσης πολυωνύμων

```
>> [s,r] = deconv(z,t)
 s =
1 2
r =
0 0 0 0
```

Πράγματι, πήραμε το *s* μαζί με το διάνυσμα/υπόλοιπο *r*, το οποίο σε αυτή τη περίπτωση είναι 0, όπως και θα έπρεπε.

Παράδειγμα Διαίρεσης πολυωνύμων με υπόλοιπο

Έστω τα πολυώνυμα

$p(x)=7x^2+12$

$q(x)=x+2$

Να πραγματοποιηθεί η διαίρεση των παραπάνω πολυωνύμων

```
>> p=[7 0 12]

p =

     7     0    12

>> q=[1 2]

q =

     1     2

>> [s,z]=deconv(p,q)

s =

     7   -14


z =

     0     0    40
```

Παράγωγος ενός πολυωνύμου

Παράγωγος είναι ένα μέτρο για το πώς αλλάζει μια συνάρτηση αν αλλάζουν οι τιμές της εισόδου της.

Η MATLAB μπορεί να δώσει και την παράγωγο ενός πολυωνύμου με την εντολή **polyder** η οποία παίρνει ως δεδομένο εισόδου το διάνυσμα με τους συντελεστές του πολυωνύμου και δίνει ως δεδομένο εξόδου το διάνυσμα με τους συντελεστές της παραγώγου του πολυωνύμου.

Παράδειγμα

Αν

$p(x) = 3x^3 - 4x^2 - x + 2$ τότε

```
>> p=[3,-4,-1,2];
>>polyder(p)
ans =
9 -8 -1
```

Προσαρμογή δεδομένων

Μια από τις εφαρμογές των πολυωνύμων είναι η **προσαρμογή (fitting),** που είναι επίσης γνωστή ως **παλινδρόμηση** (regression). Σε αυτή τη διαδικασία, έχουμε σαν δεδομένα ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων και θέλουμε να βρούμε μια συνάρτηση, συνήθως πολυώνυμο μικρού βαθμού, που να αντιπροσωπεύει τα δεδομένα, δηλ. να προσαρμόσουμε το πολυώνυμο στα δεδομένα.

Προσαρμογή δεδομένων

Αν θέλουμε το πολυώνυμο να περνά από όλα τα σημεία, τότε παίρνουμε το λεγόμενο **πολυώνυμο παρεμβολής** (interpolant), του οποίου ο βαθμός είναι ίσος με τον αριθμό των σημείων πλην ένα.

Προσαρμογή δεδομένων

Αν δεν θέλουμε το πολυώνυμο να περνά από όλα τα σημεία, αλλά να έχει βαθμό μικρότερο από τον αριθμό των σημείων πλην ένα, τότε αυτό μπορεί να γίνει με τη **μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων** (least squares method).

Εντολή polyfit

Στο MATLAB, τα πιο πάνω μπορούν να επιτευχθούν με την εντολή polyfit.

p=polyfit(x,y,M)

μας δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου p που έχει βαθμό M και που αντιπροσωπεύει τα δεδομένα.

Έστω τα δεδομένα έχουν ήδη αποθηκευτεί σε δύο διανύσματα x και y.

Παράδειγμα

Έστω ότι έχουμε τα δεδομένα

```
>> x=[2 5 6 7 8];
>> y=[2 7 8 11 17];
>> p4=polyfit(x,y,4)

p4 =

   -0.0111    0.4556   -4.7889   19.6778  -21.6667
```

Παράδειγμα

Το πολυώνυμο

$p4(x)=-0.0111x^4+0.4556x^3-4.7889x^2+19.6778x-21.6667$

περνά από όλα τα δοθέντα σημεία

Το πολυώνυμο είναι 4ου βαθμού και περνά από τα 5 σημεία.