Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων και Συστημάτων

1101 ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

Δρ. Χρήστος Όροβας

ΕΔΙΠ Μαργαρίτης Δημήτριος

2.Διανύσματα και πίνακες

Αρχική έκδοση: Τσαγκαλίδου Ροδή

Περιεχόμενα

Διανύσματα (vectors)

- Διάνυσμα (vector) είναι μια λίστα με αριθμούς πραγματικούς ή μιγαδικούς διατεταγμένους σε μια γραμμή.
- Τα διανύσματα είναι πίνακες με διαστάσεις **1** γραμμή Χ **n** στήλες (**διάνυσμα γραμμής-row vector**) ή **n** γραμμές Χ **1** στήλη (**διάνυσμα στήλης column vector**).
- Τόσο τα διανύσματα (vectors) όσο και οι πίνακες (matrices) χρησιμοποιούνται για την αποθήκευση δεδομένων.
- Τα δεδομένα πρέπει να είναι του **ιδίου τύπου**.

Διάνυσμα γραμμής

- Ένα διάνυσμα γραμμής στο MATLAB ορίζεται ως εξής:

  >>**u=[u1 u2 u3 …un]**

  Αντί για κενά μπορεί να χρησιμοποιηθούν κόμματα

  >>**u=[u1,u2,u3, …un]** .

- Όταν εισάγουμε δεκαδικούς αριθμούς η υποδιαστολή ορίζεται με τελεία.

Ορισμός διανυσμάτων με βήμα

Χρησιμοποιώντας τον **colon operator(:)** μπορεί να δημιουργηθεί ένα διάνυσμα γραμμής (row vector) στον οποίο οι τιμές θα απέχουν ίσα μεταξύ τους.

u=αρχική τιμή:βήμα:τελική τιμή

Όταν δεν προσδιορίζεται βήμα τότε θεωρείται το 1.

Επίσης στην περίπτωση του colon operator δεν χρειάζονται οι αγκύλες.

Παράδειγμα

Για τη δημιουργία του διανύσματος

```
>> u=1:3:18
  u =

      1    4    7    10    13    16
```

το τελευταίο στοιχείο είναι αυτό που δεν ξεπερνάει το όριο.

Το βήμα μπορεί να είναι και αρνητικό.

```
  >> u=50:-10:10
  u =
   50    40    30    20    10
```

vectors

row

5	88	3	11

matrix

scalar

5

column

3
7
4

9	6	3
5	7	2

Πρόσβαση στα στοιχεία (elements)

- Τα στοιχεία (**elements**) ενός διανύσματος (**vector**) αριθμούνται διαδοχικά **ξεκινώντας από το 1**. Ο αριθμός ενός **element** ονομάζεται δείκτης (index ή subscript).
- Κλήση ενός συγκεκριμένου στοιχείου (**element**) του πίνακα προσδιορίζεται από το όνομα του διανύσματος και τον αριθμό του δείκτη (index ή subscript) μέσα σε **παρενθέσεις.**

Ο δείκτης(**index**) πρέπει να είναι

- Θετικός αριθμός
- Να μην ξεπερνάει τις διαστάσεις του διανύσματος (**vector**)

Παραδείγματα

u= 1   4   7   10   13   16

>>u(4)

ans=10 εμφανίζεται η τιμή που υπάρχει στην $5^{η}$ θέση.

>>u(1:5)

εμφανίζονται τα πρώτα 5 στοιχεία του διανύσματος

ans = 1   4   7   10   13

>>u(2:2:6),   ans = 4   10   16

εμφανίζονται το 2^{o} , 4^{o} και 6^{o} στοιχείο

>>u(3:end)   ans = 7   10   13   16

από το 3^{o} μέχρι τελευταίο στοιχείο

>>u(5:-1:2)   ans = 13   10   7   4

το 5^{o}, 4^{o}, 3^{o}και 2^{o}

Μεταβολή τιμών σε elements

- Η τιμή ενός element μπορεί να μεταβληθεί με την ανάθεση μιας καινούργιας τιμής.
  - ***u(2)=11***
  - αλλάζει την τιμή του 2ου element του διανύσματος u σε 11
- Ακόμα αν γίνει χρήση ενός index το οποίο δεν υπάρχει αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την «επέκταση» του vector
- Αν υπάρχει κενό αυτό συμπληρώνεται με μηδενικά
  - ***u(8)=44***

u

1 11 7 10 13 16 0 44

- ***<u>ΔΕΝ προτείνεται προγραμματιστικά!</u>***

Παράδειγμα

```
>> a=[3 55 33 44]

a =

    3    55    33    44


>> a(2)=11

a =

    3    11    33    44


a(6)=23

a =

    3    11    33    44     0    23
```

Συνάρτηση linspace

- Μια συνάρτηση που δημιουργεί διάνυσμα γραμμής (row vectors) με **ισοκατανεμημένα** στοιχεία είναι και η **linspace**
- Η σύνταξη της είναι

linspace(x,y,n)

- δημιουργεί διάνυσμα με πρώτο στοιχείο **x**, τελευταίο **y** και ενδιάμεσα ***n-2*** στοιχεία ισοκατανεμημένα στο κλειστό διάστημα ***[x,y]***

Παράδειγμα

```
>> ls=linspace(3,15,5)

ls =

     3     6     9    12    15
```

Tip: δοκιμάστε την εντολή: plot([1:10],linspace(1,100,10),'o')

Συναρτήσεις διανυσμάτων

Συνάρτηση	
max	μεγαλύτερο στοιχείο διανύσματος
min	μικρότερο στοιχείο διανύσματος
length	μήκος διανύσματος
sort	ταξινόμηση σε αύξουσα σειρά
sum	άθροισμα στοιχείων
prod	γινόμενο στοιχείων
mean	μέση τιμή

Παραδείγματα συναρτήσεων διανυσμάτων

>> u=[4,6,7.2,6,5] u = 4 6 7 2 6 5 >> min(u) ans = 2 >> max(u) ans = 7	>> length(u) ans = 6 >> sort(u) ans = 2 4 5 6 6 7
>> mean(u) ans = 5	>> sum(u) ans = 30 >> prod(u) ans = 10080

Διάνυσμα Στήλης (column vector)

- Ένα διάνυσμα στήλης στο MATLAB ορίζεται μέσα σε αγκύλες διαχωριζόμενα από ερωτηματικά.

  >> **u=[a1;a2;a3; …an]**

Παράδειγμα:

```
 >> a=[7;14;20;19]

a =


     7
    14
    20
    19
```

- Δύο διανύσματα γραμμής ή στήλης με ίδιο πλήθος στοιχείων μπορούμε να τα προσθέσουμε ή να τα αφαιρέσουμε.

Παράδειγμα (row-vectors)

πρόσθεση	αφαίρεση

`>> a=[2,3,4,5,6]`
`a =`
`     2     3     4     5     6`
`>> b=[6,7,8,9,2]`
`b =`
`     6     7     8     9     2`
`>> c=a+b`
`c =`
`     8    10    12    14     8`
	`>> a=[10 15 20 25 30]`
	`a =`
	`    10    15    20    25    30`
	`>> b=[5 10 30 50 20]`
	`b =`
	`     5    10    30    50    20`
	`>> c=a-b`
	`c =`
	`     5     5   -10   -25    10`

Παράδειγμα (column-vectors)

πρόσθεση	αφαίρεση

πρόσθεση

```
>> a=[5;10;15;20;25]
a =
     5
    10
    15
    20
    25
>> b=[2;4;6;8;10]
b =
     2
     4
     6
     8
    10
>> c=a+b
c =
     7
    14
    21
    28
    35
```

αφαίρεση

```
>> d=a-b
d =
     3
     6
     9
    12
    15
```

Δημιουργία Πινάκων (matrices)

Ένας πίνακας a(i,j), σημαίνει ότι ο πίνακας έχει **i** γραμμές και **j** στήλες.

Για την δημιουργία ενός πίνακα (matrix)

- Παρατίθενται τα στοιχεία σε αγκύλες
- Η εισαγωγή των στοιχείων κάθε ίδιας γραμμής πρέπει να διαχωρίζονται είτε με ένα κενό είτε με κόμμα (,)
- Οι γραμμές μεταξύ τους διαχωρίζονται με το σύμβολο του ερωτηματικού (;) ή ENTER.
- Πρέπει πάντα να υπάρχει ο ίδιος αριθμός στοιχείων σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη.
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί βήμα για τη δημιουργία του πίνακα.

Παραδείγματα

Με Ελληνικό ερωτηματικό σε μία γραμμή

```
>>pinakasA=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
pinakasA =

     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
```

Χρησιμοποιώντας το enter σε 3 γραμμές

```
>> pinakasb=[1 2 3
4 5 6
7 8 9]
pinakasb =

     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
```

Παράδειγμα

Δημιουργία πίνακα με βήμα

>> pinakasC=[2:5;1:4;12:15]

```
pinakasC =

     2     3     4     5
     1     2     3     4
    12    13    14    15
```

Παραδείγματα εμφάνισης στοιχείων πίνακα

Για να εμφανίσουμε στοιχεία πίνακα A(I,j) που έχουμε ήδη δημιουργήσει

- Το A(i,j) μας δίνει το περιεχόμενο στην συγκεκριμένη θέση
- Το A(:,j) μας δίνει την j-στήλη του A (:=όλα)
- Το A(i,:) μας δίνει την i-γραμμή του A
- Το A(m:n,p:s) μας δίνει τον υποπίνακα A που ορίζεται από τις γραμμές m έως n και τις στήλες p έως s.

Το end δηλώνει την τελευταία γραμμή ή τελευταία στήλη.

- Το A(end,:) μας δίνει την τελευταία γραμμή του A
- Το A(:,end) μας δίνει την τελευταία στήλη του A
- Το A(end,1:2:5) μας δίνει διάνυσμα που περιέχει το 1ο, το 3ο και το 5ο στοιχείο της τελευταίας γραμμής του A.

Πίνακες με τυχαία στοιχεία

Η **rand** μπορεί να δημιουργήσει πίνακα με τυχαία elements του διαστήματος (0,1)

- Ένα όρισμα ***n*** τότε τετραγωνικός matrix μεγέθους ***n***, π.χ. rand(4)
- δύο ορίσματα ***r,c*** matrix ***r X c,*** π.χ. rand(2,3)

Παρόμοια η **randi** μετά τα ορίσματα που καθορίζουν το εύρος των τυχαίων αριθμών μπορεί να δεχθεί ένα ή δύο ορίσματα που καθορίζουν την δημιουργία matrix αντίστοιχα με την rand (με ακεραίους)

(Το κλειστό διάστημα [2,6], είναι το διάστημα από το οποίο θα πάρει τις τυχαίες τιμές και ο πίνακας θα είναι ans(2,3)

```
>> rand(2)
ans =
    0.0357    0.9340
    0.8491    0.6787
>> rand(2,2)
ans =
    0.7577    0.3922
    0.7431    0.6555
>> randi([2,6],2)
ans =
     2     2
     5     3
>> randi([2,6],2,3)
ans =
     2     6     3
     2     5     6
>>
```

Συναρτήσεις που δημιουργούν πίνακες/διανύσματα

- Τυχαίοι πραγματικοί – ***rand***
- Τυχαίοι ακέραιοι – ***randi*** (ΠΡΟΣΟΧΗ, πρώτο όρισμα το διάστημα των τυχαίων)
- Μηδενικά – ***zeros***
- Μονάδες – ***ones***
- Τυχαίος τετραγωνικός ***– magic(n)***

- Όλες μπορούν να πάρουν ένα όρισμα για δημιουργία τετραγωνικού και δύο για NxM

Συνέχεια με συναρτήσεις δημιουργίας πινάκων

Ανάστροφος πίνακας

Ανάστροφος του πίνακα a λέγεται ο πίνακας που έχει γραμμές τις στήλες του a και στήλες τις γραμμές του a και συμβολίζεται a^T .

Συντομογραφία: Για τη δημιουργία ανάστροφου πίνακα a: **a’**

Ισχύει και στα διανύσματα

```
>> a=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]
a =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9

>> a'
ans =
     1     4     7
     2     5     8
     3     6     9
```

Υποπίνακες (sub-matrix)

Έχουμε τη δυνατότητα από έναν πίνακα να δημιουργήσουμε **υποπίνακες** από τα στοιχεία του πίνακα.
 	
Αν χρησιμοποιηθεί ο χαρακτήρας (:) σημαίνει όλες οι γραμμές ή όλες οι στήλες αντίστοιχα.
	`>> a=[2 3 5;6 7 8;3 2 1]`
	`a =`
	`2 3 5`
	`6 7 8`
	`3 2 1`
	`>> b=a(1:2,2:3)`
	`b =`
	`3 5`
	`7 8`
	`>> d=a(:,2:3)`
	`d =`
	`3 5`
	`7 8`
	`2 1`

Μεταβολή στοιχείων του πίνακα

Μπορούμε να μεταβάλουμε:

- Ένα στοιχείο του πίνακα
- μια ολόκληρη γραμμή / στήλη
- έναν υποπίνακα

Προσοχή οι αναθέσεις που κάνουμε **να έχουν το ίδιο μέγεθος με τα στοιχεία που θέλουμε να αλλάξουμε**

```
>> mat=[2:4;3:5]
mat =
     2     3     4
     3     4     5
>> mat(1,2)=11
mat =
     2    11     4
     3     4     5
>> mat(2,:)=5:7
mat =
     2    11     4
     5     6     7
>> mat(1,:)=3
mat =
     3     3     3
     5     6     7
```

Επέκταση ενός πίνακα

Μπορούμε να «επεκτείνουμε» ένα matrix με:

- την προσθήκη μιας ολόκληρης row / column
- την προσθήκη ενός scalar

Όπως και στην περίπτωση των vectors αν υπάρχει «κενό» αυτό συμπληρώνεται με μηδενικά

```
>> mat=[2:4;3:5]
mat =
     2     3     4
     3     4     5
>> mat(:,4)=[7;9]
mat =
     2     3     4     7
     3     4     5     9
>> mat(4,:)=7:10
mat =
     2     3     4     7
     3     4     5     9
     0     0     0     0
     7     8     9    10
>>
```

Σύνθετοι πίνακες

Οι σύνθετοι πίνακες προκύπτουν από τη συνένωση μικρότερων πινάκων.

Η [A B] μας δίνει τον πίνακα [A B]

Η [A;B;C] μας δίνει τον πίνακα στήλης που αποτελείται από τους πίνακες A,B,C.

Οι σύνθετοι πίνακες μπορούν να δημιουργηθούν είτε από οριζόντια παράθεση μικρότερων πινάκων, είτε από κατακόρυφη παράθεση.

- Για οριζόντια παράθεση θα πρέπει οι πίνακες να έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών.
- Για κατακόρυφη τον ίδιο αριθμών στηλών.

Παράδειγμα

```
>> A=[1 2;3 4];
>> B=[4 7;8 9];
>> C=[A B]

C =

     1     2     4     7
     3     4     8     9

>> D=[A;B]

D =

     1     2
     3     4
     4     7
     8     9
```

Βασικές Συναρτήσεις δημιουργίας πινάκων (1)

eye(m,n)	Πίνακας με μονάδες την κύρια διαγώνιο και ονομάζεται Μοναδιαίος Πίνακας.
zeros(m,n)	Μηδενικός πίνακας (Όλα τα στοιχεία του=0)
ones(m,n)	Πίνακας μονάδων (Όλα τα στοιχεία του = 1)
rand(m,n)	Πίνακας με τυχαίους αριθμούς ως στοιχεία στο διάστημα 0-1
linspace(a,b,c)	διάνυσμα με πρώτο στοιχείο a, τελευταίο b και ενδιάμεσα c-2 στοιχεία
diag(A)	Αποκόβει την κύρια διαγώνιο και δημιουργεί ένα νέο διάνυσμα στήλης.

Βασικές Συναρτήσεις επεξεργασίας πινάκων (2)

length(v)	εμφανίζει το πλήθος των στοιχείων διανύσματος
size(A)	πλήθος σειρών και στηλών πίνακα
ndims(A)	διαστάσεις πίνακα
numel(A)	αριθμό των στοιχείων πίνακα
max(A) **max(max(A))**	μεγαλύτερη τιμή από κάθε στήλη μεγαλύτερη τιμή όλου του (A)
min(A) **min(min(a))**	ελάχιστη τιμή από κάθε στήλη μικρότερη τιμή όλου του (A)
mean(A) **mean(mean(a))**	μέσο όρο τιμών κάθε στήλης μέσος όρος όλου του πίνακα

Βασικές Συναρτήσεις επεξεργασίας πινάκων (3)

std(A)	τυπική απόκλιση στοιχείων κάθε στήλης
trace(A)	άθροισμα της κυρίας διαγωνίου πίνακα
rot90(A)	στροφή πίνακα κατά 90^o αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού
fliplr(A)	μετάθεση στοιχείων από αριστερά δεξιά
flipud(A)	μετάθεση στοιχείων από πάνω κάτω
tril(A)	μηδενίζει τα στοιχεία **πάνω** από την κύρια διαγώνιο
triu(A)	μηδενίζει τα στοιχεία **κάτω** από την κύρια διαγώνιο
inv(A)	**αντίστροφο** πίνακα (όχι ανάστροφο-inv(a))

Παραδείγματα

- fliplr-αντιμεταθέτει columns
- flipud-αντιμεταθέτει rows
- rot(90)περιστρέφει κατά 90°

```
>> rot90(a)
ans =

    3     6     9
    2     5     8
    1     4     7
```

- reshape- αλλάζει τις διαστάσεις ενός πίνακα.

reshape(a,i,j) ή

reshape(a,[i,j])

```
>> a=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]
a =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
>> fliplr(a)
ans =
     3     2     1
     6     5     4
     9     8     7
```

Η 1η στήλη πάει τελευταία

```
>> flipud(a)
ans =
     7     8     9
     4     5     6
     1     2     3
```

Η 1η γραμμή πάει τελευταία

Παράδειγμα reshape

```
>> mat=randi(100,3,4)
mat =
    91    83    75    67
    54    34     2    61
    11    30     5    53
>> reshape(mat,2,6)
ans =
    91    11    34    75     5    61
    54    83    30     2    67    53
>>
```

Συνάρτηση repmat

Η συνάρτηση repmat χρησιμοποιείται για τον ορισμό πίνακα.

repmat(mat,m,n) δημιουργεί έναν πίνακα mxn διαστάσεων ο οποίος περιέχει αντίγραφα του πίνακα.

```
>> b=magic(2)
b =
     1     3
     4     2
>> repmat(b,3,2)
ans =
     1     3     1     3
     4     2     4     2
     1     3     1     3
     4     2     4     2
     1     3     1     3
     4     2     4     2
```

Βαθμωτές πράξεις (με αριθμό)

Αριθμητικές πράξεις μπορούν να εκτελεστούν σε ολόκληρα διανύσματα ή πίνακες.

Π.χ μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε το διάνυσμα v με το 3 ή να το διαιρέσουμε κάθε στοιχείο με το 2.

```
>> v=[3 7 2 1];
>> v=v*3

v =

     9    21     6     3

>> v=[3 7 2 1];
>> v/2

ans =

    1.5000    3.5000    1.0000    0.5000
```

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός (με αριθμό)

Π.χ Πολλαπλασιασμός κάθε στοιχείου ενός πίνακα με το 2.

Αυτή η πράξη ονομάζεται ***βαθμωτός πολλαπλασιασμός.***

Οι πράξεις πινάκων εκτελούνται σε διανύσματα ή μήτρες στοιχείο. Αυτό σημαίνει ότι έχουν το ίδιο μέγεθος.

```
>> mat=[4:6;3:-1:1]

mat =

     4     5     6
     3     2     1

>> mat*2

ans =

     8    10    12
     6     4     2
```

Πράξεις μεταξύ Πινάκων

- Όταν οι πίνακες είναι ιδίων διαστάσεων μπορεί να γίνει πρόσθεση (+) ή αφαίρεση (-) μεταξύ των πινάκων.
- *Όταν είναι ιδίων διαστάσεων και τετραγωνικοί γίνεται διαίρεση (/ ή \)* *(A/B = A*inv(B) μόνο αν υπάρχει το inv(B))*
- Για πολλαπλασιασμό (*) ο αρ. στηλών του ενός πίνακα πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό γραμμών του άλλου πίνακα. Για εύρεση αντίστροφου ο πίνακας να είναι τετραγωνικός .
- *π.χ αν ο Α είναι n x **m**, για να πολλαπλασιαστεί με τον Β θα πρέπει ο Β να είναι **m** x k. Τα n και τα k μπορούν να έχουν οποιεσδήποτε τιμές.*

Στα μαθηματικά πρέπει να ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες για να γίνουν οι πράξεις.

Πράξεις μεταξύ Πινάκων

A+B	A και B ιδίων διαστάσεων
A-B	A και B ιδίων διαστάσεων
**/ή **	A και B ιδίων διαστάσεων και τετραγωνικοί
A*B	ο αρ. στηλών του ενός πρέπει να είναι ίσος με τον αρ. γραμμών του άλλου.

Βαθμωτές πράξεις (Με Πίνακες)

Για πράξη που βασίζεται στον πολλαπλασιασμό, την διαίρεση και την ύψωση σε δύναμη, πρέπει να υπάρχει τελεία μπροστά από τον τελεστή όταν πρόκειται για πράξεις πινάκων.	Παράδειγμα πολ/σμού V1=2:5 v1= 2 3 4 5 V2=[33 11 5 1] v2=33 11 5 1 Πολλαπλασιασμός στοιχείο κατά στοιχείο v1.*v2= 66 33 20 5

Αριθμητικές πράξεις μεταξύ πινάκων στοιχείο προς στοιχείο.

*****	**A.*B**	A, B ίδιων διαστάσεων
**/ ή **	**A./B** **A.\B**	A, B ίδιων διαστάσεων
^	**A .^B**	A, B ίδιων διαστάσεων

Επίλυση γραμμικού συστήματος

Γραμμικό σύστημα είναι ένα σύνολο από γραμμικές εξισώσεις ή ανισώσεις με τους ίδιους αγνώστους τους οποίους προσπαθούμε να προσδιορίσουμε ώστε να επαναληφθούν όλες οι εξισώσεις ή ανισώσεις του συνόλου.

Η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος γίνεται είτε προσδιορίζοντας το αντίστροφο πίνακα του πίνακα των συντελεστών και πολλαπλασιάζοντας αυτό με το διάνυσμα των σταθερών όρων, είτε με την απαλοιφή κατά Gauss.

Παράδειγμα

- Έχουμε το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 4 \\ 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 4\cdot x_3 = 5 \\ 4\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 5\cdot x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A\cdot x = b \Rightarrow x = A^{-1}\cdot b$$

Αντιστροφή πίνακα

```
>> A=[1 2 3;2 3 4;4 2 5]; % μητρωο συντελεστων ↵
>> b=[4;5;1]; %μητρωο σταθερων ορων ↵
>> C=inv(A) %αντιστροφη μητρωου ↵
C =
  -1.4000    0.8000    0.2000
  -1.2000    1.4000   -0.4000
   1.6000   -1.2000    0.2000

>> C*b %υπολογισμος λυσεων γραμμικου συστηματος ↵
ans =
  -1.4000
   1.8000
   0.6000
```

Απαλοιφή κατά Gauss

```
>> A=[1 2 3;2 3 4;4 2 5]; % μητρωο συντελεστων ↵

>> B=[4;5;1]; %μητρωο σταθερων ορων ↵

>> X=A\B %υπολογισμός λυσεων γραμμικού συστηματος ↵

X =    -1.4000
        1.8000
        0.6000
```