

ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΝΟΜΟΙ ΓΕΝΙΚΗΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ

Ιδιότητες και είδη υγρών

- Κάθε μόριο στην εσωτερική δομή των υγρών βρίσκεται σε ορισμένη απόσταση από το γειτονικό του και μπορεί να κινείται απεριόριστα μέσα στο χώρο
- **Ιδιότητες των υγρών:**
 - Δεν αντιδρούν σε εφελκυστικές τάσεις
 - Παραμορφώνονται υπό την επίδραση διατμητικών τάσεων
 - Αντιδρούν σε τάσεις συμπίεσης
- Ανάλογα με τον αν παρουσιάζουν ή όχι αντίσταση στην παραμόρφωση, διακρίνονται σε:
 - **Ιδανικά (ή τέλεια):** δεν παρουσιάζουν αντίσταση στην παραμόρφωση
 - **Πραγματικά (ή ιξώδη):** παρουσιάζουν αντίσταση στην παραμόρφωση (ιξώδεις)

Ορισμός και είδη ροής

- **Ροή** είναι η κίνηση του νερού και κάθε υγρού
- Η ροή των υγρών είναι η κίνηση συνεχούς μέσου υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων
- Η λεπτομερής ανάλυση των φαινομένων της ροής είναι πολύπλοκη
- Πρώτα από όλα απαιτείται η γνώση των στοιχείων της ροής:
 - ✓ Η ταχύτητα V
 - ✓ Η επιτάχυνση γ
 - ✓ Η τροχιά ενός κινούμενου μορίου ρευστού
 - ✓ Η γραμμή ροής
 - ✓ Η γραμμή ράβδωσης
 - ✓ Ο σωλήνας ροής

Η ταχύτητα V

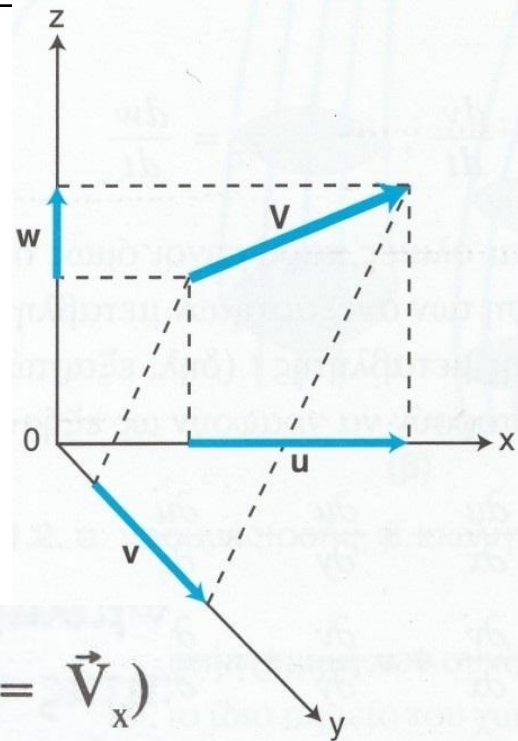
- Είναι διανυσματικό μέγεθος και ορίζεται ως το διανυθέν διάστημα Δs από ένα μόριο προς τον αντίστοιχο χρόνο

$$\vec{V} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

- Από υδραυλική άποψη μπορεί να οριστεί ως το όριο της παροχής που διέρχεται ανά μονάδα χρόνου προς μια αντίστοιχη επιφάνεια

$$\vec{V} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta E} = \frac{dQ}{dE}$$

- Σε ένα σύστημα ορθογώνιων συντεταγμένων, η ταχύτητα V θα έχει συνιστώσες u, v, w στους τρεις άξονες x, y, z , οι οποίες είναι:



$$u = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \left(= \lim_{\Delta E_x \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_x}{\Delta E_x} = \frac{dQ_x}{dE_x} \right) = \frac{dx}{dt} \left(= \vec{V}_x \right)$$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \left(= \lim_{\Delta E_y \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_y}{\Delta E_y} = \frac{dQ_y}{dE_y} \right) = \frac{dy}{dt} \left(= \vec{V}_y \right)$$

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \left(= \lim_{\Delta E_z \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_z}{\Delta E_z} = \frac{dQ_z}{dE_z} \right) = \frac{dz}{dt} \left(= \vec{V}_z \right)$$

- Το **μέτρο της ταχύτητας** δίνεται από τη σχέση:

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

- Οι σχέσεις αυτές δίνουν την **στιγμιαία σημειακή ταχύτητα**, την ταχύτητα ενός ορισμένου σημείου μια δοσμένη χρονική στιγμή
- Η ταχύτητα μεταβάλλεται τόσο μέσα στο χώρο όσο και μέσα στο χρόνο
- Η **μέση ταχύτητα** ορίζεται ως: $V = \frac{q}{E}$

Η επιτάχυνση γ

- Είναι το όριο του λόγου της μεταβολής της ταχύτητας ΔV προς την αντίστοιχη μεταβολή του χρόνου Δt

$$\gamma = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} = \left(= \frac{d^2 s}{dt^2} \right)$$

- Η επιτάχυνση ως προς τους τρεις άξονες x, y, z θα είναι:

$$\gamma_x = \frac{du}{dt} \quad \gamma_y = \frac{dv}{dt} \quad \gamma_z = \frac{dw}{dt}$$

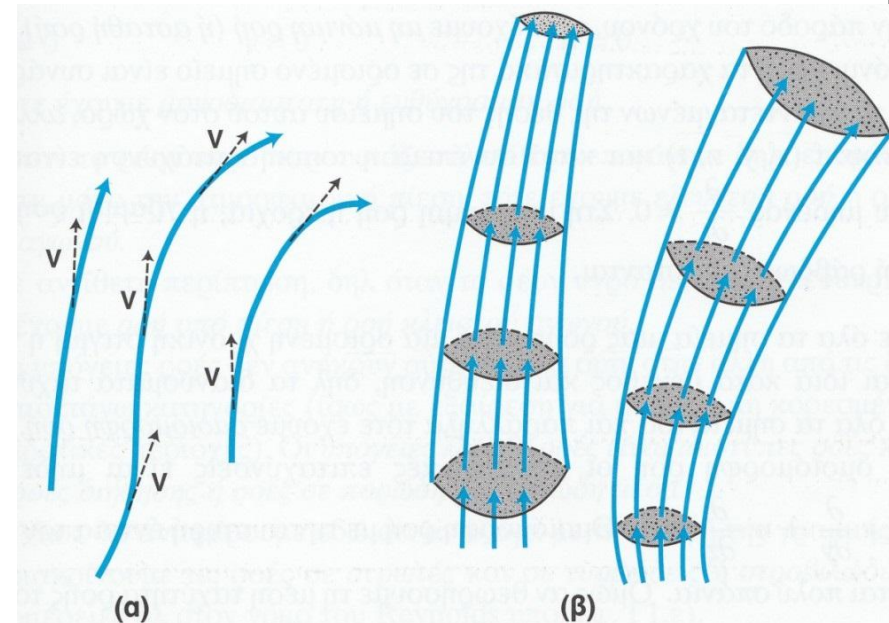
- Οι σχέσεις αυτές είναι ολικές παράγωγοι

- Οι εξαρτώμενες μεταβλητές u , v , w εξαρτώνται από το χώρο και το χρόνο

$$\begin{aligned}\gamma_x &= \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_y &= \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_z &= \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}$$

- **Τοπική επιτάχυνση:** παρατηρείται στο ίδιο σημείο του χώρου με την πάροδο του χρόνου
- **Μεταγωγική επιτάχυνση:** η διαφορά της μεταβολής της ταχύτητας στο χώρο

- **Η τροχιά ενός κινούμενου μορίου ρευστού** είναι ο γεωμετρικός τόπος των θέσεων του μέσα στο χώρο κατά τη μεταβολή του χρόνου t
- **Η γραμμή ροής** είναι η καμπύλη εκείνη στην οποία είναι εφαπτόμενο το άνυσμα της ταχύτητας ροής κατά οποιαδήποτε στιγμή του χρόνου ροής (α)
- **Η γραμμή ράβδωσης:** συνδέει όλα τα μόρια του ρευστού που πέρασαν διαδοχικά από το ίδιο σημείο του χώρου
- **Ο σωλήνας ροής:** σχηματίζεται από γραμμές ροής με οδηγό κλειστή καμπύλη (β)



α. γραμμές ροής, β. σωλήνες ροής.

Είδη ροής

Μόνιμη ή στατική ή σταθερή ροή: τα χαρακτηριστικά της (ταχύτητα, κλπ) δεν μεταβάλλονται με το χρόνο και είναι συνάρτηση των συντεταγμένων της θέσης ενός μόνο ορισμένου σημείου στο χώρο $f(x, y, z)$ και κατά συνέπεια η τοπική επιτάχυνση είναι μηδενική $\frac{\theta}{\theta t} \equiv 0$

Η τροχιά, η γραμμή ροής και η γραμμή ράβδωσης συμπίπτουν

Μη μόνιμη ή ασταθή ροή: τα χαρακτηριστικά της είναι συνάρτηση των συντεταγμένων της θέσης ενός μόνο ορισμένου σημείου στο χώρο αλλά και στο χρόνο $f(x, y, z, t)$ και κατά συνέπεια η τοπική επιτάχυνση δεν είναι μηδενική $\frac{\theta}{\theta t} \neq 0$

Η τροχιά, η γραμμή ροής και η γραμμή ράβδωσης δίστανται

Ομοιόμορφη ροή: σε όλα τα σημεία μιας ροής μια ορισμένη χρονική στιγμή η ταχύτητα είναι ίδια κατά μέγεθος και διεύθυνση και οι μεταγωγικές επιταχύνσεις είναι μηδενικές $u \frac{\theta}{\theta x} + v \frac{\theta}{\theta y} + w \frac{\theta}{\theta z} \equiv 0$

Ανομοιόμορφη ροή: η ταχύτητα δεν είναι ίδια σε όλα τα σημεία και οι μεταγωγικές επιταχύνσεις δεν είναι μηδενικές $u \frac{\theta}{\theta x} + v \frac{\theta}{\theta y} + w \frac{\theta}{\theta z} \neq 0$

Η μεταβολή της ταχύτητας μέσα στο χρόνο χαρακτηρίζει τη ροή σαν μόνιμη ή μη μόνιμη, ενώ η μεταβολή της ταχύτητας μέσα στο χώρο χαρακτηρίζει τη ροή σαν ομοιόμορφη ή ανομοιόμορφη

Τρισδιάστατη ροή: αν καμία συνιστώσα u, v, w δεν είναι μηδενική ($u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0$)

Δισδιάστατη ή επίπεδη ροή: αν μια από τις τρεις συνιστώσες είναι μηδενική

Μονοδιάστατη ή ευθύγραμμη ροή: αν δυο από τις τρεις συνιστώσες είναι μηδενικές

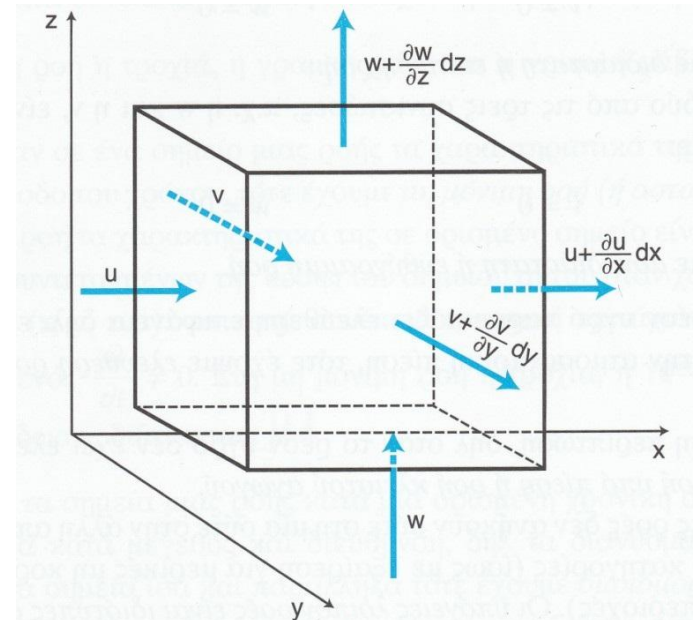
Ελεύθερη ροή ή ροή ανοικτού αγωγού: όταν το ρέον υγρό παρουσιάζει ελεύθερη επιφάνεια, δηλαδή βρίσκεται κάτω από την ατμοσφαιρική πίεση

Ροή υπό πίεση ή ροή κλειστού αγωγού: όταν το ρέον υγρό δεν έχει ελεύθερη επιφάνεια

Ροές διήθησης ή ροές σε πορώδη μέσα: οι υπόγειες ροές

Η εξίσωση της συνέχειας

- Εκφράζει το νόμο της συνέχειας για τα ρευστά, δηλ. το νόμο της διατήρησης της μάζας
- Θεωρούμε ότι το ρευστό είναι ασυμπίεστο, όπως συμβαίνει με όλα τα υγρά και με το νερό
- Θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (x,y,z) με αρχή το 0 και ένα στοιχειώδη κυβικό όγκο διαρρεόμενο από το ρευστό. Οι διαστάσεις του κύβου είναι dx, dy, dz



Απόδειξη του νόμου της συνέχειας

- Αφού το υγρό είναι ασυμπίεστο, η εισερχόμενη παροχή από τις τρεις έδρες είναι ίση με την εξερχόμενη από τις τρεις απέναντι τους
- **Εισερχόμενες παροχές**

$$q_1 = u dy dz, q_2 = v dx dz, q_3 = w dx dy$$

- **Συνολικά εισερχόμενη παροχή**

$$q_0 = u dy dz + v dx dz + w dx dy$$

- Η ταχύτητα όμως συνήθως μεταβάλλεται. Έτσι κατά τον άξονα x η ταχύτητα από u στην είσοδο μεταβάλλεται σε

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad \text{κατά την έξοδο από την απέναντι έδρα}$$

- **Συνολικά εξερχόμενη παροχή**

$$q'_0 = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) dx dz + \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) dx dy$$

- Λόγω του ασυμπίεστου $\rho_0 = \rho'$
- Άρα

$$u dy dz + v dx dz + w dx dy = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) dx dz + \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) dx dy$$

- Μετά από απλοποιήσεις γίνεται $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$
- Η εξίσωση αυτή είναι η **εξίσωση της συνέχειας** για ασυμπίεστα ρευστά και ισχύει για μόνιμες και μη μόνιμες ροές

- Για δισδιάστατη ροή ($w = 0$) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$
- Για μονοδιάστατη ροή ($w = 0, v = 0$) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
- Για ένα σωλήνα ροής η εξίσωση της συνέχειας είναι:
$$V_1 E_1 = V_2 E_2$$
- Όπου V_1, V_2 = ταχύτητες και E_1, E_2 = αντίστοιχες διατομές

Ο νόμος του Bernoulli

- Εκφράζει την **αρχή διατήρησης της ενέργειας**

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z = \text{σταθερό}$$

- Όπου:

V: η ταχύτητα ροής

P: η υδροστατική πίεση

z: η απόσταση από επίπεδο αναφοράς

g: η επιτάχυνση της βαρύτητας

γ: το ειδικό βάρος του νερού

- Ισχύει για ιδανικά και ασυμπίεστα ρευστά και για μόνιμες ροές
- Και οι τρεις όροι έχουν διαστάσεις μήκους (m) ή εκφράζουν ενέργεια ανά μονάδα βάρους

- **Υδραυλικό φορτίο:** ενέργεια ανά μονάδα βάρους

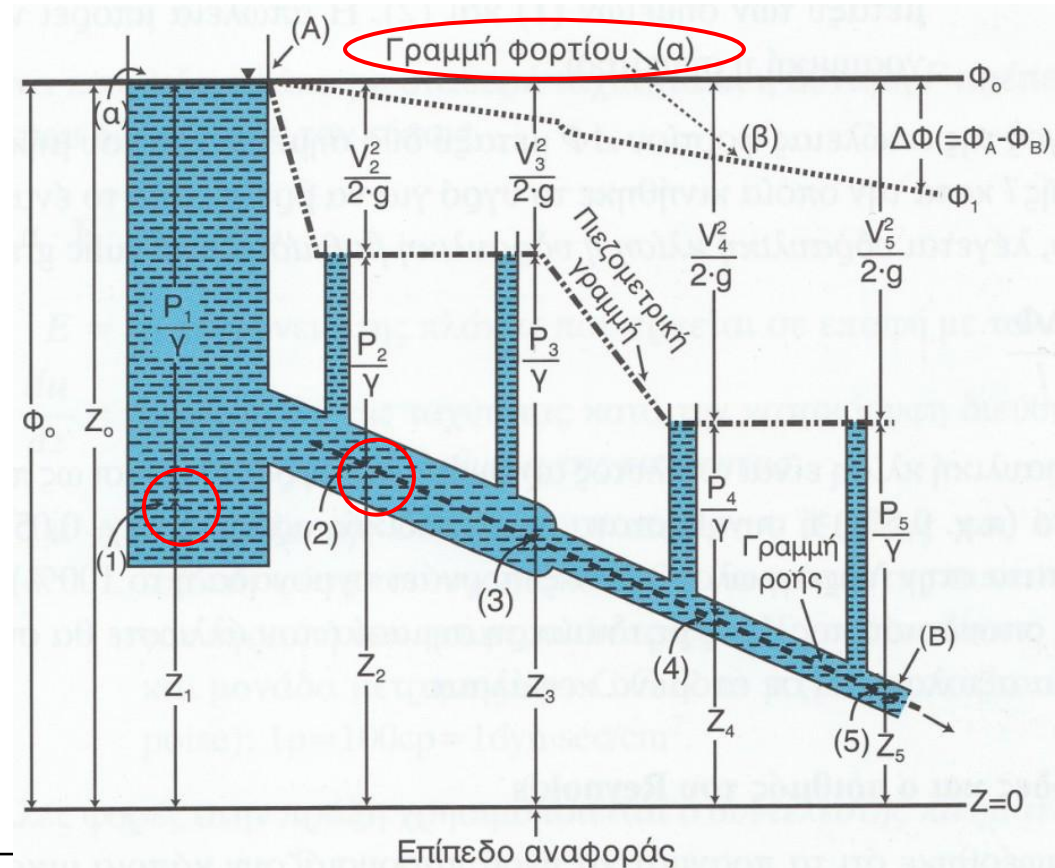
$$\frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z = \Phi$$

- Ο όρος $V^2/2g$ εκφράζει την **κινητική ενέργεια** που έχει η μονάδα βάρους (την ενέργεια λόγω ταχύτητας) και λέγεται **δυναμικό ή φορτίο ταχύτητας**
- Ο όρος P/γ εκφράζει την **ενέργεια της μονάδας βάρους λόγω πίεσης** και λέγεται **δυναμικό ή φορτίο πίεσης**
- Ο όρος z εκφράζει την **ενέργεια της μονάδας βάρους λόγω θέσης** και λέγεται **δυναμικό ή φορτίο θέσης**
- Το άθροισμα $\frac{P}{\gamma} + z = h$ λέγεται **πιεζομετρικό δυναμικό ή πιεζομετρικό φορτίο**

- Σε ιδανικά υγρά (χωρίς εσωτερικές τριβές και απώλειες ενέργειας), για δυο οποιαδήποτε σημεία μιας ροής (1 και 2), ο νόμος του Bernoulli είναι:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2$$

- Το άθροισμα του υδραυλικού φορτίου σε πολλά διαδοχικά σημεία είναι σταθερό και δίνει τη **γραμμή φορτίου** (α)



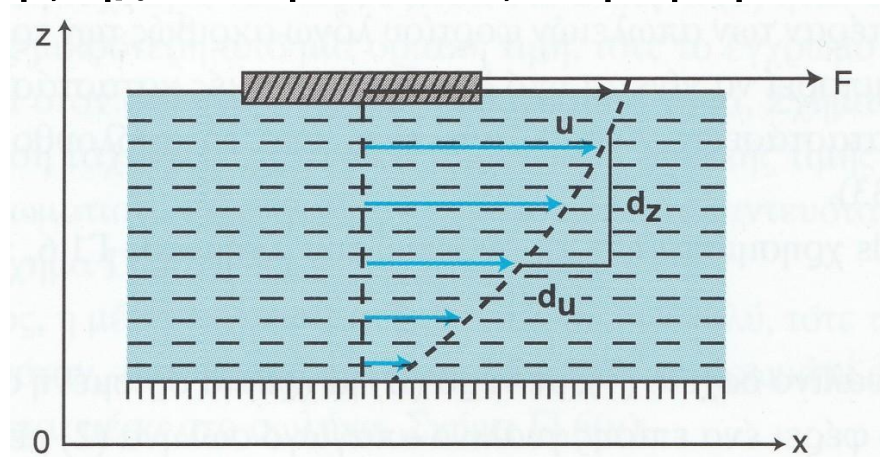
- Στα πραγματικά υγρά λόγω των εσωτερικών τριβών (τριβές μεταξύ των μορίων) και λόγω τριβών με τα τοιχώματα θα έχουμε απώλεια ενέργειας, δηλαδή απώλεια υδραυλικού φορτίου
- Οι απώλειες είναι είτε γραμμικές (λόγω συνεχών τριβών) στις οποίες η γραμμή φορτίου γίνεται κεκλιμένη είτε σημειακές (λόγω κάμψης ή στένωσης αγωγού) στις οποίες η γραμμή φορτίου γίνεται καμπύλη
- Η εφαρμογή του νόμου Bernoulli στα πραγματικά υγρά γίνεται:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \Delta\Phi$$

Όπου $\Delta\Phi$: η απώλεια του υδραυλικού φορτίου μεταξύ των σημείων 1 και 2

- **Υδραυλική κλίση**: ο λόγος της απώλειας φορτίου $\Delta\Phi$ μεταξύ δυο σημείων προς το μήκος της διαδρομής l μεταξύ των δυο σημείων
- Είναι απόλυτος αριθμός και εκφράζεται σαν ποσοστό $i = \frac{\Delta\Phi}{l}$

- **Ιξώδες υγρού:** είναι επακόλουθο της εσωτερικής τριβής και χαρακτηρίζει τη μηχανική του συμπεριφορά



- Για να κινηθεί η πλάκα με σταθερή ταχύτητα u η δύναμη F πρέπει να έχει ένταση:
$$F = \mu \cdot E \cdot \frac{du}{dz}$$

Όπου:

E : η επιφάνεια της πλάκας που έρχεται σε επαφή με το υγρό

du/dz : η μεταβολή της ταχύτητας κατά την κατακόρυφη διεύθυνση που λέγεται κλίση ή βαθμίδα της ταχύτητας

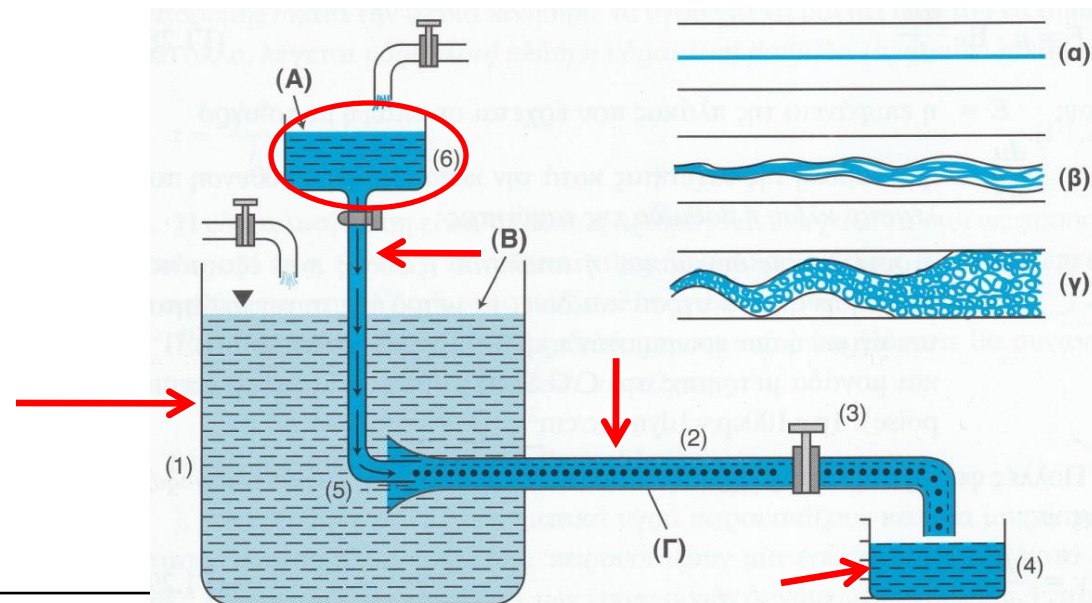
μ : ο συντελεστής δυναμικού ή απόλυτου ιξώδους που εξαρτάται από τη φύση του υγρού και δίνει το μέτρο της συνεκτικότητας του υγρού ή των εσωτερικών τριβών

- **Συντελεστής κινηματικού ιξώδους ν :** $\nu = \frac{\mu}{\rho}$
- Το ιξώδες των υγρών μεταβάλλεται με την θερμοκρασία και την πίεση. Για το νερό με 1 ατμοσφαιρική πίεση και θερμοκρασία 19,5°C το $\nu \approx 1$
- Το ιξώδες δημιουργεί κατά τη ροή διατμητικές τάσεις που είναι συνέπεια των εσωτερικών τριβών με αποτέλεσμα η ροή να γίνεται υπό δυο διαφορετικές καταστάσεις
- Η ύπαρξη αυτών των καταστάσεων γίνεται αντιληπτή με το πείραμα του Reynolds

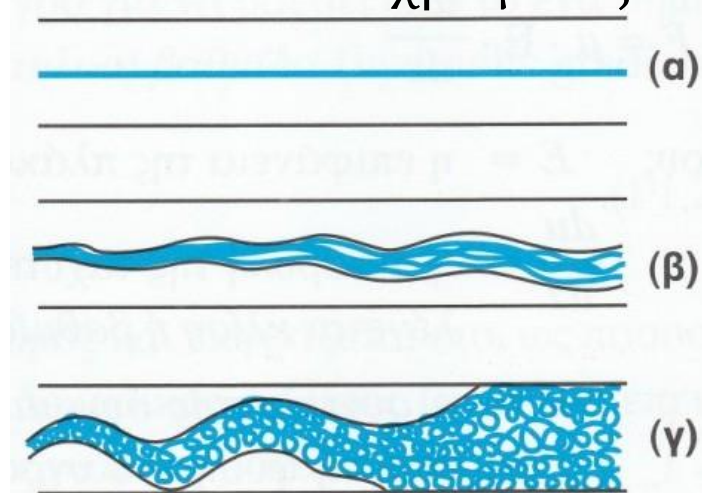
Αριθμός Reynolds

Η συσκευή του πειράματος Reynolds αποτελείται από:

- Ένα γυάλινο δοχείο (1) με νερό (B), ένα γυάλινο σωλήνα (2) με στρόφιγγα ώστε να ρυθμίζεται η παροχή και η ταχύτητα του υγρού
- Ένα ογκομετρικό δοχείο (4) με το οποίο μετράται η παροχή
- Ένα λεπτό γυάλινο σωλήνα (5) που συνδέεται με μια γυάλινη λεκάνη (6) στην οποία υπάρχει χρωματιστό υγρό (A)



- Ο Reynolds μπόρεσε με τη συσκευή αυτή να παρατηρήσει τις γραμμές ράβδωσης που παρουσιάζει το χρωματιστό υγρό μέσα στο σωλήνα (2)
- Μετά από πολλές επαναλήψεις με διαφορετικές ταχύτητες παρατήρησε ότι:
 - α) Όταν η μέση ταχύτητα του νερού μέσα στο σωλήνα είναι μικρότερη από μια οριακή τιμή, τότε το έγχρωμο υγρό εμφανιζόταν σαν ευθύγραμμο νήμα
 - β) Όταν η μέση ταχύτητα αυξάνεται πέρα από μια οριακή τιμή το ευθύγραμμο χρωματιστό νήμα γίνεται κυματοειδές, ταλαντεύεται και διαπλατύνεται
 - γ) Όταν η μέση ταχύτητα αυξηθεί ακόμα πιο πολύ, τότε το χρωματιστό νήμα θραύεται, διασκορπίζεται ακανόνιστα και χρωματίζει όλο το νερό μέσα στο σωλήνα



Η μορφή της ροής εξαρτάται από έναν αριθμό Re , τον **αριθμό του Reynolds**, που δίνεται από τον τύπο:

$$Re = \frac{Vd}{\nu} \quad \text{ή} \quad Re = \frac{\rho Vd}{\mu}$$

Όπου:

V : η μέση ταχύτητα του υγρού

d : η διάμετρος του σωλήνα

Διαπιστώθηκε ότι:

- Όταν $Re < 2000$ τότε η ροή έχει τη μορφή του σχήματος (α) και λέγεται **στρωτή ροή**
- Όταν $40.000 < Re < 100.000$ τότε η ροή έχει τη μορφή του σχήματος (γ) και λέγεται **στροβιλώδης ή τυρβώδης**
- Όταν $2000 < Re < 40.000$ τότε η ροή έχει τη μορφή του σχήματος (β) και λέγεται **μεταβατική ροή**

- Η ροή ενός υγρού καθορίζεται από εξισώσεις ισορροπίας των δυνάμεων που ενεργούν πάνω σε μια στοιχειώδη μάζα του υγρού
- Οι δυνάμεις αυτές είναι τριών φύσεων:
 1. Οι κινητήριες δυνάμεις M (πίεση, βαρύτητα)
 2. Οι δυνάμεις αδράνειας I
 3. Οι δυνάμεις τριβής F
- Επομένως σε κάθε ροή:

$$M + I + F = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{M + I}{I} + \frac{F}{I} = 0$$

- Τα δυο κλάσματα είναι απόλυτοι αριθμοί και είναι συναρτήσεις των μεγεθών της ροής, όπως η ταχύτητα V , η υδραυλική κλίση i , το ιξώδες μ , η πυκνότητα ρ και η διάμετρος d

- Οι δυνάμεις τριβής είναι ανάλογες του ιξώδους μ , της κατανομής της ταχύτητας V και της διαμέτρου d
- Άρα το πηλίκο F/I είναι συνάρτηση των μ , ρ , V , d

$$\frac{F}{I} = f_1\left(\frac{Vd}{\mu/\rho}\right)$$

- Το άθροισμα $M + I$ που ενεργεί πάνω στην μονάδα μάζας είναι ανάλογο του ig ($g = \gamma/\rho$) ενώ οι δυνάμεις αδράνειας εξαρτώνται από τις μεταβολές της ταχύτητας V
- Άρα το πηλίκο $(M+I)/I$ εξαρτάται από τις παραμέτρους ig , V , d

$$\frac{M + I}{I} = f_2\left(\frac{igd}{V^2}\right)$$

= Cf

- Επομένως: $\frac{igd}{V^2} = f\left(\frac{Vd}{\mu/\rho}\right) = \mathbf{Re} \quad \mathbf{Cf = f(Re)}$

- **Γενική εξίσωση ροών ή απωλειών φορτίου:** δίνει την υδραυλική κλίση σε συνάρτηση με τα διάφορα χαρακτηριστικά της ροής και εγκλείει όλα τα μεγέθη της εξίσωσης από την οποία προκύπτει

Ισοδυναμικές καμπύλες

- Είναι οι καμπύλες που σε όλα τους τα σημεία έχουν το ίδιο υδραυλικό φορτίο Φ
- Οι γραμμές ροής είναι πάντοτε κάθετες στις ισοδυναμικές καμπύλες
- Τα υπόγεια νερά ρέουν με μικρή ταχύτητα, άρα το δυναμικό ταχύτητας ($V^2/2g$) είναι αμελητέο
- Άρα $\Phi \approx h$

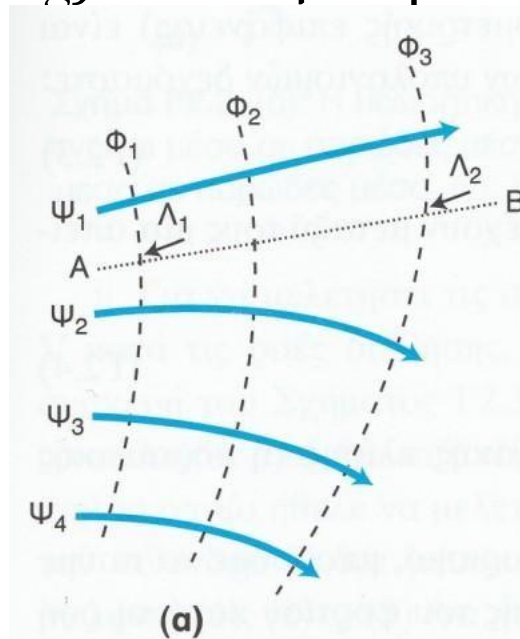
$$\Lambda_1(\Phi_1), \Lambda_2(\Phi_3)$$

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_3$$

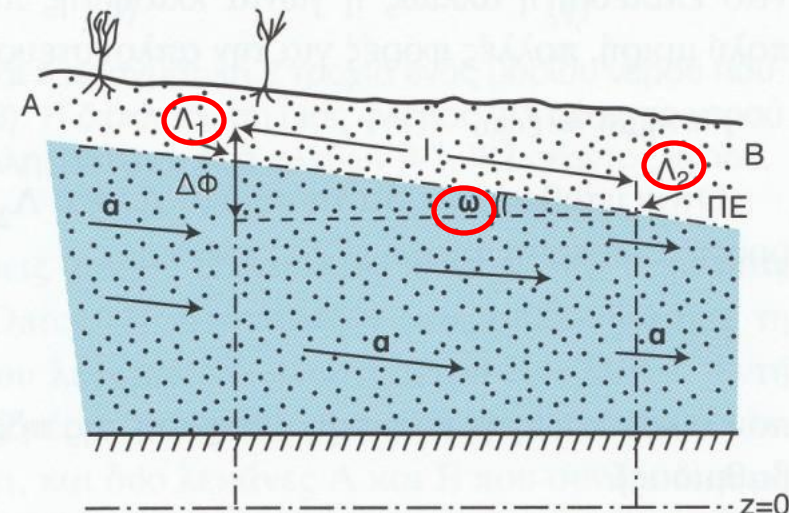
$$i = \frac{\Delta\Phi}{l}$$

$$i = \eta\mu\omega \approx \varepsilon\phi\omega$$

$$i = \frac{d\Phi}{dl}$$



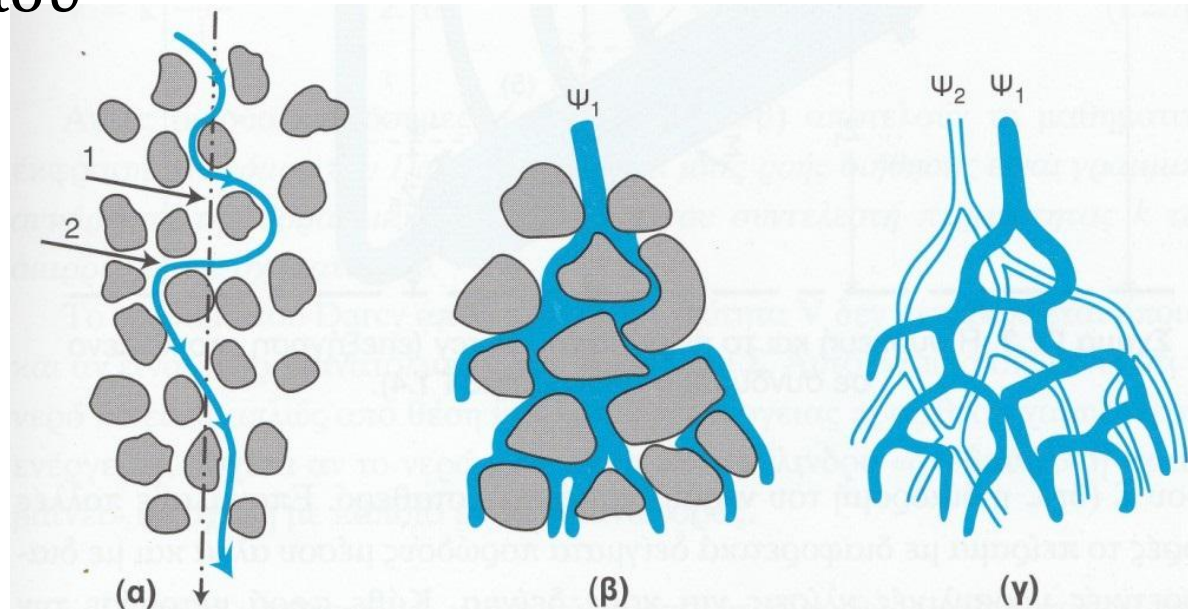
(α)



(β)

(α): Κάτοψη όπου φαίνονται οι γραμμές ροής (Ψ) και αντίστοιχες ισοδυναμικές καμπύλες (Φ), (β): Τομή ΑΒ, όπου φαίνεται η στάθμη του υδροφόρου και η υδραυλική κλίση i ($= \eta\mu\omega$).

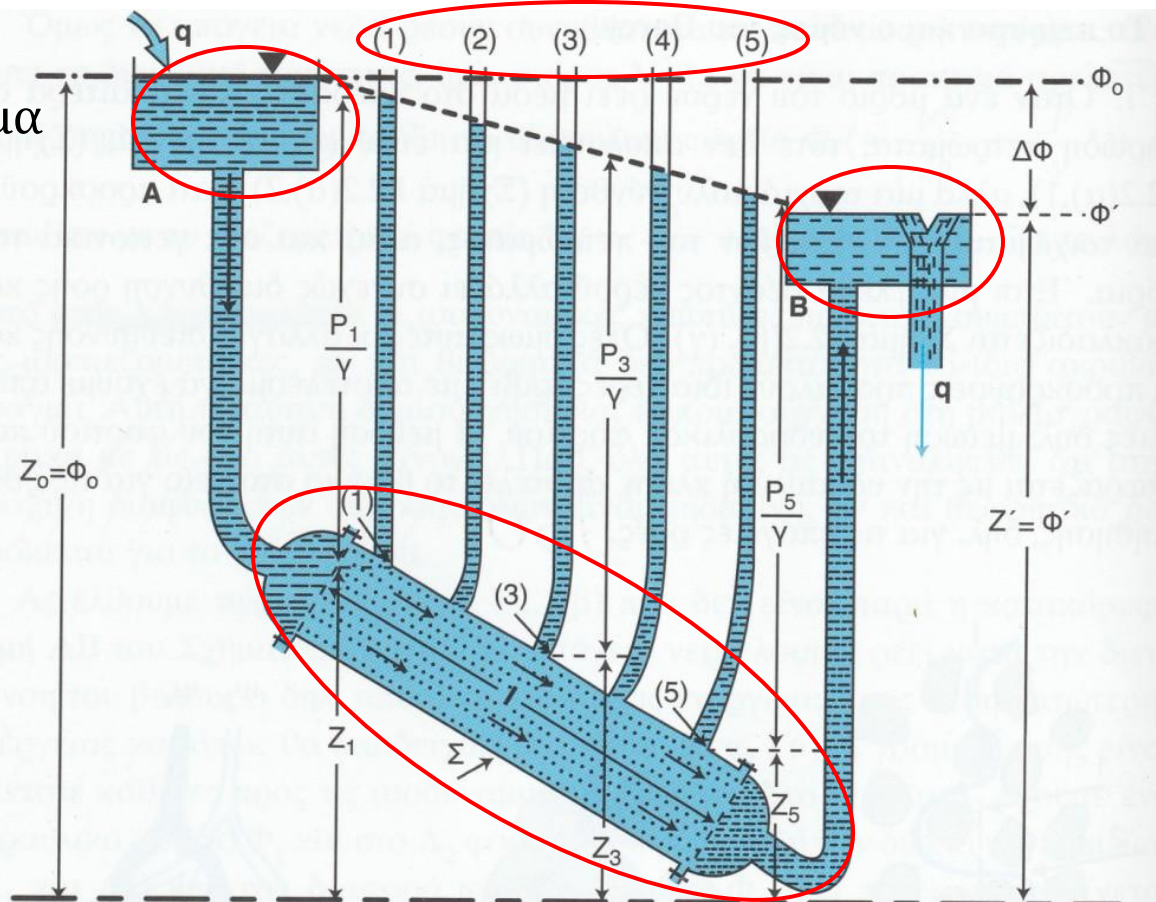
- Τα μόρια του νερού που κινούνται στο υπέδαφος δεν ακολουθούν μια ευθύγραμμη τροχιά αλλά μια τροχιά πολύ σύνθετη
- Μια φλέβα ρέοντος νερού αλλάζει συνεχώς διεύθυνση ροής και διακλαδίζεται
- Οι αλλαγές διεύθυνσης και οι προσκρούσεις προκαλούν τριβές με αποτέλεσμα τη μείωση του υδραυλικού φορτίου



(α): Η θεωρητική 1 και η πραγματική 2 τροχιά ενός μορίου νερού που κινείται μέσα σε πορώδες μέσο. (β): Η διακλάδωση μιας φλέβας ψ_1 ρέοντος νερού μέσα σε πορώδες μέσο. (γ): Η αλληλεπίθεση δύο φλεβών ψ_1 , ψ_2 ρέοντος νερού.

Το πείραμα και ο νόμος του Darcy

- Χρησιμοποίησε αυτή τη συσκευή (περατόμετρο του Darcy) για να μελετήσει τις σχέσεις μεταξύ της υδραυλικής κλίσης i και της ταχύτητας V
 - Αυτή η συσκευή αποτελείται από:
 - Έναν κύλινδρο Σ μέσα στον οποίο τοποθέτησε ένα δείγμα υλικού
 - Δυο λεκάνες A και B
 - Κατακόρυφους σωλήνες, τα πιεζόμετρα (1,2,3,4,5)
-



- Ο Darcy μετακίνησε τις λεκάνες Α και Β ώστε να μεταβληθεί η απώλεια φορτίου $\Delta\Phi$ και η υδραυλική κλίση i
- Επανέλαβε το πείραμα με διαφορετικά δείγματα πορώδους μέσου και διαφορετικές υδραυλικές κλίσεις
- Η παροχή στη λεκάνη Β ήταν: $q = Ek \frac{\Delta\Phi}{l}$

Όπου:

- E : η διατομή του κυλίνδρου Σ
- $\Delta\Phi/l=i$: η υδραυλική κλίση
- k : συντελεστής περατότητας

- Η εξίσωση μπορεί να γραφεί: $\frac{q}{E} = k \frac{\Delta\Phi}{l}$
- Αλλά $q/E=V$: η ταχύτητα της ροής διήθησης (ή ειδική παροχή ανά μονάδα επιφάνειας)
- Επομένως: $V = k \frac{\Delta\Phi}{l}$ ή $V = ki$
- **Νόμος Darcy**: η ταχύτητα μιας ροής διήθησης είναι γραμμική συνάρτηση της υδραυλικής κλίσης i και του συντελεστή περατότητας k του διαρρεόμενου σχηματισμού
- Άρα η ταχύτητα V δεν μεταβάλλεται σε σχέση με κάποιο επίπεδο αναφοράς

Φυσική σημασία του νόμου του Darcy

- Με τη ροή ενός υγρού σε ένα πορώδες προκαλούνται διάφορες τριβές, τόσο στο ιξώδες, όσο και στις προσκρούσεις των μορίων του υγρού με τα εσωτερικά τοιχώματα του μέσου
- Υποβάθμιση ενέργειας → απώλεια φορτίου
- Νόμος Darcy: η απώλεια του υδραυλικού φορτίου εξαρτάται από την ταχύτητα της ροής διήθησης

Η ταχύτητα V κατά Darcy δεν είναι η πραγματική ταχύτητα ροής και αυτό γιατί:

- Ο τύπος του Darcy θεωρεί «ενεργή» όλη την επιφάνεια της διατομής E , δηλ. θεωρεί ότι το υγρό καταλαμβάνει όλη την επιφάνεια και ρέει σε κάθε σημείο της
- Αυτό δημιουργεί μια πλασματική ταχύτητα γιατί η διατομή E καταλαμβάνεται σε μεγάλο τμήμα από τη στερεά φάση

α) η διατομή E εξ ολοκλήρου «ενεργή» σύμφωνα με τον Darcy

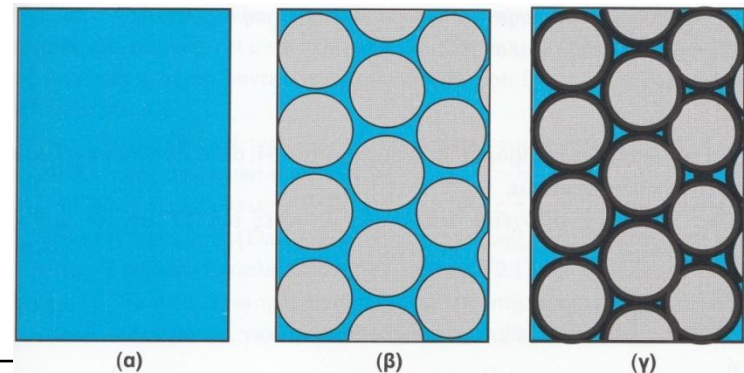
β) τη διατομή με την παρεμβολή της στερεάς φάσης

γ) τη διατομή με την παρεμβολή του νερού κατακράτησης

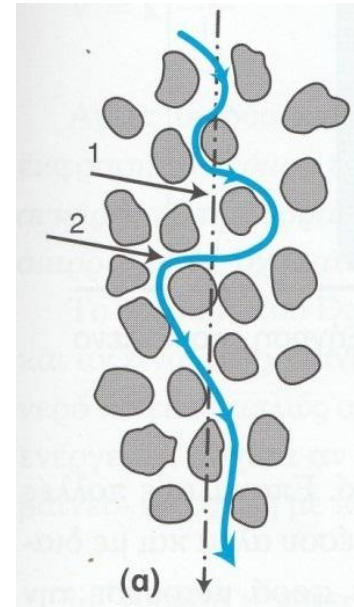
Ενεργή διατομή: $E_e = E m_e$

Φαινόμενη πραγματική ταχύτητα:

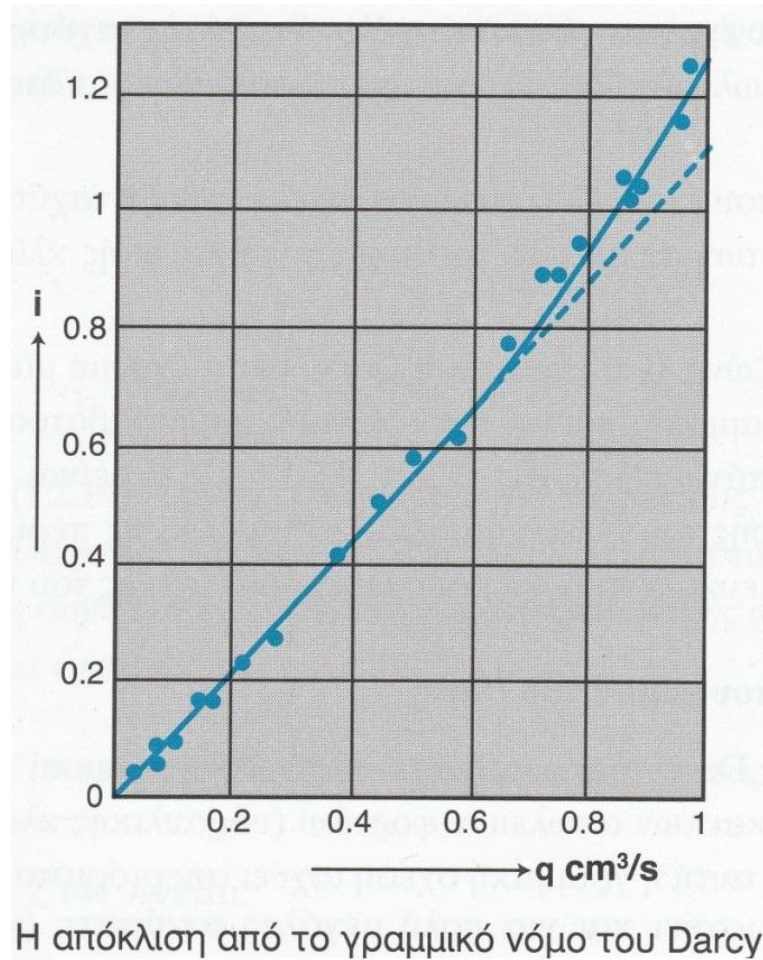
$$V_e = \frac{V}{m_e}$$

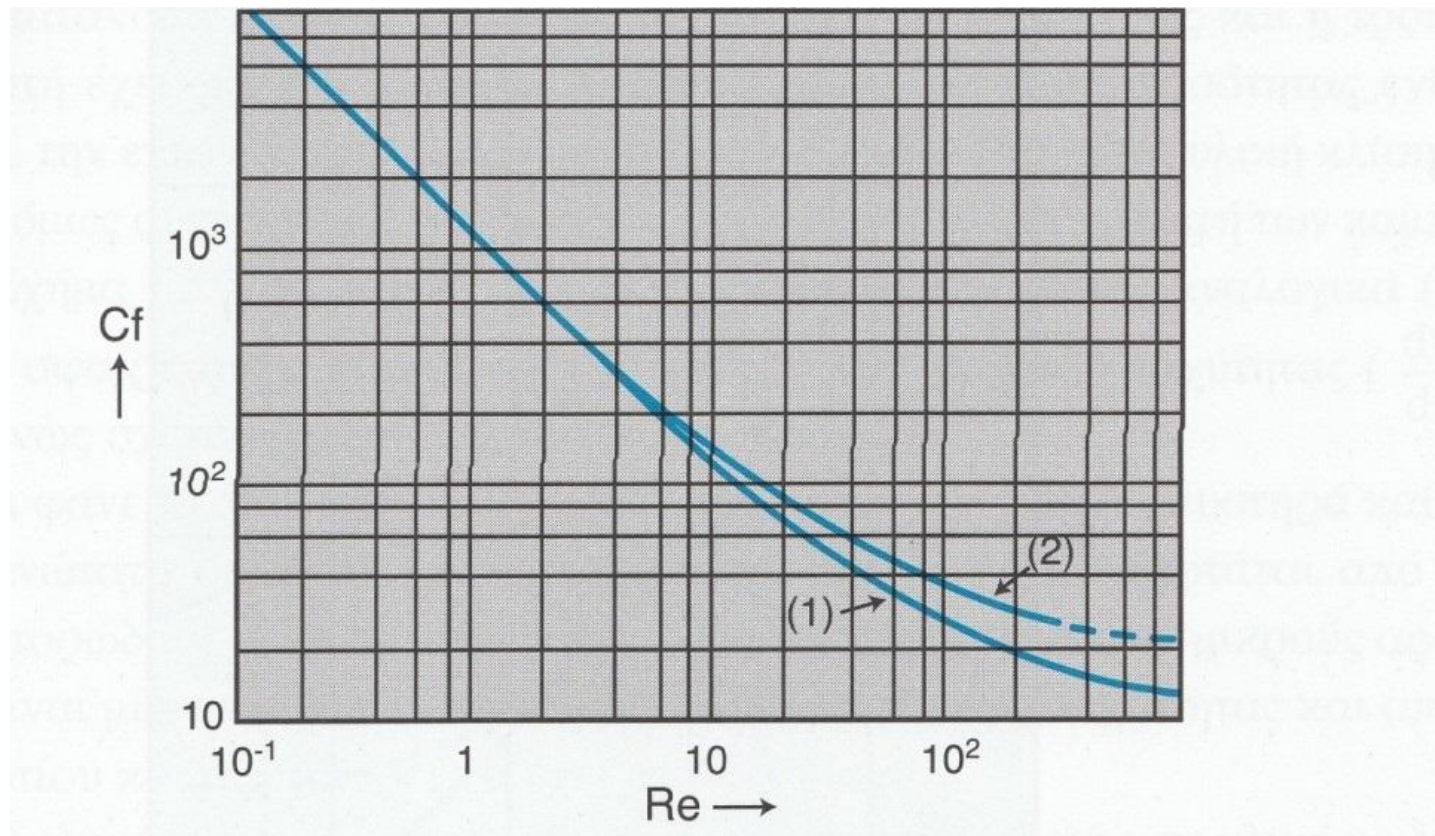


- Επίσης θεωρεί ότι το υγρό μόριο διαγράφει τη θεωρητική τροχιά. Όμως η πραγματική τροχιά του μορίου είναι πολυσύνθετη.
- Φαίνεται λοιπόν ότι τα διάφορα μόρια έχουν διαφορετική ταχύτητα και ανομοιόμορφη ροή
- Είναι λοιπόν αδύνατον να υπολογισθεί η πραγματική ταχύτητα ενός υγρού σε ένα πορώδες μέσο
- Γι' αυτό χρησιμοποιείται η ταχύτητα κατά Darcy που υποθέτει ότι όλη η θεωρούμενη διατομή είναι «ενεργή» και ακολουθεί θεωρητικές τροχιές



Όρια ισχύος του νόμου του Darcy





Η απόκλιση από το νόμο του Darcy: (1) πορώδες μέσο από σφαιρικούς κόκκους, (2) πορώδες μέσο από γωνιώδεις κόκκους.

Αίτια μη ισχύος του νόμου του Darcy:

- Στροβιλότητα
- Δυνάμεις αδράνειας
- Δυνάμεις τριβής

Γενίκευση του νόμου του Darcy

- **Υδραυλικό φορτίο:** η ολική μηχανική ενέργεια της μονάδας βάρους ενός υγρού
- Εξαρτάται από τη θέση του θεωρούμενου σημείου σε δεδομένη στιγμή:

$$\Phi = f(x, y, z) \quad \text{πεδίο υδραυλικού φορτίου} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

- **Βαθμίδα φορτίου:** $\overline{\text{grad}} \Phi \equiv i$
- Ο νόμος του Darcy ισχύει για κάθε σημείο του υδροφόρου στρώματος και προς όλες τις διευθύνσεις

$$u = -k \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{ή} \quad u = -k \text{grad}_x \Phi$$

$$v = -k \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{ή} \quad v = -k \text{grad}_y \Phi$$

$$w = -k \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{ή} \quad w = -k \text{grad}_z \Phi$$

Γενικευμένη έκφραση
του νόμου του Darcy

$$\vec{V} = -k \overline{\text{grad}} \Phi$$

Παράδειγμα 1

- Στη συσκευή του Darcy τοποθετείται ένα μικρό αντιπροσωπευτικό δείγμα από ομοιόμορφη άμμο. Έτσι σχηματίζεται μια κολώνα μήκους $l=50\text{cm}$ και διαμέτρου $D=4,8\text{cm}$. Από την έξοδο της συσκευής συλλέγονται 48cm^3 σε χρόνο 3min . Κατά τη διάρκεια του πειράματος το υδραυλικό φορτίο είναι σταθερό και ίσο με $\Delta\Phi=15\text{cm}$. Ζητείται ο υπολογισμός του συντελεστή διαπερατότητας.

$$q = Ek \frac{\Delta\Phi}{l}$$

$$q = Ek \frac{\Delta\Phi}{l}$$

- Η παροχή q είναι ίση με: $q = \frac{48\text{cm}^3}{3\text{min}} = 16\text{cm}^3 / \text{min}$
- Το εμβαδόν της διατομής E είναι: $E = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 4.8^2}{4} = 18.1\text{cm}^2$
- Η υδραυλική κλίση είναι: $i = \frac{\Delta\Phi}{l} = \frac{15\text{cm}}{50\text{cm}} = 0.3$
- Από την εξίσωση $q = Ek \frac{\Delta\Phi}{l}$ υπολογίζουμε το k

$$q = Ek \frac{\Delta\Phi}{l} \Rightarrow k = \frac{q \cdot l}{E \cdot \Delta\Phi} = \frac{16}{18.1 \cdot 0.3} = 2.95\text{cm} / \text{min}$$

Παράδειγμα 2

- Δεξιά και αριστερά από ένα ανάχωμα υπάρχει νερό με στάθμη 1,5m και 1m. Το πάχος του αναχώματος είναι 4m και η διαπερατότητα του υλικού είναι $k=1.5 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$. Ζητείται να βρεθεί η ανά μέτρο μήκους του αναχώματος παροχή μέσα από το ανάχωμα.

- Η ανά μονάδα επιφάνειας παροχή είναι:

$$\frac{q}{E} = k \frac{\Delta\Phi}{l} = 1.5 \cdot 10^{-4} (\text{m/s}) \frac{(1.5-1)m}{4m} = 0.1875 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$