Πίνακες Karnaugh

Οι **Πίνακες Karnaugh** είναι ένας τρόπος αναπαράστασης των λογικών συναρτήσεων. Η μέθοδος απλοποίησης λογικών συναρτήσεων με **Πίνακα Karnaugh (ΠΚ),** σε αντίθεση με την άλγεβρα Boole δίνει γρήγορα την απλούστερη μορφή των λογικών συναρτήσεων, ειδικά όταν η συνάρτηση έχει μέχρι 6 μεταβλητές.
Ο ΠΚ είναι ισοδύναμος σε πληροφορία με τον πίνακα αληθείας της λογικής συνάρτησης. Ωστόσο, είναι ευκολότερο να κάνουμε απλοποιήσεις πάνω στην κανονική μορφή της λογικής συνάρτησης μέσω του ΠΚ, παρά μέσω του πίνακα αληθείας της.

Ο ΠΚ αποτελείται από τετράγωνα, ένα για κάθε όρο της συνάρτησης, επομένως το πλήθος τους δίνεται από τη σχέση: πλήθος = 2n, όπου n το πλήθος των μεταβλητών της συνάρτησης. Ο Πίνακας Karrnaugh είναι ένας πίνακας όπου το κάθε τετράγωνο αναπαριστά ένα συνδυασμό των μεταβλητών, δηλαδή κάθε τετράγωνο ενός Πίνακα Karnaugh αντιστοιχεί σε έναν όρο της λογικής συνάρτησης που αναπαριστά.

A\BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

Πίνακας KARNAUGH τριών εισόδων

AB\CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	12	11

Πίνακας KARNAUGH τεσσάρων εισόδων

Η αναπαράσταση μίας λογικής συνάρτησης με Πίνακα Karnaugh γίνεται θέτοντας "1" σε κάθε τετράγωνο του Πίνακα Karnaugh που αντιστοιχεί σε όρο που η συνάρτηση έχει τιμή 1 και θέτοντας "0" (ή τίποτα) σε κάθε τετράγωνο του Πίνακα Karnaugh που αντιστοιχεί σε όρο που η συνάρτηση έχει τιμή 0.

A\BC	00	01	11	10
0	(0) **0**	(1) **1**	(3) **1**	(2) **1**
1	(4) **0**	(5) **0**	(7) **1**	(6) **0**

Πίνακας KARNAUGH για την συνάρτηση **F =A'B'C + A'BC + A'BC'+ ABC**

Σε πολλές περιπτώσεις, μερικοί συνδυασμοί των μεταβλητών εισόδου δεν έχουν νόημα και δεν πρόκειται να συμβούν. Αυτοί οι συνδυασμοί καλούνται αδιάφορες συνθήκες γιατί δεν ενδιαφέρει η τιμή της συνάρτησης για τους συνδυασμούς αυτούς. Στον πίνακα αληθείας και στο Πίνακα Karnaugh μίας τέτοιας συνάρτησης οι τιμές της συνάρτησης στις **αδιάφορες συνθήκες** συμβολίζονται με Χ.

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΛΟΓΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΠΙΝΑΚΑ KARNAUGH

Η διαδικασία για την απλοποίηση μιας λογικής συνάρτησης εκτελείται με τα εξής βήματα.
Α). Μετατρέπουμε τη λογική συνάρτηση σε κανονική μορφή. Δηλαδή σε μορφή αθροίσματος γινομένων (ελαχιστόρων) ή σε μορφή γινομένου αθροισμάτων (μεγιστόρων). Αν δηλαδή η αρχική λογική συνάρτηση δεν είναι σε τέτοια μορφή, θα πρέπει να τη μετατρέψουμε, προσθέτοντας σε κάθε όρο (για τη μορφή ελαχιστόρων) ή πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο (για τη μορφή μεγιστόρων) με τη μεταβλητή που λείπει.
Π.χ. αν λείπει η μεταβλητή Χ από την έκφραση της λογικής συνάρτησης και η λογική συνάρτηση είναι εκφρασμένη ως άθροισμα γινομένων, τότε πρέπει να προσθέσουμε σε κάθε όρο της συνάρτησης αυτής το $X \cdot X'$. Αν η μορφή της λογικής συνάρτησης είναι εκφρασμένη ως γινόμενο αθροισμάτων, τότε θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο της με το $(X+X')$.

Β) Υπολογίζουμε το πλήθος των τετραγώνων του ΠΚ από τη σχέση πλήθος = 2n, όπου n το πλήθος των μεταβλητών της συνάρτησης. Για n = 2, 3, 4, 5 και 6, θα χρειαστούμε αντίστοιχα 4, 8, 16, 32 και 64 τετράγωνα αντίστοιχα. Καθένα από τα τετράγωνα έχει «συντεταγμένες», όπως φαίνονται στη συνέχεια.
Κάθε συνδυασμός των μεταβλητών αντιστοιχεί σε ένα τετράγωνο του ΠΚ.

Γ) Τοποθετούμε την προς απλοποίηση συνάρτηση στον ΠΚ ως εξής: Βάζουμε ένα (1) στο αντίστοιχο τετράγωνο αν η λογική συνάρτηση είναι εκφρασμένη ως άθροισμα γινομένων ή ένα (0) αν είναι εκφρασμένη ως γινόμενο αθροισμάτων. Τυχόν αδιάφορους όρους τους σημειώνουμε με Χ ή d.

Δ) Μετά τη συμπλήρωση του ΠΚ και ανάλογα με τη λογική που θα χρησιμοποιήσουμε στην κατασκευή του λογικού κυκλώματος, σχηματίζουμε ομάδες γειτονικών διαδοχικών τετραγώνων, σχήματος ορθογωνίου, τετραγώνου ή «κύβου», με μονάδες ή μηδενικά, ακολουθώντας τους παρακάτω κανόνες:

1. Να ληφθούν υπόψη όλες οι μονάδες ή όλα τα μηδενικά.
2. Το πλήθος των μονάδων ή μηδενικών των ομάδων αν υπακούει στη σχέση m=2k, όπου k=0,1,2,3,4,5,... .

3. Οι ομάδες να είναι όσο το δυνατό λιγότερες και ταυτόχρονα όσο το δυνατό μεγαλύτερου πλήθους τετραγώνων.
4. Οι αδιάφοροι όροι χρησιμοποιούνται είτε ως μονάδες είτε ως μηδενικά ανάλογα με την έκφραση της αρχικής λογικής συνάρτησης.
5. Κάθε μονάδα ή μηδενικό ή αδιάφορος όρος χρησιμοποιείται όσες φορές χρειάζεται στις ομάδες ώστε να πετύχουμε τη μεγαλύτερη και καλύτερη απλοποίηση.

A\BC	00	01	11	10
0	(0) 0	(1) 1	(3) 1	(2) 1
1	(4) 0	(5) 0	(7) 1	(6) 0

A' C

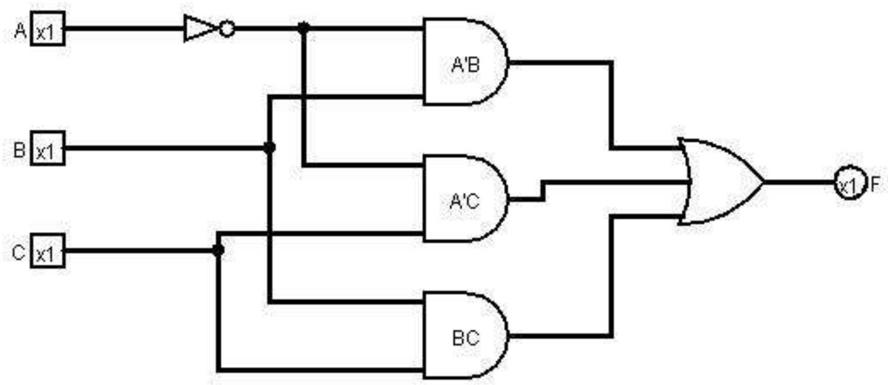
A' B

B C

6. Από τις ομάδες που σχηματίσαμε εξάγουμε την απλοποιημένη λογική συνάρτηση που είναι και η τελική έκφραση της αρχικής λογικής συνάρτησης.

F = A'C + A'B +BC

Ε) Το τελευταίο βήμα είναι να σχεδιάσουμε το κύκλωμα της απλοποιημένης λογικής συνάρτησης. Αν είναι εκφρασμένη ως άθροισμα γινομένων το κύκλωμα σχεδιάζεται με λογική σχεδίασης AND-OR ή NAND. Αν είναι εκφρασμένη ως γινόμενο αθροισμάτων, το κύκλωμα σχεδιάζεται με λογική σχεδίασης OR-AND ή NOR.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας σχεδιάσουμε ένα ψηφιακό κύκλωμα που αντιστοιχεί στον παρακάτω πίνακα αληθείας. Αφού βρούμε τη λογική συνάρτηση, θα την απλοποιήσουμε όσο γίνεται και θα σχεδιάσουμε το αντίστοιχο κύκλωμα χρησιμοποιώντας πύλες AND, OR (δύο εισόδων) και NOT.

	A	B	C	D	**F**
0	0	0		0	**1**
1	0	0	0	1	**1**
2	0	0	1	0	**0**
3	0	0	1	1	**0**
4	0	1	0	0	**1**
5	0	1	0	1	**1**
6	0	1	1	0	**1**
7	0	1	1	1	**0**
8	1	0	0	0	**1**
9	1	0	0	1	**1**
10	1	0	1	0	**0**
11	1	0	1	1	**1**
12	1	1	0	0	**1**
13	1	1	0	1	**1**
14	1	1	1	0	**0**
15	1	1	1	1	**0**

Γράφουμε την Συνάρτηση σε κανονική μορφή Αθροίσματος Γινομένων

F(A,B,C,D) = A’B’C’D’ + A’B’C’D + A’B’CD + A’BC’D’ + A’BC’D + AB’C’D’ +
AB’C’D + AB’CD + ABC’D’ + ABC’D

Δημιουργούμε ένα πίνακα Karnaugh τεσσάρων μεταβλητών και βάζουμε 1 στα τετράγωνα που αντιστοιχούν στους ελαχιστορους της συνάρτησης F

AB\CD	00	01	11	10
00	(0) 1	(1) 1	(3) 0	(2) 0
01	(4) 1	(5) 1	(7) 0	(6) 1
11	(12) 1	(13) 1	(15) 0	(14) 0
10	(8) 1	(9) 1	(11) 1	(10) 0

C’

A’BD’

AB’D

Βρίσκουμε όσο γίνεται μεγαλύτερες ομάδες γειτονικών τετραγώνων με τιμή 1 και κρατάμε τις εισόδους που έχουν την ίδια τιμή σε όλα τα τετράγωνα της ομάδας. Η τελική απλοποιημένη συνάρτηση είναι :

F (A,B,C,D) = C’ + A’BD’ + AB’D

Το κύκλωμα με λογικές πύλες AND, OR δύο εισόδων και NOT που αντιστοιχεί στην παραπάνω απλοποιημένη συνάρτηση είναι: