ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ, ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2019-20

ΜΑΘΗΜΑ: **ΦΥΣΙΚΗ** (Εξαμ. 1ο)

Τετάρτη, 12 Φεβρουαρίου 2020

Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης - kphilippides@uowm.gr

Θέμα 1ο **Βαρύτητα – Gauss – Απλή αρμονική ταλάντωση**

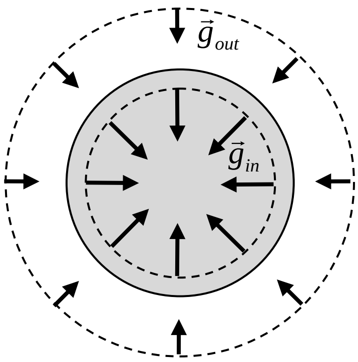
Βρισκόμαστε σε πλανήτη και μετράμε την ακτίνα του R=9,000·10^6 m και την ένταση του βαρυτικού πεδίου στην επιφάνειά του $g(R)=g$=9,8696 N/kg, Να δείξετε ότι αν αφήσουμε μια μάζα m στο χείλος μιας σήραγγας που διαπερνά τον πλανήτη από ένα σημείο της επιφάνειάς του σε ένα άλλο, αυτή θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. Να υπολογίσετε το χρόνο που χρειάζεται για να φτάσει από την αρχή στο τέλος της σήραγγας. Θεωρήστε τον πλανήτη ως ομογενή σφαίρα που δεν περιστρέφεται.

Λύση

Για να κάνει μια μάζα απλή αρμονική ταλάντωση θα πρέπει η συνισταμένη δύναμη που της ασκείται (εδώ μόνο η βαρύτητα) να έχει τη μορφή δύναμης επαναφοράς $F_{ολ} = -Dx$. Η βαρυτική δύναμη ως δύναμη πεδίου δίνεται από τον τύπο $F_g = mg$. Άρα πρέπει να υπολογίσουμε την ένταση του πεδίου βαρύτητας στο εσωτερικό σφαιρικής κατανομής μάζας (πλανήτης). Για να το κάνουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Gauss :

$$\boxed{\int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \cdot M_{εσωκλ}}$$

όπου M η μάζα που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια S. Για μια σφαιρική ομοιόμορφη κατανομή μάζας η ένταση του πεδίου, λόγω της σφαιρικής συμμετρίας θα είναι ακτινική με φορά προς το κέντρο της σφαιρικής κατανομής και το μέτρο της θα εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το κέντρο : $\vec{g}(r) = -g(r)\hat{r}$

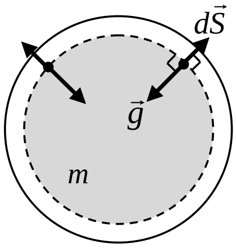


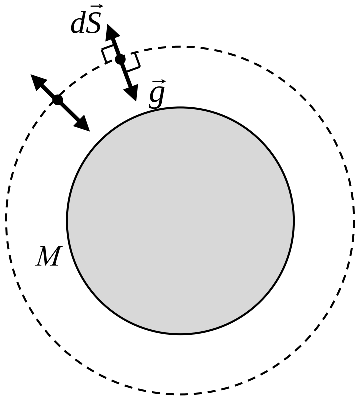
Για να βρούμε την εξάρτηση του g από την r εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss σε μια εξωτερική σφαιρική επιφάνεια S_{out} με $r > R$ και σε μια εσωτερική σφαιρική επιφάνεια S_{in} με $r < R$. Η συνολική μάζα της σφαιρικής κατανομής είναι $M = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^2$. Η μάζα που περικλείεται από μια εξωτερική σφαίρα S_{out} ακτίνας $r > R$ είναι επίσης M. Σε μια εσωτερική σφαίρα ακτίνας $r < R$ περικλείεται μάζα $m = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = M \frac{r^3}{R^3}$.

Από τη σφαιρική συμμετρία του προβλήματος : $\vec{g}(r) \cdot d\vec{S} = -g(r) dS \hat{r} \cdot \hat{r} = -g(r) dS$ Οπότε από το νόμο του Gauss στις δυο σφαιρικές επιφάνειες S_{out} και S_{in} παίρνουμε :

$$\int_{S_{out}} \vec{g}(r) \cdot d\vec{S} = -4\pi G \cdot M_{περικλ} \Rightarrow -\int_{S_{out}} g(r) dS = -4\pi G \cdot M \Rightarrow$$

$$g(r) \int_{S_{out}} dS = 4\pi G \cdot M \Rightarrow g(r) 4\pi r^2 = 4\pi G \cdot M \Rightarrow \qquad \boxed{g(r) = G\frac{M}{r^2} \quad \text{για } r > R}$$





$$\int_{S_{in}} \vec{g}(r)\cdot d\vec{S} = -4\pi G\cdot M_{\pi\varepsilon\rho\iota\kappa\lambda} \Rightarrow -\int_{S_{in}} g(r)dS = -4\pi G\cdot m \Rightarrow$$

$$g(r)\int_{S_{out}} dS = 4\pi G\cdot M\,\frac{r^3}{R^3} \Rightarrow g(r)4\pi r^2 = 4\pi G\cdot M\,\frac{r^3}{R^3} \Rightarrow \qquad \boxed{g(r) = G\frac{M}{R^3}\cdot r \quad \text{για } r<R}$$

Ελέγχουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $r = R$. Πράγματι

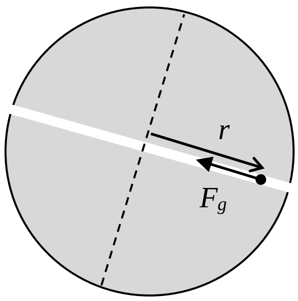
$$g_{out}(R) = g_{in}(R) \Rightarrow G\frac{M}{R^2} = G\frac{M}{R^3}R \Rightarrow g_{out}(R) = g_{in}(R) = g(R) = g = G\frac{M}{R^2}$$

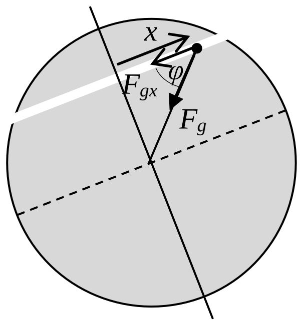
Άρα πράγματι η βαρυτική δύναμη στο εσωτερικό του πλανήτη έχει τη μορφή δύναμης επαναφοράς

$$F_g = mg(r) = -mG\frac{M}{R^3}\cdot r = -m\frac{GM/R^2}{R}\cdot r = -\frac{mg}{R}\cdot r \Rightarrow \boxed{F_g = -\frac{mg}{R}\cdot r}$$

Με σταθερά επαναφοράς $D = \dfrac{mg}{R}$

όπου στον παραπάνω τύπο συμπεριλάβαμε και τη φορά της στην κατεύθυνση μειούμενου *r*.





Έτσι, ένα σώμα μάζας *m*, που αφήνεται στο χείλος μιας σήραγγας που διαπερνά τον πλανήτη από το κέντρο του, θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα :

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{Rm}} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}}$$

και περίοδο :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\cdot 3{,}1416\cdot\sqrt{\frac{9\cdot 10^6}{9{,}8696}} = 2\cdot 3{,}1416\,\frac{3\cdot 10^3}{3{,}1416} = 6000\ \text{s} \Rightarrow T = 6.000\ \text{s} = 100\ \text{min} = 1\text{h}\ 40\text{min}$$

Η απάντηση στρογγυλοποιείται σε τόσα σημαντικά ψηφία όσα του δεδομένου με τα λιγότερα σημαντικά ψηφία (4).

Ακόμα και αν η σήραγγα δεν περνάει από το κέντρο του πλανήτη, το σώμα πάλι θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με την ίδια κυκλική συχνότητα γιατί η δύναμη κατά μήκος της σήραγγας θα είναι :

$$F_{gx} = F_g\cos\varphi = F_g\,\frac{x}{r} = -\frac{mg}{R}r\,\frac{x}{r} \Rightarrow F_{gx} = -\frac{mg}{R}x$$

Έτσι το χρονικό διάστημα για να πάμε από την μια άκρη της σήραγγας στην άλλη, όποια σημεία του πλανήτη και αν συνδέει αυτή, θα είναι

$$\boxed{t = \frac{T}{2} = 3.000\ \text{s} = 50\text{min}}$$

Θέμα 2º **Coulomb – Διατήρηση ορμής και ενέργειας – ελαστική κρούση**

Σωματίδιο 1, με μάζα $m_1 = 4,00\ \text{mg}$ και ηλεκτρικό φορτίο $q_1 = 3,00\ \mu\text{C}$ επιταχύνεται από την ηρεμία για *Δx*= 45 cm από ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης *E* = 1200 kV/m. Στη συνέχεια κατευθύνεται κεντρικά προς ακίνητο σωματίδιο 2, μάζας $m_2 = 6,00\ \text{mg}$ και ηλεκτρικού φορτίου $q_2 = 4,50\ \mu\text{C}$.

Α) Με τι ταχύτητα υ_0 εξέρχεται το σωματίδιο 1 από το ηλεκτρικό πεδίο?

Β) Ποιες είναι οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων στη θέση πλησιέστερης προσέγγισης ?

Γ) Να δείξετε ότι η απόσταση πλησιέστερης προσέγγισης είναι ίση με $r_{\min} = \dfrac{q_1 q_2}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\mu\upsilon_0^2}$ όπου $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ η ανηγμένη μάζα των δύο σωμάτων και να υπολογίσετε την απόσταση πλησιέστερης προσέγγισης.

Δ) Ποιες είναι οι ταχύτητες των σωματιδίων μετά το τέλος της αλληλεπίδρασής τους?

Ε) Δείξτε ότι στην ελαστική κρούση το κλάσμα της κινητικής ενέργειας του βλήματος m_1 που μεταφέρεται στον ακίνητο στόχο m_2 είναι $\dfrac{|\Delta K_1|}{K_1} = \dfrac{4\mu}{M}$ όπου $M = m_1 + m_2$ η ολική μάζα των δύο σωμάτων. Τι κλάσμα της κινητικής του ενέργειας μετέφερε το σωματίδιο 1 στο 2. Τι ποσοστό της κινητικής ενέργειας θα μεταφέρονταν αν οι μάζες ήταν ίσες.

Δίνεται η σταθερά του νόμου Coulomb $1/4\pi\varepsilon_0 = 9,00 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$

Λύση Α) Από διατήρηση ενέργειας στο ηλεκτροστατικό πεδίο :

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow 0 + q_1 V_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_0^2 + q_1 V_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$\upsilon_0 = \sqrt{\frac{2q_1(V_{\alpha\rho\chi} - V_{\tau\varepsilon\lambda})}{m_1}} = \sqrt{\frac{2q_1 E\Delta x}{m_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot 10^5 \cdot 45 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-6}}} \Rightarrow \boxed{\upsilon_0 = 9,00 \cdot 10^2\ \text{m/s}}$$

επειδή για ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο $E = -\dfrac{dV}{dx} = -\dfrac{\Delta V}{\Delta x} \Rightarrow \Delta V = -E\Delta x$

ή από θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας

$$\Delta K = \Delta W \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = F_{el}\Delta x \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 \upsilon_0^2 - 0 = q_1 E\Delta x \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\frac{2q_1 E\Delta x}{m_1}}$$

Β) Πλησιάζοντας, το σωματίδιο 1 επιβραδύνεται ενώ το σωματίδιο 2 επιταχύνεται λόγω των αντίθετων απωστικών ηλεκτροστατικών δυνάμεων Coulomb που ασκούν μεταξύ τους (δράση - αντίδραση). Κάθε στιγμή η ολική ορμή του συστήματος διατηρείται άρα και η ταχύτητα του κέντρου μάζας. Στη θέση πλησιέστερης προσέγγισης (CA=closest approach), οι ταχύτητες των σωματιδίων έχουν εξισωθεί και είναι ίσες με την ταχύτητα του κέντρου μάζας τους.

$$p = p_{\text{CA}} = p' \Rightarrow p_1 = p_{1\,\text{CA}} + p_{2\,\text{CA}} = p_1' + p_2'$$

Επίσης διατηρείται η ενέργεια, επειδή η ηλεκτροστατική δύναμη Coulomb είναι συντηρητική δύναμη και άρα η αλληλεπίδραση («κρούση») είναι ελαστική. Η ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια είναι ίση με μηδέν τόσο αρχικά όσο και τελικά όπου τα σωματίδια είναι τόσο πολύ απομακρυσμένα που δεν αλληλεπιδρούν πλέον ($F \propto 1/r^2 \to 0$ για $r \to \pm\infty$). Σε ενδιάμεσες θέσεις (περιοχή αλληλεπίδρασης) μέρος της κινητικής ενέργειες μετατρέπεται σε δυναμική και στη συνέχεια επιστρέφεται πάλι από δυναμική σε κινητική.

$$E_0 \equiv E(-\infty) = E(r) = E(\infty) \equiv E_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow K_1 = K_1(r) + K_2(r) + U_{el}(r) = K_1' + K_2'$$

Διατήρηση ορμής αρχικά και στην απόσταση πλησιέστερης προσέγγισης :

$$p = p_{\text{CA}} \Rightarrow p_1 = p_{1\,\text{CA}} + p_{2\,\text{CA}} \Rightarrow m_1\upsilon_0 = m_1 V + m_2 V \Rightarrow \boxed{V = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_0}$$

$$V=\frac{4\cdot10^{-6}}{4\cdot10^{-6}+6\cdot10^{-6}}9\cdot10^{2}\Rightarrow\boxed{V=3{,}60\cdot10^{2}\ \text{ m/s}}$$

Γ) Διατήρηση ενέργειας αρχικά και στην απόσταση πλησιέστερης προσέγγισης:

$$E_0=E_{\text{CA}}\Rightarrow K_1=K_{1\,\text{CA}}+K_{2\,\text{CA}}+U_{el\ \text{CA}}\Rightarrow\frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2=\frac{1}{2}m_1V^2+\frac{1}{2}m_2V^2+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{\min}}\Rightarrow$$

$$m_1\upsilon_0^2=\left(m_1+m_2\right)V^2+\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{\min}}\Rightarrow m_1\upsilon_0^2-\left(m_1+m_2\right)\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\upsilon_0^2=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{\min}}\Rightarrow$$

$$m_1\upsilon_0^2\left(1-\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{\min}}\Rightarrow m_1\upsilon_0^2\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{\min}}\Rightarrow$$

$$\boxed{r_{\min}=\frac{q_1q_2}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\right)\frac{1}{\upsilon_0^2}=\frac{q_1q_2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\mu\upsilon_0^2}}$$

$$r_{\min}=2\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\right)\frac{1}{\upsilon_0^2}=2\cdot9\cdot10^{9}\cdot3\cdot10^{-6}\cdot4{,}5\cdot10^{-6}\frac{4\cdot10^{-6}+6\cdot10^{-6}}{4\cdot10^{-6}\cdot6\cdot10^{-6}}\frac{1}{9^2\cdot10^4}=$$

$$=\frac{2\cdot9\cdot3\cdot4{,}5\cdot10}{4\cdot6\cdot9^2}10^{9-6-6-6+12-4}=\frac{10}{8}\cdot10^{-1}\Rightarrow$$

$$\boxed{r_{\min}=0{,}125\ \text{m}}$$

Ή θυμόμαστε ότι για ένα σύστημα δύο σωματιδίων η κινητική ενέργεια είναι ίση με την κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας συν την κινητική ενέργεια της σχετικής κίνησης των δύο σωμάτων:

$K\equiv K_1+K_2=K_{CM}+K_{rel}$ όπου $K_{rel}=\frac{1}{2}\mu\upsilon_{rel}^2$ με $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ την ανηγμένη μάζα των δυο σωμάτων και $\vec{\upsilon}_{rel}=\vec{\upsilon}_1-\vec{\upsilon}_2$ τη σχετική τους ταχύτητα. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας δεν αλλάζει αφού δεν επιδρούν στο σύστημα εξωτερικές δυνάμεις. Έτσι μόνο η σχετική κινητική ενέργεια μετασχηματίζεται σε δυναμική κατά την αλληλεπίδραση. Στη θέση πλησιέστερης προσέγγισης τα δύο σώματα κινούνται με την ίδια ταχύτητα άρα η σχετική τους ταχύτητα είναι μηδέν. Όλη η σχετική κινητική ενέργεια έχει γίνει δυναμική. Μετά την κρούση όταν η δυναμική ενέργεια μηδενίζεται η σχετική κινητική ενέργεια ξαναπαίρνει την αρχική της τιμή όπως πρέπει να συμβαίνει στην ελαστική κρούση όπου η σχετική ταχύτητα απλώς αλλάζει πρόσημο πριν και μετά την κρούση :

$$\vec{\upsilon}_1+\vec{\upsilon}_1'=\vec{\upsilon}_2+\vec{\upsilon}_2'\Rightarrow\vec{\upsilon}_1-\vec{\upsilon}_2=-(\vec{\upsilon}_1'-\vec{\upsilon}_2')\Rightarrow\vec{\upsilon}_{rel}=-\vec{\upsilon}_{rel}'$$

Η αρχική σχετική ταχύτητα των δυο σωμάτων είναι : $\upsilon_{rel}=\upsilon_1-\upsilon_2=\upsilon_0-0$

Οπότε από τη διατήρηση της ενέργειας παίρνουμε :

$$E_0=E_{\text{CA}}\Rightarrow K_{CM\ 0}+K_{rel\ 0}+U_{el\ 0}=K_{CM\ \text{CA}}+K_{rel\ \text{CA}}+U_{el\ \text{CA}}\Rightarrow K_{CM}+\frac{1}{2}\mu\upsilon_0^2+0=K_{CM}+0+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{\min}}\Rightarrow$$

$$r_{\min}=\frac{q_1q_2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\mu\upsilon_0^2}$$

Δ) Από διατήρηση ορμής και κινητικής ενέργειας, οι τελικές ταχύτητες θα δίνονται από τους τύπους της ελαστικής κρούσης σε ακίνητο στόχο , $\upsilon_2=0$.

$$\upsilon_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_0\Rightarrow\upsilon_1'=\frac{4-6}{4+6}\cdot9\cdot10^2=-\frac{2}{10}\cdot9\cdot10^2\Rightarrow\boxed{\upsilon_1'=-1{,}80\cdot10^2\ \text{ m/s}}$$

$$\upsilon_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_0\Rightarrow\upsilon_1'=\frac{2\cdot4}{4+6}\cdot9\cdot10^4=\frac{8}{10}\cdot9\cdot10^4\Rightarrow\boxed{\upsilon_2'=7{,}20\cdot10^2\ \text{ m/s}}$$

Ε) $\dfrac{\left|\Delta K_1\right|}{K_1}=\left|\dfrac{\upsilon_1'^2}{\upsilon_1^2}-1\right|=1-\left(\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2=\ldots=\dfrac{2m_1\cdot2m_2}{(m_1+m_2)^2}=\dfrac{4\mu}{M}$

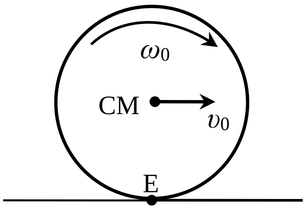
$\mu = \dfrac{4\cdot 6}{4+6} = 2,4\ \mathrm{mg}$, $M = 4+6 = 10\ \mathrm{mg}$, $\dfrac{|\Delta K_1|}{K_1} = \dfrac{4\cdot 2,4}{10} = 0,96 = 96\%$

Όταν $m_1 = m_2 = m,\quad M = 2m,\quad \mu = \dfrac{m\cdot m}{m+m} = \dfrac{m}{2},\qquad \dfrac{|\Delta K_1|}{K_1} = \dfrac{4\,m/2}{2m} = 1 = 100\%$

Οι απαντήσεις σε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις πρέπει να δίνονται σε τόσα σημαντικά ψηφία όσα του δεδομένου με τα λιγότερα σημαντικά ψηφία (εδώ όλα τα δεδομένα δίνονται με ακρίβεια 3 σημαντικών ψηφίων).

Θέμα 3ο **Μετάβαση από ολίσθηση σε κύλιση**

Σωλήνας μάζας m= 20,0 kg και ακτίνας R=0,400 m πέφτει από κινούμενο όχημα και ξεκινά να κινείται στο οδόστρωμα έχοντας αποκτήσει τόσο μεταφορική ταχύτητα υ_0=10,0 m/s όσο και γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω_0=50,0 rad/s όπως στο σχήμα. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης με το οδόστρωμα είναι μ_k =0,250. Θεωρήστε το σωλήνα ως κυλινδρική στεφάνη με ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας του ίση με $I = \kappa m R^2$ όπου κ=1.



Α) Να υπολογίσετε την αρχική στροφορμή του σωλήνα ως προς το σημείο επαφής Ε με το δάπεδο και ως προς το κέντρο μάζας CM.
Β) Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε τις δυνάμεις που δρουν στο σωλήνα πριν επιτευχθεί κύλιση.
Γ) Να βρείτε την ταχύτητα κύλισης υ_r του σωλήνα όταν επιτευχθεί κύλιση.
Δ) Να υπολογίσετε τη γραμμική a και γωνιακή α επιτάχυνση του σωλήνα πριν επιτευχθεί κύλιση.
Ε) Τι χρονικό διάστημα t_r θα χρειαστεί για να επέλθει κύλιση.
ΣΤ) Πόσο διάστημα θα έχει διανύσει μέχρι τότε ο σωλήνας και πόσες περιστροφές θα έχει κάνει
Η) Να υπολογίσετε το έργο της τριβής ολίσθησης έως να επιτευχθεί κύλιση.
Θ) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις στο σωλήνα αφού επιτευχθεί κύλιση.

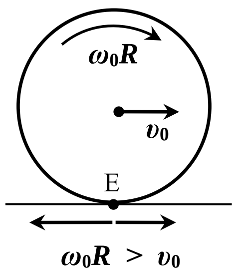
Λύση Α) Η στροφορμή για ένα σύστημα σωματιδίων είναι ίση με τη στροφορμή του κέντρου μάζας συν τη στροφορμή γύρω από το κέντρο μάζας. Έτσι έχουμε :

$$I = \kappa m R^2 = 1\cdot 20\cdot 0,4^2 = 3,2\ \mathrm{kg\cdot m^2}$$

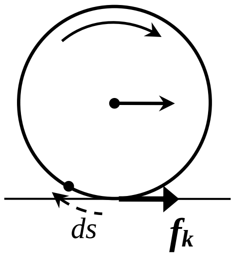
$$L_{(\mathrm{CM})} = I\omega_0 = 3,2\cdot 50 \Rightarrow L_{(\mathrm{CM})} = 160\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$$

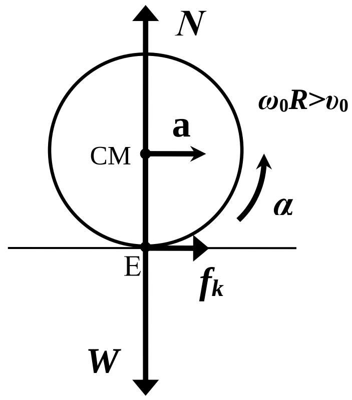
$$L_{(\mathrm{E})} = m\upsilon_0 R + I\omega_0 = 20\cdot 10\cdot 0,4 + 160 \Rightarrow L_{(\mathrm{E})} = 240\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$$

Β) Επειδή η συνθήκη κύλισης δεν ικανοποιείται $\upsilon_0 = 10 < 50\cdot 0,4 = 20 = \omega_0 R$, το σώμα θα ολισθαίνει πάνω στο δάπεδο ενώ κάνει ταυτόχρονα περιστροφική και μεταφορική κίνηση. Δηλαδή το σημείο επαφής θα σύρεται πάνω στο δάπεδο, δεν θα είναι στιγμιαία ακίνητο.



Το σημείο επαφής Ε δεν παραμένει στιγμιαία ακίνητο αλλά σε χρόνο dt ολισθαίνει προς τα πίσω, διάστημα
$ds = dx - Rd\theta$
$\quad = \upsilon_0 dt - R\,\omega_0 dt$
επειδή η ταχύτητα από περιστροφή είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα μεταφοράς. Άρα εμφανίζεται τριβή ολίσθησης προς τα μπροστά





$W = mg = 20,0 \cdot 10,0 = 200$ N

y-ισορροπία: $\sum F_y = 0 \Rightarrow N = W \Rightarrow N = 200$ N

$f_k = \mu_k N = 0,250 \cdot 200 = 50,0$ N

Γ) Μπορούμε να βρούμε την τελική ταχύτητα κύλισης $\upsilon_r = \omega_r R$ πριν να λύσουμε τις εξισώσεις του Νεύτωνα. Αφού όλες οι δυνάμεις (B, N, f_k) διέρχονται από το σημείο επαφής Ε, δεν επάγουν ροπή γύρω από το σημείο Ε και έτσι η στροφορμή γύρω από το σημείο επαφής Ε θα παραμένει σταθερή:

$$L_{(\mathrm{E})} = L'_{(\mathrm{E})} \Rightarrow m\upsilon_0 R + I\omega_0 = m\upsilon_r R + I\omega_r \Rightarrow m\upsilon_0 R + \kappa m R^2 \omega_0 = m\upsilon_r R + \kappa m R^2\, \upsilon_r / R \Rightarrow$$

$$\upsilon_0 + \kappa R\omega_0 = \upsilon_r (1+\kappa) \Rightarrow \boxed{\upsilon_r = \frac{\upsilon_0 + \kappa R\omega_0}{1+\kappa}}$$

$$\upsilon_r = \frac{10 + 1 \cdot 0,4 \cdot 50}{1+1} = \frac{30}{2} \Rightarrow \boxed{\upsilon_r = 15,0\ \text{ m/s}}$$

$$\omega_r = \upsilon_r / R = 15,0/0,400 \Rightarrow \boxed{\omega_r = 37,5\ \text{ rad/s}}$$

Δ) Η τριβή ολίσθησης είναι η μόνη οριζόντια δύναμη που ασκείται στον κύλινδρο και το αποτέλεσμά της είναι να επιταχύνει την μεταφορική του κίνηση αυξάνοντας την ταχύτητα του κέντρου μάζας ($\upsilon_0 \uparrow$) ενώ ταυτόχρονα η ροπή της ως προς το κέντρο μάζας επιβραδύνει την περιστροφική του κίνηση μειώνοντας την γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου ($\omega_0 \downarrow$). Οι νόμοι του Νεύτωνα δίνουν :

$$\left.\begin{array}{ll} x\text{-μετακίνηση}: & f_k = ma \\ z\text{-περιστροφή}: & f_k R = I\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \mu_k mg = ma \\ \mu_k mgR = \kappa m R^2 \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = \mu_k g \\ \alpha = \dfrac{\mu_k g}{\kappa R} \end{array}$$

$$a = 0,250 \cdot 10,0 \Rightarrow \boxed{a = 2,50\ \text{ m/s}^2} \qquad \alpha = \frac{0,250}{1 \cdot 0,400} \Rightarrow \boxed{\alpha = 6,25\,\text{rad/s}}, \qquad \alpha R = 2,50\ \text{ m/s}^2$$

(Το ότι εδώ ισχύει $\alpha R = a$ αριθμητικά, οφείλεται στο κ=1 και δεν ισχύει γενικά.)

Ε) Επειδή η ροπή είναι σταθερή βρίσκουμε το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να επέλθει κύλιση από το νόμο του Νεύτωνα

$$\sum_{(\mathrm{CM})} \tau = \frac{dL_{(\mathrm{CM})}}{dt} \Rightarrow \tau_f = \frac{\Delta L_{(\mathrm{CM})}}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$t_r = \Delta t = \frac{L'_{(\mathrm{CM})} - L_{(\mathrm{CM})}}{-f_k R} = \frac{\kappa m R^2 (\omega_0 - \omega_r)}{\mu_k mgR} = \frac{\kappa R(\omega_0 - \omega_r)}{\mu_k g} = \frac{\kappa}{\mu_k g}\left(\frac{\upsilon_0 + \kappa R\omega_0}{1+\kappa} - \upsilon_0\right) \Rightarrow \boxed{t_r = \frac{\kappa}{1+\kappa}\ \frac{R\omega_0 - \upsilon_0}{\mu_k g}}$$

$$t_r = \frac{1}{1+1} \cdot \frac{20-10}{0,25 \cdot 10} \Rightarrow \boxed{t_r = 2\ \text{s}}$$

Θα μπορούσαμε να βρούμε το t_r και από καθεμιά από τις παρακάτω κινηματικές εξισώσεις :
$\upsilon_r = \upsilon_0 + at_r$, $\omega_r = \omega_0 - \alpha t_r$, $\upsilon_0 + at_r = R(\omega_0 - \alpha t_r)$

ΣΤ) Ο σωλήνας, πριν επιτευχθεί κύλιση, θα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ταυτόχρονα με ομαλά επιβραδυνόμενη περιστροφική κίνηση σύμφωνα με τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\upsilon = \upsilon_0 + at \qquad x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2ax$$

$$\omega = \omega_0 - \alpha t \qquad \theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - 2\alpha\theta$$

Πριν αρχίσει να κυλάει ο σωλήνας θα διανύσει απόσταση :

$$x_r = \upsilon_0 t_r + \frac{1}{2}at_r^2 = 10\cdot 2 + \frac{1}{2}2,5\cdot 2^2 \Rightarrow \boxed{x_r = 25\text{ m}}$$

και θα διαγράψει γωνία

$$\theta_r = \omega_0 t_t - \frac{1}{2}\alpha t_r^2 = 50\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 6,25\cdot 2^2 = 100 - 12,5 = 87,5\text{ rad}$$

Αυτό ισοδυναμεί με $N = \dfrac{\theta_r}{2\pi} = \dfrac{87,5}{3,141} \Rightarrow \boxed{N = 27,9}$ περιστροφές

και μήκος τόξου $R\theta_r = 0,4\cdot 87,5 = 35\text{ m}$

Ζ) Η τριβή είναι εφαπτόμενη στις δύο επιφάνειες και άρα θα μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά $s = R\theta - x$, όπου το μήκος s είναι η διαφορά των δύο μηκών, της μεταφοράς και της περιστροφής :
$s = 35 - 25 = 10\text{ m}$
Οπότε από τον ορισμό του έργου, το έργο της τριβής είναι ίσο με

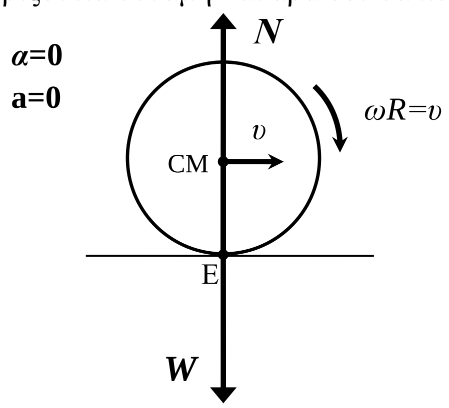
$$W_f = -f_k s = -\mu_k mgs = -0,25\cdot 20\cdot 10\cdot 10 \Rightarrow \boxed{W_f = -500\text{ J}}$$

Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να βρούμε το έργο της τριβής και από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας

$$W_f = \Delta K = \Delta K_{\mu\varepsilon\tau} + \Delta K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2}m\left(\upsilon_r^2 - \upsilon_0^2\right) + \frac{1}{2}I\left(\omega_r^2 - \omega_0^2\right) = \frac{1}{2}20\left(15^2 - 10^2\right) + \frac{1}{2}3,2\left(37,5^2 - 50^2\right) =$$

$$W_f = 1250 - 1750 \Rightarrow \boxed{W_f = -500\text{ J}}$$

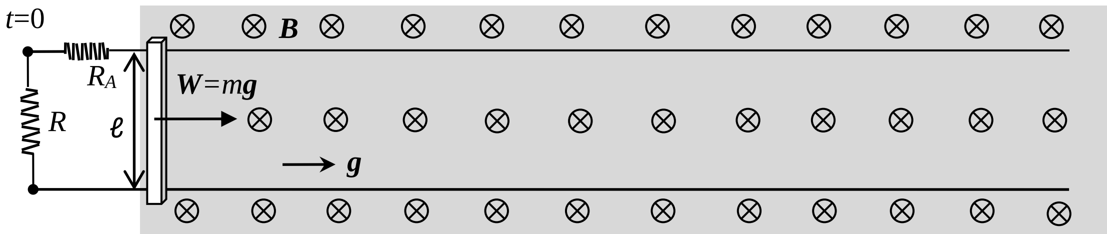
Η) Αφού επέλθει κύλιση παύει να ασκείται τριβή ολίσθησης εφόσον το σημείο επαφής παραμένει στιγμιαία ακίνητο. Επίσης δεν αναφαίνεται στατική τριβή στο σημείο επαφής. Η στατική τριβή είναι παθητική δύναμη, εμφανίζεται ως αντίδραση όταν επίκειται σχετική κίνηση μεταξύ δυο επιφανειών σε επαφή λόγω κάποιας άλλης δύναμης που προσπαθεί να κινήσει ή κινεί τη μια από τις δύο επιφάνειες. Εδώ δεν υπάρχει καμιά άλλη οριζόντια δύναμη και άρα δεν θα παρουσιαστεί στατική τριβή.



Οπότε οι μόνες δυνάμεις πάνω στον σωλήνα θα είναι το βάρος και η κάθετη αντίδραση του οδοστρώματος οι οποίες αλληλοαναιρούνται. Ο σωλήνας ισορροπεί και το CM του εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με υ_r . Ταυτόχρονα ο σωλήνας περιστρέφεται με ομαλή κυκλική κίνηση με $\omega_r = \upsilon_r/R$ γύρω από το CM. Το ιδανικό συμπαγές σώμα θα κυλούσε έτσι στο διηνεκές χωρίς ποτέ να σταματήσει.

Θέμα 4ο **Faraday – Laplace – Οπισθέλκουσα – Ισχύς**

Η γραμμική ηλεκτρική μηχανή του σχήματος χρησιμοποιεί την δύναμη της βαρύτητας ως κινητήρια δύναμη για να παράγει ηλεκτρική ενέργεια. Η ράβδος πέφτει λόγω του βάρους της σε σταθερό κατακόρυφο βαρυτικό πεδίο g, κινούμενη πάνω σε μεταλλικές ράγες κάθετα σε σταθερό οριζόντιο μαγνητικό πεδίο B. Το επαγωγικό ηλεκτρικό ρεύμα που θα δημιουργηθεί θα τροφοδοτήσει την εξωτερική αντίσταση R. Δίνονται η μάζα m, το ενεργό μήκος ℓ της ράβδου και η αντίσταση R_A της μηχανής (ράβδος και ράγες). Το σχήμα έχει σχεδιαστεί οριζόντια για οικονομία χώρου. Η κατεύθυνση της βαρύτητας (το κάτω) είναι προς τα δεξιά.



Α) Να γράψετε το νόμο του Νεύτωνα για τη ράβδο και να περιγράψετε την κίνηση της από την στιγμή t=0 που θα την αφήσουμε να πέσει ελεύθερα (αγνοήστε τριβές και αντίσταση του αέρα)

Β) Να βρείτε την τερματική (ορική) ταχύτητα υ_t της ράβδου, το τελικό ρεύμα στο κύκλωμα και την τελική τερματική τάση V_{Tf} της γεννήτριας στα άκρα της R.

Γ) Να φέρετε το νόμο του Νεύτωνα στη μορφή $\dfrac{d\upsilon}{\upsilon_t-\upsilon}=\dfrac{dt}{\tau}$ και να υπολογίσετε τη σταθερά χρόνου τ.

Δ) Να ολοκληρώσετε την εξίσωση του Νεύτωνα και να βρείτε τη χρονική εξέλιξη όλων των χρονικά μεταβαλλόμενων μεγεθών (υ, a, x, I, E, V_T, F_L)

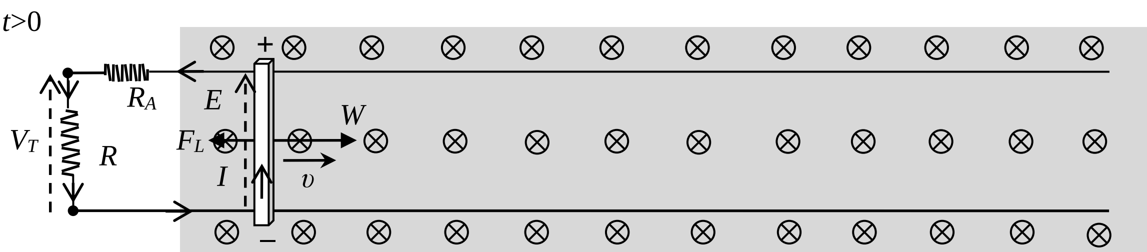
Ε) Στη μόνιμη κατάσταση να υπολογίσετε την παρεχόμενη μηχανική ισχύ από το βάρος P_{in}, την ισχύ που καταναλώνεται στις ωμικές αντιστάσεις της μηχανής $P_{απωλ}$ και την λαμβανόμενη ισχύ στην έξοδο της γεννήτριας στο ωμικό φορτίο R.

Αριθμητικά δεδομένα : R=4,500 Ω, R_A=0,500 Ω, m=1,000 kg, ℓ=2,000 m , g=9,800 N/kg , B=0,500 T

Λύση

Α) Το βάρος θα επιταχύνει τη ράβδο δίνοντάς της ταχύτητα.

$$\sum F = ma \Rightarrow a = \frac{W}{m} = g \neq 0 \Rightarrow \upsilon\uparrow$$



Η κινούμενη αγώγιμη ράβδος θα εμφανίσει επαγωγική τάση στα άκρα της

$$E = B\upsilon\ell$$

και άρα θα αρχίσει να διαρρέεται από ρεύμα (όπως και όλο το κύκλωμα)

$$I = \frac{E}{R+R_A}\ .$$

Η ρευματοφόρος πλέον ράβδος θα δεχτεί δύναμη Laplace από το μαγνητικό πεδίο, αντίθετη από το βάρος της W που θα ελαττώσει την αρχική της επιτάχυνση g.

$$F_L = BI\ell = B\ell\frac{E}{R+R_A} = \frac{B^2\ell^2}{R+R_A}\cdot\upsilon$$

Ο νόμος του Νεύτωνα είναι :

$$\sum F = ma \Rightarrow W - F_L = ma \Rightarrow mg - \frac{B^2\ell^2}{R+R_A}\cdot\upsilon = ma \Rightarrow a = g - \frac{B^2\ell^2}{m(R+R_A)}\cdot\upsilon$$

Η δύναμη Laplace παίζει το ρόλο δύναμης απόσβεσης (οπισθέλκουσα): $\vec{F}_L = -b\vec{\upsilon}$ με $b = \dfrac{B^2\ell^2}{R+R_A}$

και το μέτρο της θα αυξάνεται όσο αυξάνεται η ταχύτητα. Όσο το βάρος παραμένει μεγαλύτερο από την επαγώμενη δύναμη Laplace η ράβδος θα επιταχύνεται με διαρκώς μειούμενη επιτάχυνση. Η ράβδος θα σταματήσει να επιταχύνεται και θα κινείται με οριακή ταχύτητα όταν η δύναμη Laplace αυξηθεί ως την τιμή του βάρους *W*.

Β) Η ορική ταχύτητα της ράβδου επέρχεται όταν οι δύο αντίρροπες δυνάμεις εξισωθούν

$$W = F_L \Rightarrow mg = \frac{B^2\ell^2}{R+R_A}\cdot\upsilon_\tau \Rightarrow \boxed{\upsilon_t = \frac{mg(R+R_A)}{B^2\ell^2}} \qquad \upsilon_t = \frac{1\cdot 9{,}8(4{,}5+0{,}5)}{0{,}5^2 2^2} = 49{,}0 \text{ m/s}$$

Το τελικό ρεύμα της ράβδου βρίσκεται της από

$$W = F_L \Rightarrow mg = BI_f\ell \Rightarrow \boxed{I_f = \frac{mg}{B\ell}} \quad I_f = \frac{1\cdot 9{,}8}{0{,}5\cdot 2} = 9{,}80 \text{ A}$$

Η τελική επαγωγική τάση στα άκρα της ράβδου είναι

$$\boxed{E_f = B\ell\upsilon_t = \frac{mg(R+R_A)}{B\ell}} \quad \text{ή} \quad E_f = I_f(R+R_A) = \frac{mg(R+R_A)}{B\ell}$$

$$E_f = 0{,}5\cdot 49\cdot 2 = 49{,}0 \text{ V}$$

Ενώ η τάση στα άκρα της αντίστασης *R* (η τερματική τάση της γεννήτριας) είναι :

$$E_f = I_f R_A + V_{Tf} \Rightarrow V_{Tf} = E_f - IR_A \Rightarrow V_{Tf} = \frac{mg(R+R_A)}{B\ell} - \frac{mg}{B\ell}R_A \Rightarrow \boxed{V_T = \frac{mg}{B\ell}R} \quad V_T = \frac{1\cdot 9{,}8}{0{,}5\cdot 2}4{,}5 = 44{,}1 \text{ V}$$

Γ) $a = g - \dfrac{B^2\ell^2}{m(R+R_A)}\cdot\upsilon \Rightarrow \dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{B^2\ell^2}{m(R+R_A)}\left(\dfrac{mg(R+R_A)}{B^2\ell^2} - \upsilon\right) \Rightarrow \dfrac{d\upsilon}{\upsilon_t - \upsilon} = \dfrac{dt}{\tau}$

Η έκφραση $\tau = \dfrac{m}{b} = \dfrac{m(R+R_A)}{B^2\ell^2}$ έχει μονάδες χρόνου και ονομάζεται σταθερά χρόνου :

$$\left[\frac{m(R+R_A)}{B^2\ell^2}\right] = \frac{\text{kg}\cdot\Omega}{\text{T}^2\text{m}^2} = \frac{\text{kg}\cdot\Omega}{\dfrac{\text{N}^2}{\text{A}^2\text{m}^2}\cdot\text{m}^2} = \frac{\text{kg}\cdot\Omega\text{A}^2}{\text{N}^2} = \frac{\text{kg}\cdot\text{W}}{\text{N}^2} = \frac{\text{kg}\cdot\dfrac{\text{J}}{\text{s}}}{\text{N}\cdot\text{N}} = \frac{\text{kg}\cdot\text{N}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{N}\cdot\text{s}} = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\text{s}} = \text{s}$$

$$\tau = \frac{1(4{,}5+0{,}5)}{0{,}5^2 2^2} = 5 \text{ s}$$

Παρατηρούμε ότι $\upsilon_t = g\tau$

Δ) Ολοκληρώνουμε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα : $\dfrac{d\upsilon}{\upsilon_t - \upsilon} = \dfrac{dt}{\tau} \Rightarrow \displaystyle\int_0^\upsilon \frac{d\upsilon}{\upsilon_t - \upsilon} = \frac{1}{\tau}\int_0^t dt$

Αλλάζουμε μεταβλητή στο πρώτο ολοκλήρωμα : $u = \upsilon_t - \upsilon \Rightarrow du = -d\upsilon$

$$-\int_{\upsilon_t}^{\upsilon_t-\upsilon} \frac{du}{u} = \frac{1}{\tau}\int_0^t dt \Rightarrow \ln u\Big|_{\upsilon_t}^{\upsilon_t-\upsilon} = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \ln(\upsilon_t - \upsilon) - \ln\upsilon_t = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \ln\left(\frac{\upsilon_t - \upsilon}{\upsilon_t}\right) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \frac{\upsilon_t - \upsilon}{\upsilon_t} = e^{-t/\tau} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon(t) = \upsilon_t\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

$$a(t)=\frac{d\upsilon(t)}{dt}=\upsilon_t\frac{d}{dt}\left(1-e^{-t/\tau}\right)=\frac{\upsilon_t}{\tau}e^{-t/\tau}\Rightarrow \boxed{a(t)=ge^{-t/\tau}}$$

$$x(t)=\int_0^t \upsilon(t)dt=\upsilon_t\int_0^t\left(1-e^{-t/\tau}\right)dt=\upsilon_t t-\upsilon_t\int_0^t e^{-t/\tau}dt=$$

$$=\upsilon_t t+\upsilon_t\tau\int_0^{-t/\tau}e^u du=\upsilon_t t+\upsilon_t\left[e^u\right]_0^t=\upsilon_t t+\upsilon_t\tau(e^{-t/\tau}-1)\Rightarrow$$

$$\boxed{x(t)=\upsilon_t(t-\tau)+\upsilon_t\tau e^{-t/\tau}}$$

Όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $u=-t/\tau\Rightarrow dt=-\tau du$

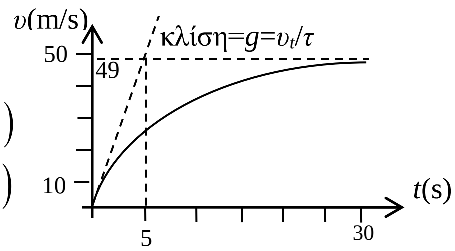
$$E(t)=B\upsilon(t)\ell=B\ell\upsilon_t\left(1-e^{-t/\tau}\right)\Rightarrow\boxed{E(t)=E_f\left(1-e^{-t/\tau}\right)}$$

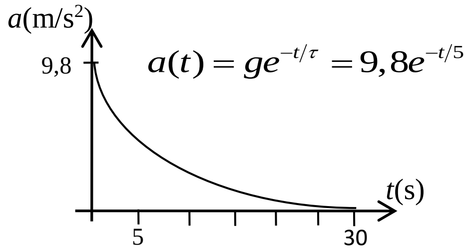
$$I(t)=\frac{E(t)}{(R+R_A)}=\frac{E_f}{(R+R_A)}\left(1-e^{-t/\tau}\right)\Rightarrow\boxed{I_A(t)=I_f\left(1-e^{-t/\tau}\right)}$$

$$V_T(t)=E(t)-I(t)R_A=E_f\left(1-e^{-t/\tau}\right)-I_fR_A\left(1-e^{-t/\tau}\right)\Rightarrow\boxed{V_T(t)=V_{Tf}\left(1-e^{-t/\tau}\right)}$$

$$F_L(t)=BI(t)\ell\Rightarrow\boxed{F_L(t)=W\left(1-e^{-t/\tau}\right)}$$

$$\upsilon(t)=\upsilon_t\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$
$$=49\left(1-e^{-t/5}\right)$$





Ε)

Στη μόνιμη κατάσταση παρέχεται σταθερά μηχανική ισχύς από την κινητήρια δύναμη (βάρος) που είναι ίση με:

$$P_{in}=W\upsilon_t=\frac{W^2(R+R_A)}{B^2\ell^2}$$

Αυτή μετατρέπεται σε ηλεκτρική ισχύ

$$P_{\varepsilon\pi\alpha\gamma}=E_fI_f=B\upsilon_t\ell\frac{B\upsilon_t\ell}{(R+R_A)}=\frac{B^2\ell^2}{(R+R_A)}\upsilon_t^2=\frac{B^2\ell^2}{(R+R_A)}\frac{W^2(R+R_A)^2}{B^4\ell^4}=\frac{W^2(R+R_A)}{B^2\ell^2}$$

που καταναλώνεται τελικά στις ωμικές αντιστάσεις μετατρεπόμενη σε θερμότητα

$$P_{\alpha\pi\omega\lambda}(t)=I_f^2R_A=\frac{B^2\upsilon_t^2\ell^2}{(R+R_A)^2}R_A=\frac{B^2\ell^2}{R_A}\upsilon_t^2=\frac{W^2R_A}{B^2\ell^2}$$

$$P_{out}(t)=I_f^2R=\frac{B^2\upsilon_t^2\ell^2}{R^2}R=\frac{B^2\ell^2}{R}\upsilon_t^2=\frac{W^2R}{B^2\ell^2}$$

Ισχύει $P_{in}=P_{\varepsilon\pi\alpha\gamma}=P_{\alpha\pi\omega\lambda}+P_{out}$.

$$P_{in}=W\upsilon_t=mg\upsilon_t=1,000\cdot 9,800\cdot 49,0=4,80\cdot 10^2\ \text{W}$$

$$P_{\varepsilon\pi\alpha\gamma}=E_fI_f=49,0\cdot 9,80=4,80\cdot 10^2\ \text{W}$$

$$P_{\alpha\pi\omega\lambda}(t)=I_f^2R_A=9,80^2\cdot 0,500=0,480\cdot 10^2\ \text{W}$$

$$P_{out}(t)=I_f^2R=9,80^2\cdot 4,500=4,32\cdot 10^2\ \text{W}$$

Ισχύει: $4,80=0,48+4,32$