

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2025

ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ

Δευτέρα, 1 Σεπτεμβρίου 2025: 12:00-15:00 Αίθουσα: ΑΠ3_8

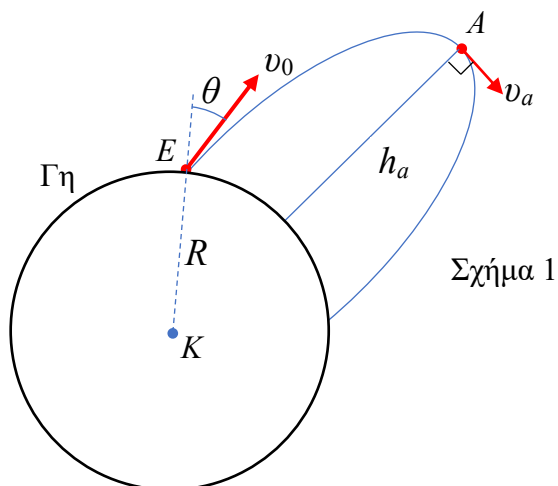
Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης (kphilippides@uowm.gr)

Να μεταφέρετε όλα τα σχήματα στο γραπτό σας και να δίνετε τα αποτελέσματα με το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων για να πάρετε όλες τις μονάδες.

Μηχανική

ΘΕΜΑ 1

Βαλλιστικός πύραυλος εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης, με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 3,43 \text{ km/s}$, σε γωνία $\theta = 53,13^\circ$ από την κατακόρυφο, όπως στο Σχήμα 1. Δίνονται η ακτίνα της Γης $R = 6.371 \text{ km}$ και η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g = 9,80 \text{ N/kg}$



1.1[0,1] Δείξτε ότι $GM = gR^2$, όπου M η μάζα της Γης και G η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας. Να υπολογίσετε:

1.2 [0,6] Το μέγιστο ύψος από την επιφάνεια της Γης στο οποίο θα φτάσει ο πύραυλος

1.3 [0,6] Την ταχύτητα του στο απόγειο

1.4 [0,6] Την ταχύτητα διαφυγής στο απόγειο

1.5 [0,6] Το κλάσμα της μάζας του πυραύλου που θα του απομείνει αν πυροδοτήσει στο απόγειο για να αυξήσει το μέτρο της ταχύτητάς του σε αυτό της ταχύτητας διαφυγής ώστε να ξεφύγει από τη βαρύτητα της Γης. Ο πύραυλος χρησιμοποιεί καύσιμα που έχουν ταχύτητα καυσαερίων $u = 4,00 \text{ km/s}$.

ΛΥΣΗ

1.1[0,1] Στην επιφάνεια της Γης: $W = F_G \Rightarrow \cancel{m}g = G \frac{\cancel{m}M}{R^2} \Rightarrow gR^2 = GM \Rightarrow$

$$GM = gR^2$$

$$GM = gR^2 = (9,80)(6.371 \times 10^3)^2 = 397.778.481,8 \times 10^6 = 3,978 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

1.2 [0,6] και 1.3 [0,6] Απαντώνται μαζί από σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους.

Ο πύραυλος εκτελεί ελλειπτική τροχιά με το κέντρο της Γης να είναι μια από τις εστίες της έλλειψης.

Το μέγιστο ύψος h_a επιτυγχάνεται όταν ο πύραυλος είναι στη μέγιστη απόσταση από το κέντρο της Γης, στο σημείο Α που ονομάζεται απόγειο $r_a = R + h_a$

Στο απόγειο (όπως και στο περίγειο) η ταχύτητα δεν έχει ακτινική συνιστώσα $v_{ar} = 0$. Έχει μόνο

γωνιακή (πολική) συνιστώσα $v_{a\theta} = v_a$: $\vec{v}_a = v_a \hat{\theta}$ και άρα είναι κάθετη στην ακτίνα $\vec{r}_a = r_a \hat{r}$:

Οπότε το μέτρο της στροφορμής γράφεται: $L = |\vec{r}_a \times \vec{p}_a| = |m\vec{r}_a \times \vec{v}_a| = mr_a v_a \sin 90^\circ = mv_a r_a$

Η στροφορμή και η μηχανική ενέργεια διατηρούνται. **Εξισώνω τις τιμές τους, στο απόγειο Α και στο σημείο εκτόξευσης Ε και παίρνω δύο εξισώσεις από όπου βρίσκω την v_a και r_a .**

Επειδή η εξίσωση της ενέργειας είναι δευτεροβάθμια θα βρω δύο λύσεις. Η δεύτερη λύση μου δίνει τις τιμές των v και r στο περίγειο (v_p και r_p) που είναι μέσα στη Γη και δεν με ενδιαφέρουν.

Διατήρηση στροφορμής : $L = L_E \Rightarrow \cancel{m}vr = \cancel{m}v_0R\sin\theta \Rightarrow r = \frac{v_0R\sin\theta}{v}$ (1) [0,3]

Διατήρηση μηχανικής ενέργειας: $E = E_E \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \frac{G\cancel{m}M}{r} = \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 - \frac{G\cancel{m}M}{R}$ (2) [0,3]

Αντικαθιστώντας την (1) στη (2) παίρνω μια δευτεροβάθμια εξίσωση για την ταχύτητα:

$$v^2 - \frac{2GM}{v_0R\sin\theta}v + \frac{2GM}{R} - v_0^2 = 0 \Rightarrow v^2 - \frac{2gR^2}{v_0R\sin\theta}v + \frac{2gR^2}{R} - v_0^2 = 0 \Rightarrow$$

$$v^2 - \frac{2gR}{v_0\sin\theta}v + (2gR - v_0^2) = 0 \quad [0,1]$$

με :

$$a = 1,$$

$$b = -\frac{2gR}{v_0\sin\theta} = -\frac{2(9,80)(6.371 \times 10^3)}{(3,43 \times 10^3)\sin(53,13^\circ)} = -45.507,2038 \text{ m/s}, \quad [0,1]$$

$$c = 2gR - v_0^2 = 2(9,80)(6.371 \times 10^3) - (3,43 \times 10^3)^2 = 113.106.700 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

και διακρίνουσα :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-45.507,2038)^2 - 4(113.106.700) = 1.618.478.797,694734 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 40.230,3219 \text{ m/s} \quad [0,1]$$

Οι λύσεις της είναι :

$$v_p = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{45.507,2038 + 40.230,3219}{2} = \frac{85.737,5257}{2} = 42.868,76285 = 42,9 \text{ km/s} \quad ,$$

$$v_a = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{45.507,2038 - 40.230,3219}{2} = \frac{5.276,8819}{2} = 2.638,44095 = 2,64 \text{ km/s} \quad [0,1]$$

Η μεγαλύτερη λύση (+), αντιστοιχεί στην ταχύτητα στο περίγειο v_p (που στην περίπτωση μας είναι μέσα στη Γη και δεν μας ενδιαφέρει), ενώ η μικρότερη (-), αντιστοιχεί στην ταχύτητα στο απόγειο v_a .

Αυτά είναι τα μόνα δύο σημεία της τροχιάς που η ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτίνα και ισχύει $r_a v_a = r_p v_p = L/m$ ώστε να έχουμε την παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση.

Από την (1) $r_a = \frac{v_0R\sin\theta}{v_a} = \frac{3,43 \text{ km/s} \cdot 6371 \text{ km} \cdot 0,8000}{2.638,441 \text{ km/s}} = 6.625,9 \text{ km} \Rightarrow$

$$r_a = 6626 \text{ km} \quad [0,1]$$

$$h_a = r_a - R = 6.626 - 6.371 \Rightarrow$$

$$h_a = 255 \text{ km} \quad [0,1]$$

Ύψη πάνω από τα 100 km (όριο Κάρμαν) θεωρούνται ότι βρίσκονται στο διάστημα.

Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε από την (1): $v = \frac{v_0R\sin\theta}{r}$ και να έχουμε μια

δευτεροβάθμια ως προς r ή $\frac{1}{r}$:

$$\frac{v_0^2 R^2 \sin^2 \theta}{r^2} - \frac{2gR}{\cancel{v_0} \sin \theta} \frac{\cancel{v_0} R \sin \theta}{r} + (2gR - v_0^2) = 0 \Rightarrow$$

$$v_0^2 R^2 \sin^2 \theta \left(\frac{1}{r} \right)^2 - 2gR^2 \frac{1}{r} + (2gR - v_0^2) = 0$$

Θα παίρναμε στο τέλος τα ίδια αποτελέσματα.

1.4 [0,6] Η ταχύτητα διαφυγής στο άπειρο από συγκεκριμένη απόσταση r βρίσκεται από τη διατήρηση της ενέργειας :

$$E_r = E_\infty \Rightarrow \frac{1}{2}mv - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - \frac{GmM}{\infty} \quad [0,2]$$

Αν φτάσω στο άπειρο με μηδέν ταχύτητα $v_\infty = 0$, η ταχύτητα στο r ήταν η ελάχιστη δυνατή, που ονομάζεται ταχύτητα διαφυγής $v = v_{esc}$. Οπότε:

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 - \frac{GmM}{r} = 0 \Rightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{r}} = \sqrt{\frac{2g}{r}}R \quad [0,2]$$

Η ταχύτητα διαφυγής στο απόγειο είναι :

$$v_{esc(a)} = \sqrt{\frac{2g}{r_a}}R = \sqrt{\frac{2(9,80)}{6.622 \times 10^3}} \cdot 6.371 \times 10^3 = 0,001720416 \cdot 6.371 \times 10^3 = 10,96 \times 10^3 \Rightarrow \quad [0,2]$$

$$v_{esc(a)} = 10,96 \text{ km/s}$$

1.5 [0,6] Για να ξεφύγει ο πύραυλος στο απόγειο πρέπει να πυροδοτήσει ώστε να επιταχύνει και να πετύχει διαφορά ταχύτητας :

$$\Delta v = v_{esc(a)} - v_a = 10,96 - 2,64 = 8,32 \text{ km/s} \quad [0,3]$$

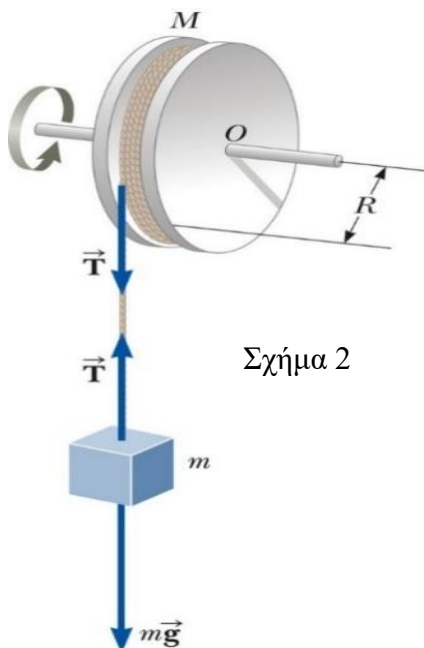
Από την εξίσωση του πυραύλου παίρνω :

$$\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{\Delta v}{u}} = e^{-\frac{8,32}{4,00}} = 0,12493 = 12,5\% \quad [0,3]$$

Ο πύραυλος θα απομείνει με το 12,5% της μάζας του. Το 87,5% της μάζας του κάηκε ως καύσιμο.

ΘΕΜΑ 2

Το σύστημα του σχήματος 2 αφήνεται από την ηρεμία όταν το βαρίδιο βρίσκεται σε ύψος $h = 14,00 \text{ m}$ πάνω από το έδαφος. Το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό και ξετυλίγεται χωρίς να γλιστράει, ενώ η τροχαλία περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον σταθερό άξονα που περνάει από το κέντρο της O .



Σχήμα 2

2.1 Τι ταχύτητα έχει το βαρίδιο όταν έχει κατέβει $3,50 \text{ m}$ και τι κινητική ενέργεια έχει η τροχαλία την ίδια στιγμή ;

2.2 Πόση είναι η επιτάχυνση του βαριδίου;

2.3 Πόση είναι η τάση του νήματος;

2.4 Πότε το βαρίδιο φτάνει στο έδαφος;

2.5 Πόσες περιστροφές έχει κάνει η τροχαλία όταν το βαρίδιο φτάνει στο έδαφος;

Δίνονται $m = 10,0 \text{ kg}$, $M = 8,00 \text{ kg}$, $R = 0,250 \text{ m}$, $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$, $g=9,80 \text{ N/kg}$

ΛΥΣΗ

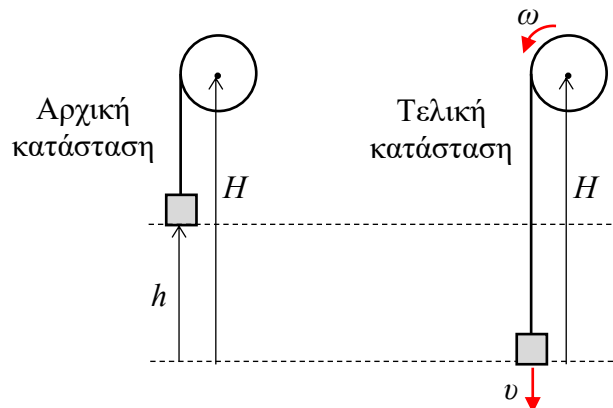
Αφού το νήμα ξετυλίγεται χωρίς να ολισθαίνει, το μήκος που έχει ξετυλιχτεί (μήκος τόξου) είναι ίσο με την κατακόρυφη μετατόπιση του βαριδίου

$$y = s \Rightarrow y = \theta R \Rightarrow \theta = \frac{y}{R}$$

Για να ισχύει διαρκώς το παραπάνω, θα πρέπει να συνδέονται με την ίδια σχέση και η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας με την ταχύτητα του βαριδίου καθώς και η γραμμική επιτάχυνση των σημείων της περιμέτρου της τροχαλίας με την επιτάχυνση του βαριδίου.

$$v = v_{\text{γραμ}} \Rightarrow v = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}, \quad a = a_{\text{γραμ}} \Rightarrow a = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R}$$

2.1 [0,5] Την ταχύτητα του βαριδίου μπορούμε να την βρούμε από τη διατήρηση της ενέργειας χωρίς να ξέρουμε την επιτάχυνση. Θέτουμε το μηδέν της δυναμικής ενέργειας στα 3,5 m κάτω από την αρχική θέση του βαριδίου. Έστω ότι το κέντρο της τροχαλίας απέχει από αυτό το σημείο κατακόρυφη απόσταση H .



$$E_{\text{αρχ}} = E_{\text{τελ}} \Rightarrow K_{\text{βαρ,αρχ}} + U_{\text{βαρ,αρχ}} + K_{\text{τροχ,αρχ}} + U_{\text{τροχ,αρχ}} = K_{\text{βαρ,τελ}} + U_{\text{βαρ,τελ}} + K_{\text{τροχ,τελ}} + U_{\text{τροχ,τελ}} \Rightarrow$$

$$0 + mgh + 0 + \cancel{MgH} = \frac{1}{2}mv^2 + 0 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \cancel{MgH} \Rightarrow [0,2]$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2}MR^2 \left(\frac{v}{R} \right)^2 \Rightarrow$$

$$mgh = \frac{1}{2}v^2 \left(m + \frac{M}{2} \right) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{M}{2}}} \quad [0,1] = \sqrt{\frac{2(10)(9,8)(3,5)}{10 + 4}} = \sqrt{\frac{(98)(7)}{14}} = \sqrt{49} = 7$$

$$\text{Ή } (10)(9,8)(3,5) = (0,5)(10)v^2 + (0,5)^2(8)(0,25)^2 \frac{v^2}{(0,25)^2} \Rightarrow 343 = 5v^2 + 2v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{343}{7} = 49 \Rightarrow v = 7$$

Άρα μετά από κάθοδο 3,50 m $v=7,00 \text{ m/s}$ [0,1]

$$K_{\text{τροχ}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2}MR^2 \left(\frac{v}{R} \right)^2 = \frac{1}{4}Mv^2 = \frac{1}{4}(8)(49) = (2)(49) \Rightarrow$$

$$K_{\text{τροχ}} = 98,0 \text{ J} \quad [0,1]$$

2.2 [0,5] και **2.3** [0,5] Από την αρχή της ορμής για το βαρίδιο και από την αρχή της στροφορμής για την τροχαλία βρίσκουμε και την επιτάχυνση και την τάση του νήματος μαζί.

$$\text{Μεταφορική κίνηση βαριδίου: } \sum F = ma \quad [0,2] \Rightarrow mg - T = ma \quad [0,1] \quad (1)$$

$$\text{Στροφική κίνηση τροχαλίας: } \sum \tau = I\alpha \quad [0,2] \Rightarrow TR = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow T = \frac{1}{2}Ma \quad [0,1] \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) βρίσκουμε την a :

$$mg - T + T = ma + \frac{1}{2}Ma \Rightarrow mg = a \cdot \left(m + \frac{M}{2}\right) \Rightarrow a = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}} \quad [0,2] \Rightarrow a = \frac{(10)(9,8)}{10 + \frac{8}{2}} = \frac{98}{14} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 7}{2 \cdot 7}$$

$$a = 7,00 \text{ m/s}^2 \quad [0,1]$$

Αντικαθιστώντας στην (2) βρίσκουμε την τάση του νήματος T :

$$T = \frac{1}{2}Ma = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28,0 \text{ N} \quad [0,1]$$

Η επιτάχυνση του βαριδίου είναι σταθερή a και άρα και η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας $\alpha = a/R$ θα είναι σταθερή.

Έτσι, η κατακόρυφη κίνηση του βαριδίου είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη και περιγράφεται από τις εξισώσεις :

$$y = \frac{1}{2}at^2, \quad v = at, \quad v^2 = 2ay$$

Ενώ η περιστροφή της τροχαλίας είναι ομαλά επιταχυνόμενη και περιγράφεται από τις εξισώσεις :

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2, \quad \omega = \alpha t, \quad \omega^2 = 2\alpha\theta$$

2.4 [0,5] Το βαρίδιο φτάνει στο έδαφος όταν $y=h=14 \text{ m}$:

$$h = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2(14)}{7}} \Rightarrow [0,4]$$

$$t = 2,00 \text{ s} \quad [0,1]$$

2.5 [0,5] Όταν έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους $s=h=14 \text{ m}$ από την τροχαλία, αυτή έχει περιστραφεί κατά γωνία $\theta = \frac{s}{R}$ και άρα έχει κάνει N περιστροφές ίσες με :

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{s}{2\pi R} = \frac{h}{2\pi R} = \frac{14}{2\pi(0,25)} = \frac{28}{\pi} = 8,91$$

Δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσετε την $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\frac{a}{R}t^2 = \frac{1}{2}\frac{7}{0,25}2^2 = 56 \text{ rad}$, αλλά αν το κάνετε

$$\text{παίρνετε πάλι το ίδιο αποτέλεσμα } N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{56}{2\pi} = \frac{28}{\pi}$$

Ηλεκτρομαγνητισμός

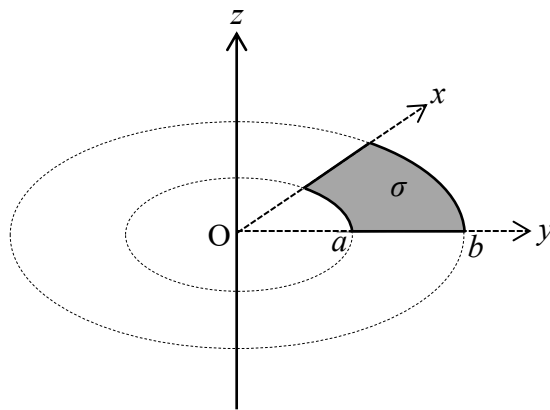
ΘΕΜΑ 3

Ομοιόμορφο επιφανειακό ηλεκτρικό φορτίο, πυκνότητας $\sigma > 0 \text{ (Cb/m}^2\text{)}$ είναι κατανομημένο στο ένα τέταρτο επίπεδου κυκλικού δακτυλίου εσωτερικής ακτίνας a και εξωτερικής ακτίνας b , το οποίο βρίσκεται στο επίπεδο xy (Σχήμα 3).

3.1 [1,5] Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό δυναμικό στα σημεία του άξονα των z .

3.2 [0,8] Σε ποιο σημείο του άξονα των z γίνεται μέγιστο το δυναμικό

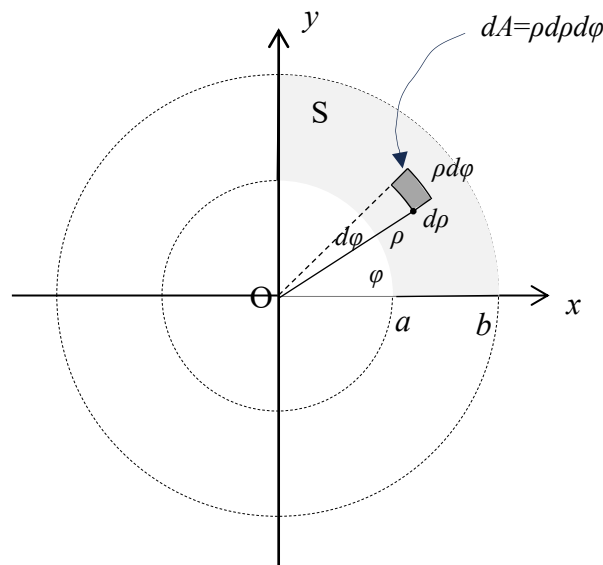
3.3 [0,2] Πόση είναι η μέγιστη τιμή του δυναμικού;



Σχήμα 3

ΛΥΣΗ

3.1 [1,5] Αρχή της επαλληλίας (άθροισμα συνεισφορών) στοιχειωδών ηλεκτρικών φορτίων dq . Το άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα επειδή τα φορτία κατανέμονται με συνεχή τρόπο πάνω στην επιφάνεια. Για να εκμεταλλευτούμε την κυλινδρική συμμετρία της κατανομής χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, φ, z) .



Το εμβαδόν που αντιστοιχεί στο πλακάκι που βρίσκεται στη θέση ρ, φ

Η επιφάνεια S εκτείνεται από $\rho = a$ έως $\rho = b$ ακτινικά και από $\varphi = 0$ έως $\varphi = \frac{\pi}{2}$ γωνιακά (αξιμουθιακή γωνία). $[0,1]$

Τη χωρίζουμε σε στοιχειώδη (σημειακά) πλακάκια με εμβαδόν dA το καθένα.

Στοιχειώδες εμβαδόν που έχει το κάθε πλακάκι:

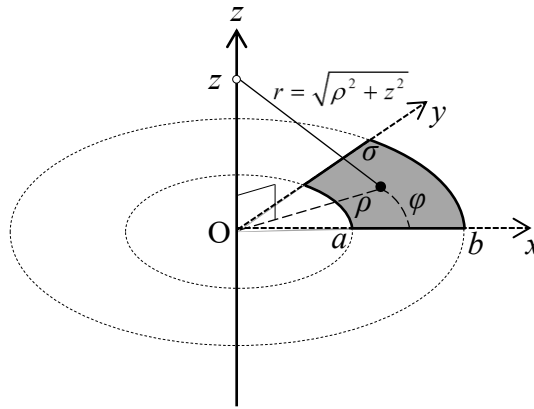
$$dA = \rho d\rho d\varphi \quad [0,1]$$

Στοιχειώδες φορτίο που έχει το κάθε πλακάκι :

$$dq = \sigma dA = \sigma \rho d\rho d\varphi \quad [0,1]$$

Δυναμικό που δημιουργεί σημειακό (στοιχειώδες) φορτίο:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} \quad [0,2]$$



Σχήμα 3β [0,4]

Επαλληλία όλων των σημειακών φορτίων της επιφάνειας S :

$$\begin{aligned}
 V(0,0,z) &= \int_{Q_s} dV = \int_{Q_s} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} \quad [0,1] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\sigma dA}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \\
 &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi}{2} \int_{a^2+z^2}^{b^2+z^2} u^{-1/2} \frac{du}{2} \quad [0,1] \text{ όπου } u = \rho^2 + z^2 \text{ και } du = 2\rho d\rho \quad [0,2] \Rightarrow \\
 V(0,0,z) &= \frac{\sigma}{8\epsilon_0} \frac{1}{2} \left[\frac{u^{1/2}}{1/2} \right]_{a^2+z^2}^{b^2+z^2} \Rightarrow [0,1]
 \end{aligned}$$

$$V(0,0,z) = \frac{\sigma}{8\epsilon_0} \left(\sqrt{b^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + z^2} \right) \quad [0,1]$$

Επειδή $\sigma > 0$ και $b > a$ το δυναμικό είναι θετικό πάνω στον άξονα z. Είναι άρτια συνάρτηση (συμμετρική ως προς τον άξονα z) και τείνει στο μηδέν όταν το $|z|$ μεγαλώνει: $z \rightarrow \pm\infty \Rightarrow V(z) \rightarrow 0$.

ΤΟ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΔΕΝ ΖΗΤΟΥΝΤΑΝ ΑΛΛΑ ΘΑ ΜΠΟΡΟΥΣΑΤΕ ΝΑ ΤΟ ΓΡΑΨΕΤΕ ΩΣ ΕΛΕΓΧΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΑΣ ΚΑΙ ΘΑ ΠΑΙΡΝΑΤΕ ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΟΠΟ ΣΑΣ.

Ελεγχος για $|z| \rightarrow \infty$ όπου η επιφάνεια φαίνεται ως σημείο με φορτίο $Q = \sigma A$ και το δυναμικό της πρέπει να είναι :

$$V(0,0,|z| \gg a,b) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|z|}$$

Το εμβαδόν της επιφάνειας είναι :

$$A = \frac{\text{Εμβαδόν δίσκου ακτίνας } b - \text{Εμβαδόν δίσκου ακτίνας } a}{4} = \frac{\pi b^2 - \pi a^2}{4} = \frac{\pi(b^2 - a^2)}{4}$$

$$\text{ή απευθείας με ολοκλήρωση } A = \int dA = \int_a^b \rho d\rho \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{b^2 - a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Οπότε το δυναμικό γράφεται:

$$V(0,0,z) = \frac{\sigma}{8\epsilon_0} \left[|z| \left(1 + \frac{b^2}{|z|^2} \right)^{1/2} - |z| \left(1 + \frac{a^2}{|z|^2} \right)^{1/2} \right]$$

όπου βγάλαμε το $|z|$ κοινό παράγοντα μέσα από τις ρίζες. Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα για $n=1/2$: Αν $x \ll 1 \Rightarrow (1+x)^n = 1 + nx + O(x^2)$ αφού μας ενδιαφέρει το όριο $|z| \gg a,b$, παίρνουμε:

$$V(0,0,z) = \left[\left(|z| + \frac{1}{2} \frac{b^2}{|z|} + O\left(\frac{b^4}{|z|^3}\right) \right) - \left(|z| + \frac{1}{2} \frac{a^2}{|z|} + O\left(\frac{a^4}{|z|^3}\right) \right) \right] \Rightarrow$$

$$V(0,0,z) = \frac{\sigma|z|}{8\epsilon_0} \left[\frac{b^2 - a^2}{2|z|^2} + O\left(\frac{b^4}{|z|^4}\right) - O\left(\frac{a^4}{|z|^4}\right) \right] \Rightarrow$$

$$V(0,0,z) = \frac{\sigma}{16\epsilon_0} \frac{b^2 - a^2}{|z|} + \frac{\sigma}{8\epsilon_0} \left[b \cdot O\left(b^3/|z|^3\right) - a \cdot O\left(a^3/|z|^3\right) \right]$$

Άρα στο όριο $|z| \gg a, b$ όπου: $\frac{b}{|z|}, \frac{a}{|z|} \rightarrow 0$, ο όρος στην αγκύλη μηδενίζεται και παίρνουμε :

$$V(0,0,|z| \gg a,b) = \frac{\sigma}{8\epsilon_0} \frac{b^2 - a^2}{|z|}$$

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με το π , αυτή η έκφραση είναι πράγματι :

$$V(0,0,|z| \gg a,b) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \pi (b^2 - a^2)}{4} \frac{1}{|z|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|z|}$$

Για όσους παρουσίασαν έτοιμο το παραπάνω αποτέλεσμα (που δεν ζητούνταν), χωρίς καμιά αιτιολόγηση των βημάτων που ακολούθησαν ή κάποιο ενδιάμεσο υπολογισμό, η κόλλα τους μηδενίστηκε αυτομάτως, επειδή είναι απόδειξη ότι είχαν εξωτερική βοήθεια κατά τη διάρκεια της εξέτασης.

3.2 [0,8] Πρόβλημα μεγίστων-ελαχίστων. Αναζητούμε το σημείο z στο οποίο η παράγωγος του δυναμικού ως προς z μηδενίζεται :

$$\frac{dV(z)}{dz} = \frac{\sigma}{8\epsilon_0} \left(\frac{2z}{2\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{2z}{2\sqrt{a^2 + z^2}} \right) = \frac{\sigma}{8\epsilon_0} \cdot z \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \quad 3.2a$$

Η παρένθεση ποτέ δεν γίνεται μηδέν αφού $a \neq b$, οπότε:

$$\frac{dV(z)}{dz} = 0 \Rightarrow z = 0 \quad [0,4]$$

Άρα το $z=0$ είναι ακρότατο. Μέγιστο ή ελάχιστο ;

Είτε εξετάζουμε την μονοτονία της συνάρτησης $V(z)$ πριν και μετά το $z=0$ είτε υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο $V''(z)$ της συνάρτησης και εξετάζουμε το πρόσημό της στο $z=0$.

Μονοτονία

Επειδή: $b > a \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} < \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}}$, η παρένθεση στην εξίσωση 3.2a είναι πάντα αρνητική.

Άρα για $z > 0$ η παράγωγος (κλίση) $\frac{dV(z)}{dz}$ είναι αρνητική και η συνάρτηση $V(z)$ είναι φθίνουσα $V(z) \downarrow$

Ενώ για $z < 0$ η παράγωγος (κλίση) $\frac{dV(z)}{dz}$ είναι θετική και η συνάρτηση $V(z)$ είναι αύξουσα $V(z) \uparrow$

Από την εξέταση της μονοτονίας, το ακραίο σημείο $z=0$ είναι μέγιστο. [0,4]

Δεύτερη παράγωγος

Ο κάθε όρος $f(z) = z \cdot \frac{1}{\sqrt{c+z^2}}$ (όπου $c = a^2$ ή b^2) της πρώτης παραγώγου 3.2a, σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης γινομένου, θα έχει παράγωγο

$$f'(z) = \left(\frac{z}{\sqrt{c+z^2}} \right)' = z' \left(\frac{1}{\sqrt{c+z^2}} \right) + z \left(\frac{1}{\sqrt{c+z^2}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{c+z^2}} + z \frac{(-1/2)2z}{(c+z^2)^{3/2}} = \frac{c+z^2 - z^2}{(c+z^2)^{3/2}} = \frac{c}{(c+z^2)^{3/2}}$$

Άρα η δεύτερη παράγωγος του δυναμικού είναι :

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = \frac{\sigma}{8\epsilon_0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) = \frac{\sigma}{8\epsilon_0} \left(\frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \right) \Rightarrow$$

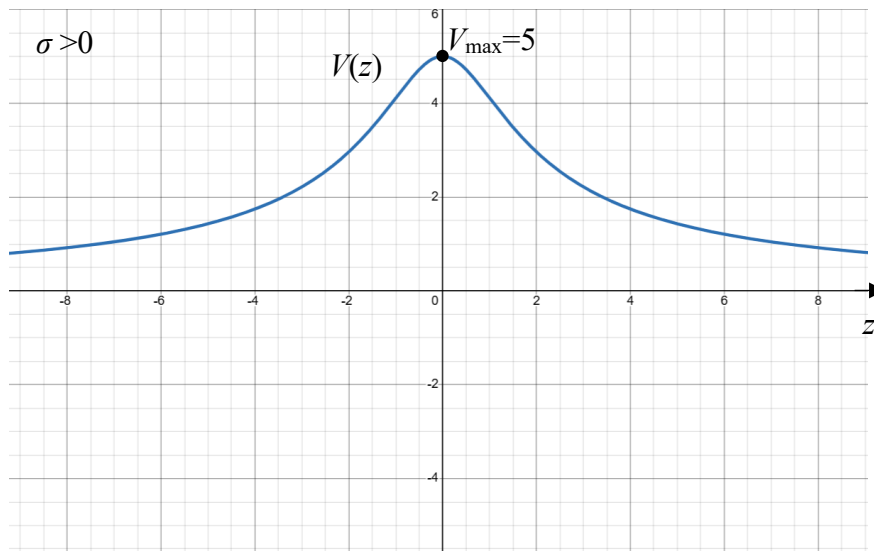
$$\frac{d^2V(0)}{dz^2} = \frac{\sigma}{8\epsilon_0} \left(\frac{b^2}{(b^2 + 0^2)^{3/2}} - \frac{a^2}{(a^2 + 0^2)^{3/2}} \right) = \frac{\sigma}{8\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) < 0 \quad \text{αφού } b > a$$

Επειδή η δεύτερη παράγωγος στο $z=0$ είναι αρνητική, το ακραίο σημείο $z=0$ είναι μέγιστο. [0,4]

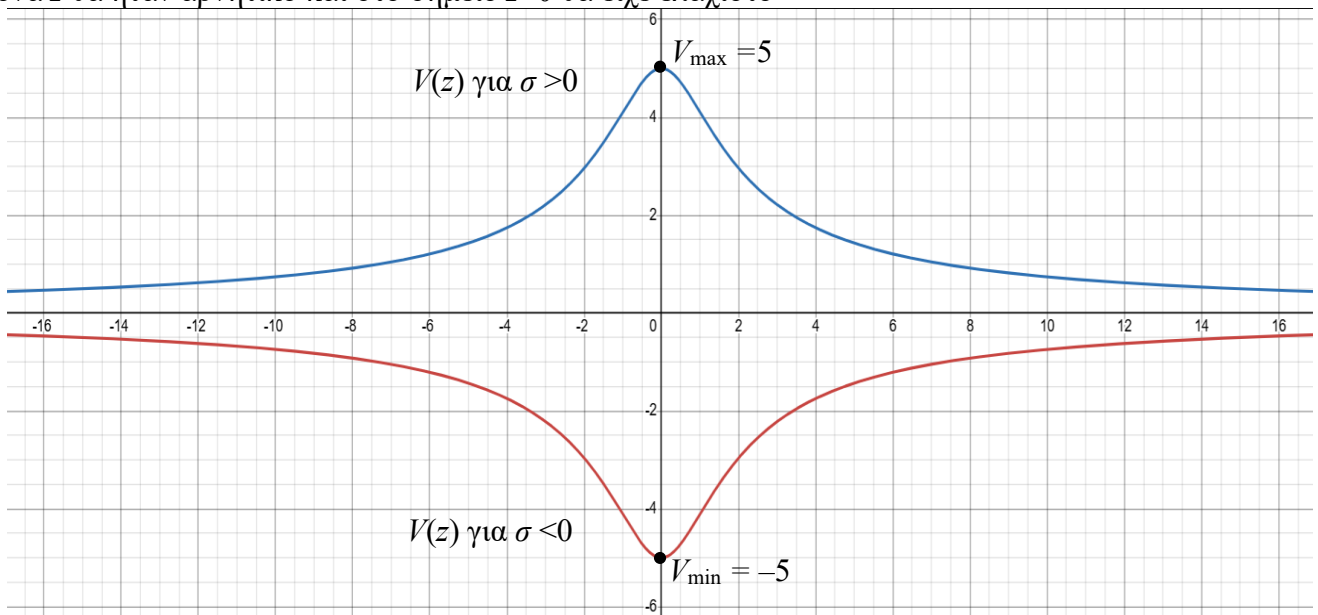
Τα παρακάτω δίνονται εγκυκλοπαιδικά. Μην τα απομνημονεύσει κανένας και τα γράψει σε καμιά εξέταση!

Π.χ. για $\frac{\sigma}{8\epsilon_0} = 5 > 0$, $a=1$, $b=2$ η συνάρτηση του δυναμικού έχει την παρακάτω μορφή

$$V(z) = 5 \left(\sqrt{4+z^2} - \sqrt{1+z^2} \right)$$



Τα αντίθετα θα ίσχυαν αν τα φορτία στην επιφάνεια ήταν αρνητικά δηλ. αν $\sigma < 0$. Το δυναμικό πάνω στον άξονα z θα ήταν αρνητικό και στο σημείο $z=0$ θα είχε ελάχιστο



3.3

$$V_{\max} = V(0,0,0) = \frac{\sigma}{8\epsilon_0} \left(\sqrt{b^2 + 0^2} - \sqrt{a^2 + 0^2} \right)$$

$$V_{\max} = \frac{\sigma}{8\epsilon_0} (b-a) \quad [0,2]$$

ΘΕΜΑ 4

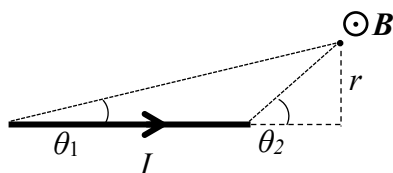
Δίνεται ο τύπος της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από τμήμα λεπτού ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού στον άξονα x , σε σημείο του επιπέδου xy που απέχει απόσταση r από τον αγωγό (Σχήμα 4α) : $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \hat{z}$.

4.1 [0,2] Από τον παραπάνω τύπο βρείτε την ένταση του μαγνητικού πεδίου όταν ο αγωγός έχει άπειρο μήκος

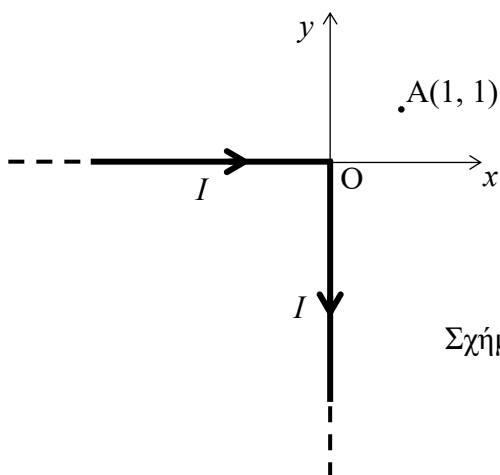
Λεπτός αγωγός με άπειρο μήκος διαρρέεται από συνεχές ρεύμα έντασης I και βρίσκεται στους αρνητικούς ημιάξονες των x και y , σύμφωνα με το Σχήμα 4β.

4.2 [1,5] Να υπολογιστεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο A του επιπέδου xy , που έχει συντεταγμένες $(1, 1)$.

4.3 [0,8] Πώς και σε τι απόσταση d από το σημείο A θα πρέπει να τοποθετηθεί στο επίπεδο xy ένας άλλος λεπτός ευθύγραμμος αγωγός με άπειρο μήκος που διαρρέεται από ρεύμα ίδιας εντάσεως I , έτσι ώστε η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο A να είναι μηδενική; Για την πληρότητα της απάντησης χρειάζεται σχεδίαση του αγωγού στο σχήμα, όπου θα απεικονίζεται η απόσταση d - την οποία και θα υπολογίσετε - και η φορά του ρεύματος.



Σχήμα 4α



Σχήμα 4β

ΛΥΣΗ

4.1 [0,2] Όταν ο αγωγός έχει άπειρο μήκος η γωνία θ_1 στο σχήμα 4α γίνεται ίση με μηδέν, $\theta_1 = 0$ και η γωνία θ_2 γίνεται ίση με 180° , $\theta_2 = \pi$. Οπότε η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο καθορισμένο σημείο του Σχήματος 4α θα είναι :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} (\cos(0) - \cos(\pi)) \hat{z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} (1 - (-1)) \hat{z} \Rightarrow$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \hat{z}$$

4.2 [1,5] Επειδή και τα δύο τμήματα του τεθλασμένου αγωγού έχουν το σημείο A(1,1) στα αριστερά τους, σχετικά με τη φορά του ρεύματος που τα διαρρέει, η κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργούν θα είναι και για τα δύο στον θετικό ημιάξονα z ($+\hat{z}$) και θα προστίθενται.

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου που προέρχεται από το τμήμα του τεθλασμένου αγωγού στον άξονα x

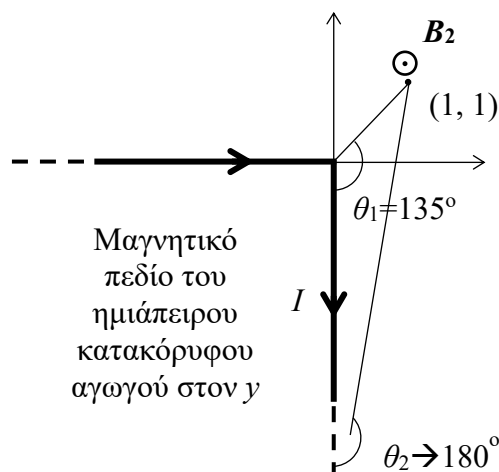
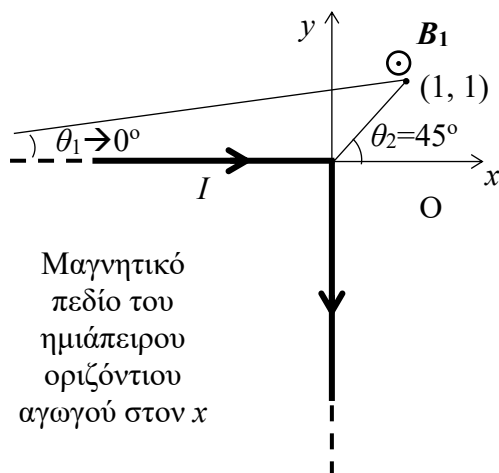
θα υπολογιστεί από τον δοσμένο τύπο $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \hat{z}$ με τα εξής δεδομένα :

1. επειδή το τμήμα εκτείνεται στο άπειρο από το άκρο που προέρχεται το ρεύμα η γωνία $\theta_1 = 0$
2. επειδή το τμήμα αυτό φτάνει μέχρι το σημείο (0,0) η γωνία θ_2 με το σημείο (1,1) είναι

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{1}{1} \right) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

3. η απόσταση του σημείου (1,1) από τον οριζόντιο άξονα είναι $r = 1$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{1} \left(\cos(0) - \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \hat{z}$$



Η ένταση του μαγνητικού πεδίου που προέρχεται από το τμήμα του τεθλασμένου αγωγού στον άξονα y θα υπολογιστεί παρομοίως, από τον τύπο $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \hat{z}$. Τώρα

$$\theta_1 = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}, \quad \theta_2 = 180^\circ = \pi, \quad r = 1$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{1} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos(\pi) \right) \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - (-1) \right) \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \hat{z}$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο συνεισφορές είναι ίσες, όπως αναμένεται από τη συμμετρία της διάταξης.

$$\text{Οπότε: } \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \hat{z} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \hat{z} \Rightarrow$$

$$\vec{B} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4\pi} \mu_0 I \hat{z}$$

4.3 Για να εξουδετερώσει το μαγνητικό πεδίο του τεθλασμένου αγωγού $\vec{B}$ ένας άλλος αγωγός, ο οποίος είναι ευθύγραμμος και απείρου μήκους, θα πρέπει να δημιουργεί μαγνητικό πεδίο $\vec{B}'$ αντίθετο του $\vec{B}$:

$$\vec{B} + \vec{B}' = 0$$

Άρα πεδίο με αντίθετη φορά ($-\hat{z}$) και ίδιο μέτρο $B' = B$: $B \hat{z} + B'(-\hat{z}) = 0$

Αν η απόστασή του από το A(1,1) είναι d , τότε το μέτρο του θα δίνεται από τον τύπο του ερωτήματος 4.1:

$$B' = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{d}$$

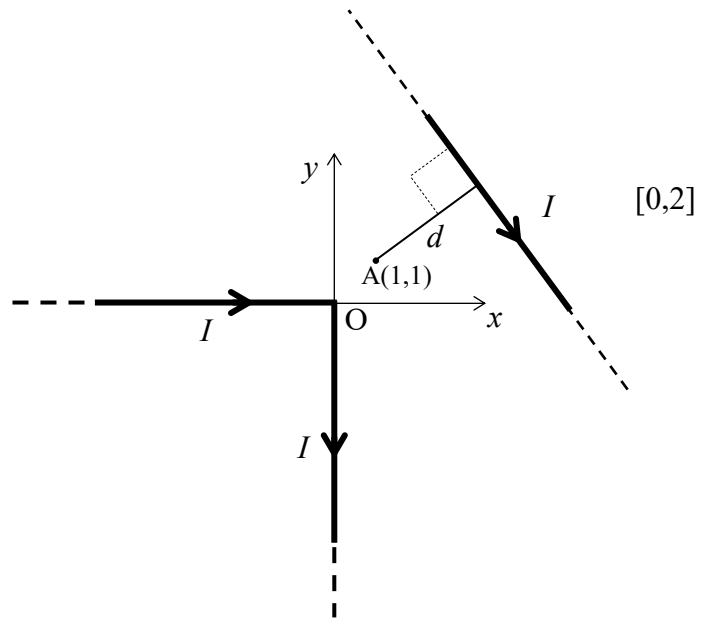
Έτσι από :

$$B' = B \Rightarrow \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{d} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4\pi} \mu_0 I \Rightarrow \frac{1}{2d} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow$$

$$d = \frac{2}{2 - \sqrt{2}} \quad \text{ή} \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \quad \text{ή} \quad 2 + \sqrt{2} = 3,4142 \quad [0,3]$$

Για να έχει φορά $-\hat{z}$ στο σημείο A(1,1), θα πρέπει να έχει το σημείο A(1,1) στα δεξιά του σχετικά με τη φορά του ρεύματος που τον διαρρέει. [0,3]

Μια πιθανή θέση του αγωγού
δίνεται στο διπλανό σχήμα.
Κάθε άλλη αποδεκτή θέση
προκύπτει με περιστροφή του
αγωγού γύρω από το Α
παραμένοντας σε απόσταση d .



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ