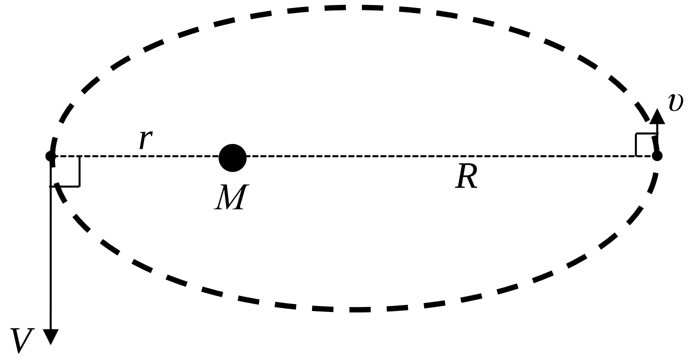
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ, ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2022-23

ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ

Παρασκευή, 15 Σεπτεμβρίου 2023
Αιθ. ΑΠ3_8 (ΑΜΦ), ΑΠ3_11, ΒΠ3_11
Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης - kphilippides@uowm.gr

ΘΕΜΑ 1ο [2]

Εξωπλανήτης βρίσκεται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από άστρο με $GM = 4{,}00\times10^{14}$ m^{3}s^{-2} , όπως στο σχήμα. Το περίαστρο βρίσκεται σε απόσταση $r = 1{,}60\times10^6$ m και η ταχύτητα στο περίαστρο έχει μέτρο $V = 2{,}00\times10^4$ m/s.



Να βρείτε την απόσταση R στην οποία βρίσκεται το απόαστρο και την ταχύτητα υ του πλανήτη στο απόαστρο.

Λύση

Κατά την κίνηση σε πεδίο κεντρικής δύναμης, όπως είναι η βαρύτητα, η μηχανική ενέργεια και η στροφορμή διατηρούνται, ενώ στο περίγειο και στο απόγειο η ταχύτητα είναι κάθετη στην επιβατική ακτίνα.

$$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GmM}{R} = E = \sigma\tau\alpha\theta \quad \textbf{[0,3]} \qquad mVr = m\upsilon R = L = \sigma\tau\alpha\theta \quad \textbf{[0,2]}$$

Έχουμε δύο εξισώσεις για τους αγνώστους υ και R. Επειδή η μια είναι δευτεροβάθμια θα βρούμε δύο λύσεις να τις ικανοποιούν. Την τετριμμένη $\upsilon = V$, $R = r$ (που ήδη γνωρίζουμε για το περίαστρο) και κάποια άλλη, $\upsilon = \ldots$, $R = \ldots$, που την αναζητούμε.

$$mVr = m\upsilon R \Rightarrow R = r\frac{V}{\upsilon} \quad (1) \quad \textbf{[0,1]}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GmM}{R} = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GmM}{r} \Rightarrow \upsilon^2 - \frac{2GM}{R} = V^2 - \frac{2GM}{r} \quad (2)$$

(1) → (2) : $$\upsilon^2 - \frac{2GM}{Vr}\upsilon + \frac{2GM}{r} - V^2 = 0 \Rightarrow a\upsilon^2 + b\upsilon + c = 0 \quad \textbf{[0,6]}$$

Δευτεροβάθμια με $a = 1, \quad b = -\frac{2GM}{Vr}, \quad c = \frac{2GM}{r} - V^2$ και

$$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{4G^2M^2}{V^2r^2} - \frac{8GM}{r} + 4V^2 = 4\left[\left(\frac{GM}{Vr}\right)^2 - 2\frac{GM}{Vr}V + V^2\right] = 4\left(\frac{GM}{Vr} - V\right)^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\left(\frac{GM}{Vr} - V\right)$$

$$\upsilon = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{GM}{Vr} \pm \left(\frac{GM}{Vr} - V\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \upsilon = V \ \ \text{τετριμμένη} \\ \upsilon = \dfrac{2GM}{Vr} - V \end{array} \quad \textbf{[0,4]}$$

$$\upsilon = \frac{2GM}{Vr} - V = \frac{2\cdot\ 4{,}00\times10^{14}}{2{,}00\times10^4\cdot\ 1{,}60\times10^6} - 2{,}00\times10^4 = 2{,}50\times10^4 - 2{,}00\times10^4 = 0{,}50\times10^4 \text{ m/s} \quad \textbf{[0,2]}$$

$$R = r\frac{V}{\upsilon} = 1{,}60\times10^6\,\frac{2{,}00\times10^4}{0{,}50\times10^4} = 6{,}40\times10^6 \text{ m} \quad \textbf{[0,2]}$$

[Η δευτεροβάθμια ως προς R.

$$\upsilon = \frac{Vr}{R} \quad (3)$$

$(3) \rightarrow (1)$

$$\upsilon^2 - \frac{2GM}{R} = V^2 - \frac{2GM}{r} \Rightarrow \frac{V^2 r^2}{R^2} - \frac{2GM}{R} = V^2 - \frac{2GM}{r} \Rightarrow$$

$$V^2 r^2 - 2GMR = \left(V^2 - \frac{2GM}{r} \right) R^2 \Rightarrow \left(\frac{2GM}{r} - V^2 \right) R^2 - 2GMR + V^2 r^2 = 0$$

Οι συντελεστές είναι:

$$\frac{2GM}{r} - V^2 = \frac{2 \times 4 \times 10^{14}}{1,6 \times 10^6} - \left(2 \times 10^4\right)^2 = (5-4) \times 10^8 = 10^8$$

$$2GM = 2 \times 4 \times 10^{14} = 8 \times 10^{14}$$

$$V^2 r^2 = \left(2 \times 10^4\right)\left(1,6 \times 10^6\right) = 10,24 \times 10^{20}$$

Η εξίσωση γίνεται:

$$10^8 R^2 - 8 \times 10^{14} R + 10,24 \times 10^{20} = 0 \Rightarrow \qquad R^2 + \left(-8 \times 10^6\right) R + 10,24 \times 10^{12} = 0$$

Η λύση είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 64 \times 10^{12} - 4 \times 10,24 \times 10^{12} = 4 \times 5,76 \times 10^{12}$$

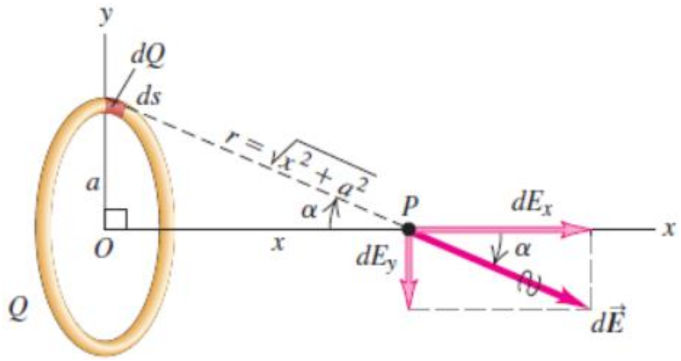
$$\sqrt{\Delta} = 2 \times \sqrt{5,76} \times 10^6 = 2 \times 2,4 \times 10^6 = 4,8 \times 10^6$$

$$R = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{8 \times 10^6 \pm 4,8 \times 10^6}{2} \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} R = 6,40 \times 10^6 \text{ m} \\ R = 1,60 \times 10^6 \text{ m} = r \text{ τετριμμένη} \end{array}$$

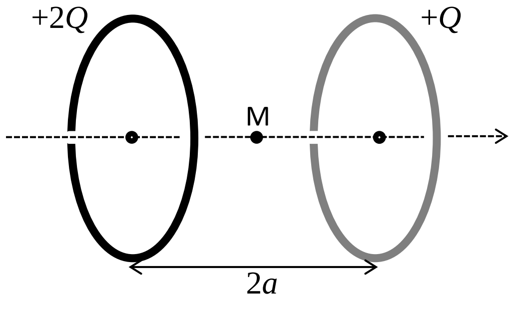
$$\upsilon = \frac{Vr}{R} = \frac{2,00 \times 10^4 \times 1,60 \times 10^6}{6,40 \times 10^6} = 0,50 \times 10^4 \text{ m/s} \quad]$$

ΘΕΜΑ 2ο [2]

2.1 Να υπολογίσετε την κατεύθυνση και το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί λεπτό ομοιόμορφα θετικά φορτισμένο δακτυλίδι πάνω στον άξονά του. **[1,0]**



2.2 Να σχεδιάσετε την κατεύθυνση και να υπολογίσετε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργούν δύο λεπτά ομοιόμορφα θετικά φορτισμένα δακτυλίδια στο μέσο Μ του κοινού άξονά τους. Η ακτίνα των δακτυλιδιών είναι a και η απόσταση μεταξύ τους $2a$. Το ένα δακτυλίδι έχει διπλάσιο φορτίο από το άλλο.



$1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \times 10^9$ NC^2/m^2, a = 1 mm, Q = 2,83 pC **[1,0]**

Λύση

2.1 Χρησιμοποιούμε την αρχή της επαλληλίας, δηλαδή χωρίζουμε το δαχτυλίδι σε σημειακά στοιχειώδη φορτία dq και αθροίζουμε τις συνεισφορές τους. Παίρνουμε ως αρχή των αξόνων το κέντρο του δακτυλιδιού και τον άξονά του να είναι ο άξονας x. Κάθε στοιχείο dq της κυκλικής κατανομής απέχει την ίδια απόσταση $r=\sqrt{x^2+a^2}$ από το σημείο *P* (δες σχήμα). Το πεδίο $d\vec{E}$ που δημιουργεί κάθε στοιχειώδες φορτίο dq έχει μέτρο που βρίσκεται από το νόμο του Coulomb

$$\left|d\vec{E}\right|=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{x^2+a^2}$$

Η *x* συνιστώσα του πεδίου κάθε στοιχειώδους φορτίου είναι :

$$dE_x=\left|d\vec{E}\right|\cdot\,\cos\alpha=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{x^2+a^2}\cdot\,\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Από το σχήμα φαίνεται ότι όλες οι *x* συνιστώσες προστίθενται

$$E_x=\int\,dE_x=\int\,dE\cdot\,\cos\alpha=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\,\frac{dq}{x^2+a^2}\cdot\,\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Επειδή όλα τα dq έχουν το ίδιο *x*, οι εκφράσεις με το *x* είναι σταθερές και βγαίνουν έξω από το ολοκλήρωμα:

$$E_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}\int\,dq$$

Το ολοκλήρωμα που μένει είναι στοιχειώδες και δίνει το ολικό φορτίο του δαχτυλιδιού.

Άρα : $\quad E_x=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$

Οι κάθετες στον άξονα συνιστώσες όλων των στοιχειωδών φορτίων του δαχτυλιδιού (στο σχήμα *y*), θα αθροίσουν μηδέν επειδή για κάθε στοιχειώδες φορτίο υπάρχει το αντίστοιχο αντιδιαμετρικό του για το οποίο η *y* συνιστώσα είναι αντίθετη. Οπότε :

$$\boxed{\vec{E}(x,0,0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}\,\hat{x}}$$

Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το δυναμικό που δεν είναι διάνυσμα:

$$V(x,0,0)=\int_0^Q dV=\int_0^Q\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}=\int_0^Q\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\int_0^Q dq=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Από το δυναμικό βρίσκουμε το πεδίο:

$$\vec{E}(x,0,0)=-\vec{\nabla}V(x,0,0)=-\frac{\partial V(x,0,0)}{\partial x}\hat{x}-\frac{\partial V(x,0,0)}{\partial y}\hat{y}-\frac{\partial V(x,0,0)}{\partial z}\hat{z}=$$

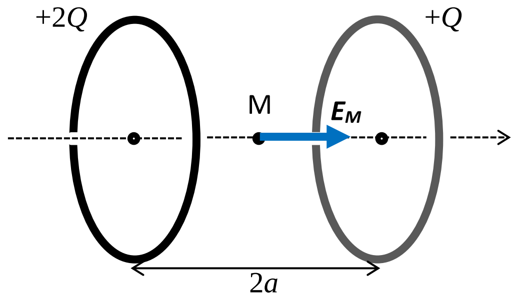
$$=-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\hat{x}-0-0=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)(2x)\left(x^2+a^2\right)^{-3/2}\hat{x}\Rightarrow$$

$$\vec{E}(x,0,0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}\,\hat{x}$$

2.2 Το ηλεκτρικό πεδίο του αριστερού δακτυλιδιού (+2*Q*) έχει μέτρο διπλάσιο από αυτό του πεδίου του δεξιού δακτυλιδιού (+*Q*) και δείχνει προς τα δεξιά ενώ το πεδίο του δεξιού δακτυλιδιού δείχνει προς τα αριστερά.

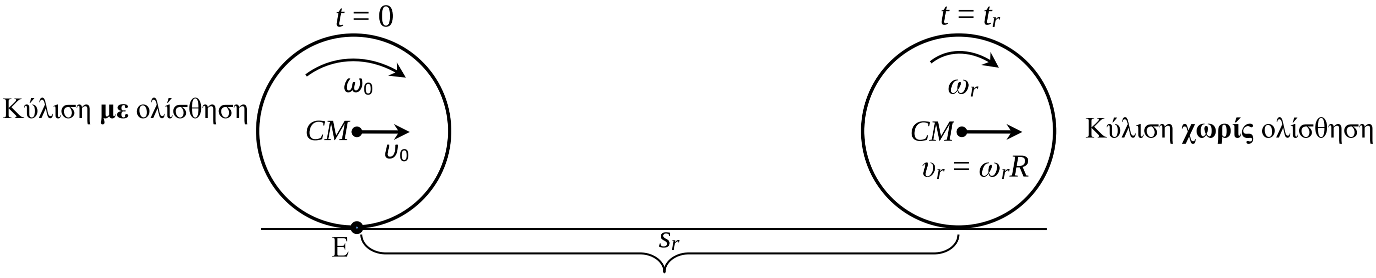
$$\vec{E}_M=\vec{E}_{\alpha\rho\iota\sigma\tau}(x=a,0,0)+\vec{E}_{\delta\varepsilon\xi\iota\alpha}(x=-a,0,0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Qa}{\left(a^2+a^2\right)^{3/2}}\hat{x}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(-a)}{\left(a^2+a^2\right)^{3/2}}\hat{x}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qa}{\left(2a^2\right)^{3/2}}\left(2-1\right)\Rightarrow$$

$$\vec{E}_M=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^2\sqrt{8}}\hat{x}=9\times10^9\frac{2{,}83\times10^{-12}}{(10^{-3})^2\sqrt{8}}\hat{x}=9{,}00\times10^3\hat{x}\quad \text{N/C}$$



Θέμα 3. [3]

Σωλήνας μάζας m= 20,0 kg και ακτίνας R=0,400 m πέφτει από κινούμενο όχημα και ξεκινά να κινείται στο οδόστρωμα έχοντας αποκτήσει τόσο μεταφορική ταχύτητα υ_0=10,0 m/s όσο και γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω_0=50,0 rad/s όπως στο σχήμα. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης με το οδόστρωμα είναι μ_k =0,250. Θεωρήστε το σωλήνα ως κυλινδρική στεφάνη με ροπή αδράνειας $I_{CM} = \kappa m R^2$ όπου κ=1.



3.1 Να υπολογίσετε την αρχική στροφορμή του σωλήνα ως προς το κέντρο μάζας του CM και ως προς το σημείο Ε του δαπέδου που βρίσκεται σε επαφή με το σωλήνα. [0,4]
3.2 Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε τις δυνάμεις που δρουν στο σωλήνα ενώ κυλίεται με ταυτόχρονη ολίσθηση και να δείξετε τη φορά της επιτάχυνσής του a και τη φορά της γωνιακής του επιτάχυνσης α. [0,6]
3.3 Να βρείτε την ταχύτητα υ_r του σωλήνα όταν επιτευχθεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. [0,4]
3.4 Να υπολογίσετε τη γραμμική a και τη γωνιακή α επιτάχυνση του σωλήνα πριν επιτευχθεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. [0,2]
3.5 Τι χρονικό διάστημα t_r θα χρειαστεί για να επέλθει κύλιση χωρίς ολίσθηση. [0,4]
3.6 Πόσο διάστημα s_r θα έχει διανύσει μέχρι τότε ο σωλήνας και πόσες περιστροφές θα έχει κάνει [0,4]
3.7 Να υπολογίσετε το έργο της τριβής ολίσθησης έως να επιτευχθεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. [0,4]
3.8 Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις στο σωλήνα αφού επιτευχθεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. [0,2]

Δίνεται g=10,0 N/kg

Λύση

3.1 Η στροφορμή για ένα σύστημα σωματιδίων είναι ίση με τη στροφορμή του κέντρου μάζας του γύρω από το σημείο αναφοράς (μεταφορική ή τροχιακή) συν τη στροφορμή των σωματιδίων γύρω από το κέντρο μάζας (περιστροφική). Για άκαμπτο σώμα το μέτρο της περιστροφικής στροφορμής γύρω από το κέντρο μάζας του δίνεται από $L_{(CM)} = I_{CM}\omega$.

Έτσι έχουμε :

$I_{CM} = \kappa m R^2 = 1\cdot\ 20\cdot\ 0,4^2 = 3,2\ \text{kg}\cdot\ \text{m}^2$

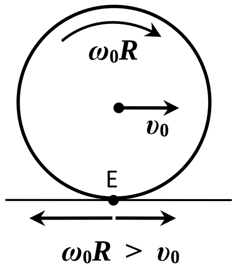
$L_{(\text{CM})} = I_{CM}\omega_0 = 3,2\cdot\ 50 \Rightarrow L_{(\text{CM})} = 160\ \text{kg}\cdot\ \text{m}^2/\text{s}$ **[0,2]**

Γύρω από το ακίνητο σημείο Ε του δαπέδου η στροφορμή είναι:

$L_{(\text{E})} = m\upsilon_0 R + I_{CM}\omega_0 = 20\cdot\ 10\cdot\ 0,4 + 160 = 80 + 160 \Rightarrow L_{(\text{E})} = 240\ \text{kg}\cdot\ \text{m}^2/\text{s}$ **[0,2]**

3.2 Επειδή η συνθήκη κύλισης δεν ικανοποιείται $\upsilon_0 = 10 < 50\cdot 0,4 = 20 = \omega_0 R$, το σώμα θα ολισθαίνει πάνω στο δάπεδο. Δηλαδή το σημείο επαφής του σωλήνα θα σύρεται πάνω στο δάπεδο, δεν θα είναι στιγμιαία ακίνητο. Λόγω της μεταφορικής κίνησης θα μετατοπίζεται προς τα μπροστά κατά $dx_{μετ} = \upsilon_0 dt$ ενώ λόγω της περιστροφής θα μετατοπίζεται προς τα πίσω κατά $dx_{περ} = -Rd\theta = -\omega_0 R dt$. Άρα, αφού

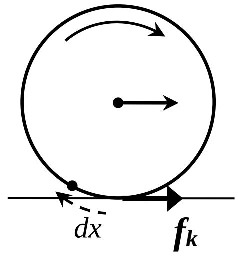
$\omega_0 R > \upsilon_0$ η συνολική μετατόπιση κάθε dt θα είναι προς τα πίσω και ίση με $dx = dx_{\mu\varepsilon\tau} + dx_{\pi\varepsilon\rho} = \upsilon_0 dt - \omega_0 R dt = -(\omega_0 R - \upsilon_0)dt$. Οπότε η τριβή ολίσθησης f_k που θα εμφανιστεί θα είναι προς τα μπροστά. **[0,2]**



Το σημείο επαφής του σωλήνα σε σχέση με το ακίνητο σημείο του δαπέδου Ε δεν παραμένει στιγμιαία ακίνητο αλλά σε χρόνο dt ολισθαίνει προς τα πίσω κατά:

$$dx = dx_{\mu\varepsilon\tau} + dx_{\pi\varepsilon\rho} = \upsilon_0 dt - R\omega_0 dt,$$

επειδή η γραμμική ταχύτητα από την περιστροφή $\omega_0 R$ είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα μεταφοράς υ_0 του CM.
Άρα εμφανίζεται τριβή ολίσθησης προς τα μπροστά

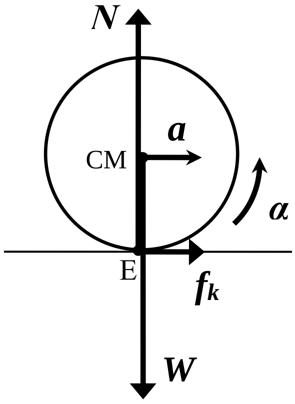


$W = mg = 20,0 \cdot 10,0 = 200$ N **[0,05]**

y-ισορροπία: $\sum F_y = 0 \Rightarrow N = W \Rightarrow N = 200$ N **[0,05]**

$f_k = \mu_k N = 0,250 \cdot 200 = 50,0$ N **[0,1]**

Αφού η μόνη οριζόντια δύναμη είναι η κινητική τριβή $\boldsymbol{f_k}$ η επιτάχυνση a του CM θα είναι κατά τη φορά της, δηλαδή προς τα μπροστά. Επειδή μόνο η $\boldsymbol{f_k}$ μπορεί να περιστρέψει το σώμα γύρω από το CM η γωνιακή επιτάχυνση θα είναι επίσης κατά τη φορά της δηλαδή ανθωρολογιακά.



[0,2]

3.3 Μπορούμε να βρούμε την τελική ταχύτητα κύλισης $\upsilon_r = \omega_r R$ πριν να λύσουμε τις εξισώσεις του Νεύτωνα. Αφού όλες οι δυνάμεις (B, N, f_k) διέρχονται από το σημείο επαφής Ε, δεν επάγουν ροπή γύρω από το σημείο Ε και έτσι η στροφορμή γύρω από το σημείο επαφής Ε θα παραμένει σταθερή: $L_{(\mathrm{E})} = L'_{(\mathrm{E})} \Rightarrow m\upsilon_0 R + I\omega_0 = m\upsilon_r R + I\omega_r \Rightarrow m\upsilon_0 R + \kappa m R^2 \omega_0 = m\upsilon_r R + \kappa m R^2\, \upsilon_r / R \Rightarrow$ **[0,3]**

$$\upsilon_0 + \kappa R\omega_0 = \upsilon_r(1+\kappa) \Rightarrow \boxed{\upsilon_r = \frac{\upsilon_0 + \kappa R\omega_0}{1+\kappa}}$$

$$\upsilon_r = \frac{10 + 1\cdot 0,4\cdot 50}{1+1} = \frac{30}{2} \Rightarrow \boxed{\upsilon_r = 15,0 \text{ m/s}}$$ **[0,1]**

$$\omega_r = \upsilon_r / R = 15,0/0,400 \Rightarrow \boxed{\omega_r = 37,5 \text{ rad/s}}$$

3.4 Η τριβή ολίσθησης είναι η μόνη οριζόντια δύναμη που ασκείται στον κύλινδρο και το αποτέλεσμά της είναι να επιταχύνει την μεταφορική του κίνηση αυξάνοντας την ταχύτητα του κέντρου μάζας ($\upsilon_0 \uparrow$) ενώ ταυτόχρονα η ροπή της ως προς το κέντρο μάζας επιβραδύνει την περιστροφική του κίνηση

μειώνοντας την γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου ($\omega_0 \downarrow$). Αυτό θα συνεχίζεται μέχρι κάποια στιγμή οι δύο ταχύτητες να εξισωθούν $\upsilon_{CM} = \omega R$ και να επιτευχθεί κύλιση χωρίς ολίσθηση.
Οι νόμοι του Νεύτωνα δίνουν :

$$\left.\begin{array}{l} x\text{-μετακίνηση}: \ f_k = ma \\ z\text{-περιστροφή}: \ f_k R = I\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \mu_k mg = ma \\ \mu_k mgR = \kappa m R^2 \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = \mu_k g \\ \alpha = \dfrac{\mu_k g}{\kappa R} \end{array}$$

$$a = 0,250 \cdot 10,0 \Rightarrow \boxed{a = 2,5 \ \mathrm{m/s^2}} \ \textbf{[0,1]}$$

$$\alpha = \frac{0,250 \cdot 10}{1 \cdot 0,400} \Rightarrow \boxed{\alpha = 6,25 \mathrm{rad/s}} \ \textbf{[0,1]}$$

(Βλέπουμε ότι αριθμητικά για τα μέτρα των επιταχύνσεων ισχύει $\alpha R = 2,50 \ \mathrm{m/s^2} = a$. Όμως αυτό δεν σημαίνει ότι ο σωλήνας κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση αφού οι επιταχύνσεις δεν έχουν την κατάλληλη φορά. Οφείλεται απλά στο κ=1 και δεν ισχύει γενικά για κάθε κυλινδρικό σώμα.)

3.5 Επειδή η ροπή είναι σταθερή βρίσκουμε το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να επέλθει κύλιση από το 2ο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση:

$$\sum_{(\mathrm{CM})} \tau = \frac{dL_{(\mathrm{CM})}}{dt} \Rightarrow \tau_f = \frac{\Delta L_{(\mathrm{CM})}}{\Delta t} \Rightarrow \ \textbf{[0,2]}$$

$$t_r = \Delta t = \frac{L'_{(\mathrm{CM})} - L_{(\mathrm{CM})}}{-f_k R} = \frac{\kappa m R^2 (\omega_0 - \omega_r)}{\mu_k mgR} = \frac{\kappa(\omega_0 R - \upsilon_r)}{\mu_k g} = \frac{\kappa}{\mu_k g}\left(\omega_0 R - \frac{\upsilon_0 + \kappa R \omega_0}{1+\kappa}\right) = \frac{\kappa\left(\omega_0 R(1+\kappa) - \upsilon_0 + \kappa R \omega_0\right)}{\mu_k g (1+\kappa)} \Rightarrow$$

$$\boxed{t_r = \frac{\kappa}{1+\kappa}\frac{R\omega_0 - \upsilon_0}{\mu_k g}} \qquad t_r = \frac{1}{1+1} \cdot \frac{20-10}{0,25 \cdot 10} \Rightarrow \boxed{t_r = 2 \ \mathrm{s}} \ \textbf{[0,2]}$$

Θα μπορούσαμε να βρούμε το t_r και από καθεμιά από τις παρακάτω κινηματικές εξισώσεις :

$$\upsilon_r = \upsilon_0 + a t_r \quad , \quad \omega_r = \omega_0 - \alpha t_r \quad , \quad \upsilon_0 + a t_r = R(\omega_0 - \alpha t_r)$$

Αφού έχουμε υπολογίσει τις υ_r και ω_r στην 3.4 και τις a και α στην 3.5

Επαλήθευση για τις υ_r και ω_r που υπολογίσαμε στην 3.4 :

$$\upsilon_r = \upsilon_0 + a t_r = 10 + 2,5 \cdot \ 2 = 15 \ \mathrm{m/s} \quad \mathrm{OK}$$

$$\omega_r = \omega_0 - \alpha t_r = 50 - 6,25 \cdot \ 2 = 37,5 \ \mathrm{rad/s^2} \quad \mathrm{OK}$$

3.6 Ο σωλήνας, πριν επιτευχθεί κύλιση, θα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ταυτόχρονα με ομαλά επιβραδυνόμενη περιστροφική κίνηση σύμφωνα με τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\upsilon = \upsilon_0 + at \qquad s = x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2ax \qquad \frac{x}{t} = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2}$$

$$\omega = \omega_0 - \alpha t \qquad \theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - 2\alpha\theta \qquad \frac{\theta}{t} = \frac{\omega_0 + \omega}{2}$$

Οι μετατοπίσεις υπολογίζονται πιο εύκολα από τις τελευταίες εξισώσεις κάθε γραμμής.
Πριν ο σωλήνας αρχίσει να κυλάει χωρίς ολίσθηση το CM του θα διανύσει διάστημα :

$$s_r = x_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{\upsilon_0 + \upsilon_r}{2} t_r = \frac{10+15}{2} \cdot \ 2 = 25 \ \mathrm{m} \quad \text{προς τα δεξιά} \quad \textbf{[0,2]}$$

και θα διαγράψει γωνία

$$\theta_r = \frac{\omega_0 + \omega_r}{2} t_r = \frac{50 + 37,5}{2} \cdot \ 2 = 87,5 \ \mathrm{rad} \quad \text{ανθωρολογιακά} \ \textbf{[0,2]}$$

Αυτό ισοδυναμεί με $N = \dfrac{\theta_r}{2\pi} = \dfrac{87,5}{2(3,141)} \Rightarrow \boxed{N = 13,9}$ περιστροφές ανθωρολογιακά **[0,2]**

και μήκος τόξου $x_{\pi\varepsilon\rho} = R\theta_r = 0,4 \cdot \ 87,5 = 35 \ \mathrm{m}$ προς τα αριστερά

3.7 Η τριβή είναι εφαπτόμενη στις δύο επιφάνειες και άρα θα μετακινήσει το σημείο εφαρμογής της κατά $\Delta x = \int_0^{x_{\pi\varepsilon\rho}} dx_{\mu\varepsilon\tau} + \int_0^{-x_{\pi\varepsilon\rho}} dx_{\pi\varepsilon\rho} = x_{\mu\varepsilon\tau} - x_{\pi\varepsilon\rho} = 25 - 35 = -10\,\text{m}$.

Οπότε από τον ορισμό του έργου, το έργο της τριβής, που είναι σταθερή δύναμη, βρίσκεται από:

$W_f = f_k \Delta x = \mu_k m g \Delta x$ **[0,2]**

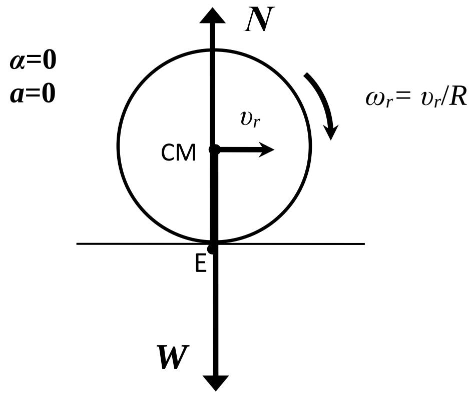
$W_f = 0,25 \cdot 20 \cdot 10 \cdot (-10) = -500\ \text{J}$ **[0,2]**

Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να βρούμε το έργο της τριβής και από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας

$W_f = \Delta K = \Delta K_{\mu\varepsilon\tau} + \Delta K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2} m\left(\upsilon_r^2 - \upsilon_0^2\right) + \frac{1}{2} I\left(\omega_r^2 - \omega_0^2\right) \Rightarrow$ **[0,2]**

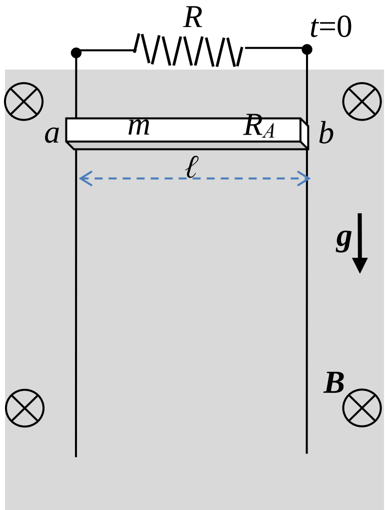
$W_f = \frac{1}{2} 20\left(15^2 - 10^2\right) + \frac{1}{2} 3,2\left(37,5^2 - 50^2\right) = 1250 - 1750 \Rightarrow \boxed{W_f = -500\ \text{J}}$ **[0,2]**

3.8 Αφού επέλθει κύλιση παύει να ασκείται τριβή ολίσθησης εφόσον το σημείο επαφής παραμένει στιγμιαία ακίνητο. Επίσης δεν εμφανίζεται στατική τριβή στο σημείο επαφής. Η στατική τριβή είναι παθητική δύναμη, εμφανίζεται ως αντίδραση όταν επίκειται σχετική κίνηση μεταξύ δυο επιφανειών σε επαφή λόγω κάποιας άλλης δύναμης που προσπαθεί να κινήσει ή κινεί τη μια από τις δύο επιφάνειες. Εδώ δεν υπάρχει καμιά άλλη οριζόντια δύναμη και άρα δεν θα παρουσιαστεί στατική τριβή.



Οπότε οι μόνες δυνάμεις πάνω στον σωλήνα θα είναι το βάρος και η κάθετη αντίδραση του οδοστρώματος οι οποίες αλληλοαναιρούνται. Ο σωλήνας ισορροπεί και το CM του εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με υ_r . Ταυτόχρονα ο σωλήνας περιστρέφεται με ομαλή κυκλική κίνηση με $\omega_r = \upsilon_r/R$ γύρω από το CM. Το ιδανικό άκαμπτο σώμα θα κυλούσε έτσι στο διηνεκές, χωρίς ποτέ να σταματήσει.

ΘΕΜΑ 4ο [3]



Η λεπτή αγώγιμη ράβδος *ab* αφήνεται να πέσει λόγω του βάρους της, μέσα σε οριζόντιο σταθερό μαγνητικό πεδίο, όντας συνεχώς σε επαφή με τις κατακόρυφες αγώγιμες ράγες, ώστε να παράγει ηλεκτρική ενέργεια για κατανάλωση πάνω στο ωμικό φορτίο *R*. Αγνοήστε τις τριβές, την αντίσταση του αέρα και την ωμική αντίσταση των ραγών.

4.1 Να προσδιορίσετε την πολικότητα της επαγωγικής τάσης που αναπτύσσεται στη ράβδο και τη φορά του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα **[0,2]**

4.2 Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση που προκύπτει από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα ώστε να προσδιορίσετε τη χρονική εξάρτηση της ταχύτητας $\upsilon(t)$ της ράβδου **[1,2]**

4.3 Να υπολογίσετε την οριακή ταχύτητα που αποκτά η ράβδος **[0,2]**

4.4 Να κάνετε τη γραφική παράσταση της $\upsilon(t)$ όπου να φαίνεται η οριακή ταχύτητα και η σχέση της αρχικής κλίσης με τη σταθερά χρόνου **[0,3]**

Τη χρονική στιγμή t= 15 s να υπολογίσετε :

4.5 Την ταχύτητα και την επιτάχυνση της ράβδου **[0,3]**

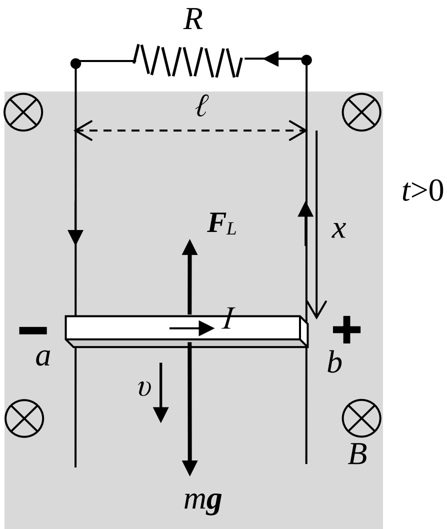
4.6 Την ισχύ που καταναλώνεται στην ωμική αντίσταση *R* **[0,4]**

4.7 Την ισχύ που παράγεται από το βάρος της ράβδου **[0,4]**

Αριθμητικά δεδομένα : R=4,500 Ω, R_A=0,500 Ω, m=1,000 kg, ℓ=2,000 m , g=9,800 N/kg , B=0,500 T

Λύση

4.1 Από το νόμο του Lenz, το επαγωγικό αποτέλεσμα πρέπει να είναι αντίθετο στην αιτία που το προκαλεί, η οποία είναι στην περίπτωσή μας η κίνηση προς τα κάτω λόγω του βάρους. Άρα η δύναμη Laplace που θα εμφανιστεί πρέπει να είναι προς τα πάνω. Για να συμβαίνει αυτό το ρεύμα στη ράβδο πρέπει να ρέει από το σημείο *a* προς το σημείο *b*. Το ρεύμα αυτό καθιστά τη ράβδο μπαταρία συσσωρεύοντας αντίθετα ηλεκτρικά φορτία στα άκρα της. Αφού τα θετικά φορτία θα συσσωρεύονταν στο *b*, το άκρο *b* θα είναι το θετικό άκρο της μπαταρίας και το *a* το αρνητικό. Το ρεύμα στο κύκλωμα ρέει ανθωρολογιακά. **[0,2]**



4.2

Δύναμη βάρους : $W = mg$ προς τα κάτω

Επαγωγική τάση : $\mathscr{E} = B\upsilon\ell$ **[0,1]**

Ηλεκτρικό ρεύμα στο κύκλωμα (νόμος Ohm): $I = \dfrac{\mathscr{E}}{R_{o\lambda}} = \dfrac{B\upsilon\ell}{R + R_A}$ **[0,1]**

Δύναμη Laplace : $F_L = BI\ell = \dfrac{B^2\ell^2}{R_{o\lambda}}\upsilon$ **[0,1]**

2^{ος} νόμος Νεύτωνα (αρχή της ορμής):

$$F_{net} = ma \Rightarrow W - F_L = ma \Rightarrow mg - \frac{B^2\ell^2}{R_{ολ}}\upsilon = ma \Rightarrow a = g - \frac{B^2\ell^2}{mR_{ολ}}\upsilon \Rightarrow a = \frac{B^2\ell^2}{mR_{ολ}}\left(\frac{gmR_{ολ}}{B^2\ell^2} - \upsilon\right) \quad (1)\ \ \mathbf{[0{,}2]}$$

Ο συνδυασμός $\frac{mgR_{ολ}}{B^2\ell^2}$ πρέπει να έχει, όπως και έχει, διαστάσεις ταχύτητας.

Ορίζουμε : $v = \frac{mgR_{ολ}}{B^2\ell^2} = \frac{(1,000)(9,800)(4,500+0,500)}{(0,500)(2,000)} = 49,0 \text{ m/s}$ **[0,1]**

Ο συνδυασμός $\frac{mR_{ολ}}{B^2\ell^2}$ πρέπει να έχει, όπως και έχει, διαστάσεις χρόνου.

Ορίζουμε τη σταθερά χρόνου $\tau = \frac{mR_{ολ}}{B^2\ell^2} = \frac{(1,000)(4,500+0,500)}{(0,500)(2,000)} = 5,00 \text{ s}$. **[0,1]**

Έτσι η εξίσωση (1) έρχεται στην απλούστερη μορφή :

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{1}{\tau}\left(v - \upsilon\right) \quad (2)\ \ \mathbf{[0{,}1]}$$

Ολοκληρώνουμε για να βρούμε την ταχύτητα:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{1}{\tau}\left(v-\upsilon\right) \Rightarrow \frac{d\upsilon}{v-\upsilon} = \frac{dt}{\tau} \Rightarrow \int_0^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{v-\upsilon} = \frac{1}{\tau}\int_0^t dt \quad \mathbf{[0{,}1]}$$

Αλλάζουμε μεταβλητή στο πρώτο ολοκλήρωμα : $u = v - \upsilon \Rightarrow du = -d\upsilon$

$$-\int_{\upsilon_{ορ}}^{\upsilon_{ορ}-\upsilon}\frac{du}{u} = \frac{1}{\tau}\int_0^t dt \Rightarrow \ln u\Big|_v^{v-\upsilon} = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \ln(v-\upsilon) - \ln v = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \ln\left(\frac{v-\upsilon}{v}\right) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \frac{v-\upsilon}{v} = e^{-t/\tau} \Rightarrow \mathbf{[0{,}2]}$$

$$\boxed{\upsilon(t) = v\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = 49,0\left(1 - e^{-t/5}\right) \quad \text{SI} \quad \mathbf{[0{,}1]}}$$

4.3 Οριακή ταχύτητα : $\upsilon_{ορ} = \lim_{t\to\infty}\left(\upsilon(t)\right) = \lim_{t\to\infty}\left[v\left(1-e^{-t/\tau}\right)\right] = v - 0 = v = 49,0 \text{ m/s}$ **[0,2]**

Αλλιώς : $F_{net} = 0 \Rightarrow W - F_{L,τελ} = 0 \Rightarrow BI_{τελ}\ell = mg \Rightarrow B\frac{B\upsilon_{ορ}\ell}{R_{ολ}}\ell = mg \Rightarrow \upsilon_{ορ} = \frac{mgR_{ολ}}{B^2\ell^2} = v$

4.4 Η κλίση της ταχύτητας, που δίνεται από τη συνάρτηση εκθετικής ανάπτυξης : $\upsilon(t) = \upsilon_{ορ}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

είναι η επιτάχυνση και δίνεται από την παράγωγο $\frac{d\upsilon(t)}{dt} = \upsilon_{ορ}(-1)\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-t/\tau} = \frac{\upsilon_{ορ}}{\tau}e^{-t/\tau}$

Για t=0 : $\left.\frac{d\upsilon(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\upsilon_{ορ}}{\tau}e^0 = \frac{\upsilon_{ορ}}{\tau}$ **[0,1]**

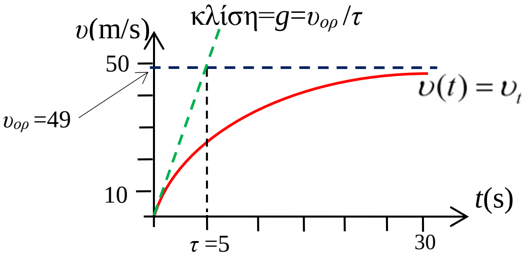
Για να χαράξουμε μια ευθεία με τόση κλίση τραβάμε κάθετη γραμμή από το σημείο $t = \tau$ =5s έως το σημείο τομής με την οριζόντια ευθεία $\upsilon=\upsilon_{ορ}$= 49 m/s. Η ευθεία από την αρχή των αξόνων έως αυτό το σημείο θα έχει πράγματι κλίση:

$$\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon_{ορ} - 0}{\tau - 0}$$

και θα πρέπει να είναι εφαπτόμενη στην καμπύλη. Αυτή θα είναι και η αρχική επιτάχυνση. Στην περίπτωσή μας η αρχική επιτάχυνση πρέπει να είναι ίση με g. Πράγματι :

$$\frac{\upsilon_{ορ}}{\tau} = \frac{mgR_{ολ}\big/B^2\ell^2}{mR_{ολ}\big/B^2\ell^2} = g$$

Χαράσσουμε «καλλιτεχνικά» μια καμπύλη που να αρχίζει από την αρχή των αξόνων, να εφάπτεται αρχικά στην πράσινη ευθεία της ελεύθερης πτώσης ($\upsilon = gt$) και στη συνέχεια να τείνει ασυμπτωτικά στην μπλε οριζόντια ευθεία της οριακής ταχύτητας ($\upsilon = \upsilon_{o\rho}$). Περίπου στο 6τ θα την έχει πλησιάσει



$$\upsilon(t) = \upsilon_t\left(1-e^{-t/\tau}\right) = 49\left(1-e^{-t/5}\right) \text{ (SI)}$$ **[0,2]**

4.5 $\upsilon(t) = \upsilon_{o\rho}\left(1-e^{-t/\tau}\right) \Rightarrow \upsilon(15) = 49\left(1-e^{-15/5}\right) = 49(1-e^{-3}) = 49(1-0{,}04979) = 46{,}6 \text{ m/s}$ **[0,1]**

$a(t) = ge^{-t/\tau} \Rightarrow a(15) = 9{,}800e^{-3} = 0{,}488 \text{ m/s}^2$ **[0,2]**

4.6 $P_R(t) = I^2(t)R = \left(\dfrac{B\upsilon(t)\ell}{R_{o\lambda}}\right)^2 R = \dfrac{B^2\ell^2}{R_{o\lambda}^2}R\upsilon^2(t) \Rightarrow$ **[0,3]**

$P_R(15) = \dfrac{(0{,}500)^2(2{,}000)^2}{5{,}000^2}(4{,}5)\left(49{,}0\left(1-e^{-3}\right)\right)^2 = 390 \text{ W}$ **[0,1]**

4.7 $P_W(t) = W\upsilon(t) = mg\upsilon_{o\rho}(1-e^{-t/\tau}) \Rightarrow$ **[0,3]**

$P_W(15) = (1{,}000)(9{,}800)(49{,}0)(1-e^{-3}) = 456 \text{ W}$ **[0,1]**

[Τα υπόλοιπα 66 W που παράγει το βάρος καταναλώνονται στην ωμική αντίσταση της ράβδου.

$$P_{R_A}(t) = I^2(t)R_A = \frac{B^2\ell^2}{R_{o\lambda}^2}R_A\upsilon^2(t) \Rightarrow \quad P_{R_A}(t) = \frac{(0{,}500)^2(2{,}000)^2}{5{,}000^2}(0{,}500)\left(49{,}0\left(1-e^{-3}\right)\right)^2 = 43{,}4 \text{ W}$$

και στην επιτάχυνση της ράβδου

$$\frac{dK(t)}{dt} = \frac{d\left(m\upsilon^2(t)/2\right)}{dt} = m\upsilon(t)\frac{d\upsilon(t)}{dt} = m\upsilon(t)a(t) = m\upsilon_{o\rho}(1-e^{-t/\tau})ge^{-t/\tau} \Rightarrow$$

$$\frac{dK(15)}{dt} = (1{,}000)(49{,}0)(9{,}800)(1-e^{-3})e^{-3} = 22{,}7 \text{ W}$$

$$dW_{net} = dK \Rightarrow dW_W + dW_{F_L} = dK \Rightarrow mgdx - BI\ell dx = dK \Rightarrow mg\frac{dx}{dt} = BI\ell\frac{dx}{dt} + \frac{dK}{dt} \Rightarrow$$

$$mg\upsilon = B\upsilon\ell I + \frac{dK}{dt} \Rightarrow mg\upsilon = \mathscr{E} I + \frac{dK}{dt} \Rightarrow mg\upsilon = I(R+R_A)I + \frac{dK}{dt} \Rightarrow$$

$$mg\upsilon = I^2R + I^2R_A + \frac{dK}{dt} \Rightarrow P_W = P_R + P_{R_A} + \frac{dK}{dt} \Rightarrow \quad P_{in} = P_{out}$$]