ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2022-23

ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ

Παρασκευή, 17 Φεβρουαρίου 2023: 09:00-11:40 π.μ. Αίθουσες: ΑΠ3_8, ΑΠ3_11, ΒΠ3_11
Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης (kphilippides@uowm.gr)

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα και αξίας 2,5 μονάδων το καθένα
Μεταφέρετε όλα τα σχήματα στην κόλλα σας.
Να δώσετε τα αριθμητικά αποτελέσματα με ακρίβεια τριών σημαντικών ψηφίων.
Η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης είναι $g = 9{,}80$ N/kg

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

1.1 [0,1] Δείξτε ότι για την ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης ισχύει $gR^2 = GM$ όπου R η ακτίνα της Γης και M η μάζα της Γης. (Θα το χρειαστείτε για τους αριθμητικούς υπολογισμούς)

1.2 [0,4] Βρείτε την ταχύτητα διαφυγής υ_e από την επιφάνεια της Γης και την ταχύτητα υ_c της κυκλικής τροχιάς ακριβώς γύρω από την επιφάνεια της Γης (δηλαδή με ακτίνα τροχιάς όση η ακτίνα της Γης) *Δίνεται η ακτίνα της Γης* R=6.371 km.

Βλήμα εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_c \le \upsilon_0 \le \upsilon_e$ και σε γωνία α από την κατακόρυφο ώστε να εκτελέσει βολή.

1.3 [1] Δείξτε ότι τα μέτρα των ταχυτήτων υ_p και υ_a στο περίγειο και στο απόγειο αντίστοιχα, δίνονται από την έκφραση : $\upsilon_{p,a} = \dfrac{\upsilon_e}{2\delta \sin\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1-4\delta^2(1-\delta^2)\sin^2\alpha}\right)$ όπου $\delta = \dfrac{\upsilon_0}{\upsilon_e}$

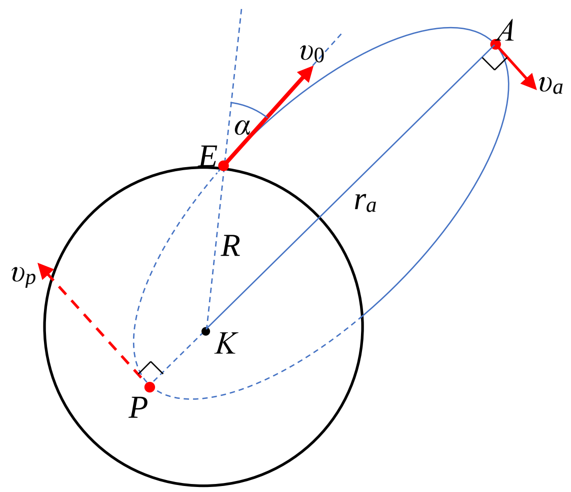
1.4 [0,1] Δείξτε ότι στον παραπάνω τύπο η έκφραση κάτω από τη ρίζα είναι θετική και ότι $2\delta^2 \ge 1$.

1.5 [0,5] Επιβεβαιώστε ότι η παραπάνω έκφραση ικανοποιεί τα απαραίτητα όρια :

α) $\upsilon_0 = \upsilon_e \Rightarrow \upsilon_a = 0$ και β) $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \upsilon_p = \upsilon_0$

Εξηγείστε γιατί πρέπει να ικανοποιούνται τα παραπάνω όρια.

1.6 [0,4] Αν το βλήμα εκτοξεύεται με υ_0 =10,0 km/s και α=53,13°, υπολογίστε το μέτρο της ταχύτητάς του υ_a στο απόγειο και την απόσταση του απογείου r_a από το κέντρο της Γης.
(*Να βάζετε την* υ_e *με τουλάχιστον* 5 *ψηφία και στο τέλος θα στρογγυλοποιείτε τα αποτελέσματα στα* 3)



ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ 1

1.1 [0,1] 1 Στην επιφάνεια της Γης: $W = F_G \Rightarrow \cancel{m} g = G\dfrac{\cancel{m}M}{R^2} \Rightarrow gR^2 = GM$ [0,1]

1.2 [0,4] <u>Ταχύτητα διαφυγής</u> είναι η αρχική ταχύτητα εκτόξευσης που επιτρέπει στο βλήμα μόλις και να φτάσει στο άπειρο, δηλαδή με $\upsilon_\infty = 0$. Από διατήρηση ενέργειας :

$$\frac{1}{2}m\upsilon_e^2 - \frac{GmM}{R} = \frac{1}{2}m\upsilon_\infty^2 - \frac{GmM}{\infty} \Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon_e^2 - \frac{GM}{R} = 0 \Rightarrow$$

$$\upsilon_e^2 = \frac{2GM}{R} = 2gR \Rightarrow \upsilon_e = \sqrt{2gR} = \sqrt{2\cdot\ 9,80\cdot\ 6,371\times10^6} = 11.17460\times10^3 = 11,2\ \text{km/s}\ [0,2]$$

Στην <u>κυκλική τροχιά</u> η βαρυτική δύναμη παίζει το ρόλο της κεντρομόλου.

$$F_{net} = ma \Rightarrow F_G = ma_c \Rightarrow G\frac{mM}{R^2} = m\frac{\upsilon_c^2}{R} \Rightarrow \upsilon_c^2 = \frac{GM}{R} = \frac{\upsilon_e^2}{2} \Rightarrow \upsilon_c = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \frac{\upsilon_e}{\sqrt{2}} = \frac{1.17460\times10^3}{\sqrt{2}} = 7,90\ \text{km/s}$$

[0,2]

[*Αν δίνονταν η μάζα* M= 6,00 ×10^{24} kg *και η ακτίνα της Γης* R=6.400 km *καθώς και η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας* G=20/3×10^{-11} $m^3kg^{-1}s^{-2}$ *τότε*

$$\upsilon_e^2 = \frac{2GM}{R} \Rightarrow \upsilon_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2\frac{20}{3}10^{-11}\frac{6\times10^{24}}{64\times10^5}} = \sqrt{\frac{5}{4}10^8} = \frac{\sqrt{5}}{2}10^4 = 1,118034\times10^4 = 11,2\,\text{km/s}\ ]$$

1.3 [1,0] Στο απόγειο και στο περίγειο η ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτίνα οπότε η στροφορμή θα είναι ίση με : $L = m\upsilon r$ (0) για $r = r_a, r_p$

Η στροφορμή και η μηχανική ενέργεια διατηρούνται. **Εξισώνω τις τιμές τους, για τα σημεία που ικανοποιούν την (0), με τις αρχικές τιμές στο σημείο εκτόξευσης Ε:**

Διατήρηση στροφορμής : $L = L_E \Rightarrow m\upsilon r = m\upsilon_0 R\sin\alpha \Rightarrow r = \dfrac{\upsilon_0 R\sin\alpha}{\upsilon}$ (1) [0,2]

Διατήρηση μηχανικής ενέργειας: $E = E_E \Rightarrow \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 - \dfrac{GmM}{r} = \dfrac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \dfrac{GmM}{R}$ (2) [0,2]

[άμα εξίσωνα τις τιμές μεταξύ τους $L_a = L_p$, $E_a = E_p$ θα έπαιρνα 2 εξισώσεις με 4 αγνώστους $r_a, r_p, \upsilon_a, \upsilon_p$]

Αντικαθιστώντας την (1) στη (2) παίρνω μια δευτεροβάθμια εξίσωση για την ταχύτητα ($a\upsilon^2 + b\upsilon + c = 0$)

$$\upsilon^2 - \frac{2GM}{\upsilon_0 R\sin\alpha}\upsilon + \frac{2GM}{R} - \upsilon_0^2 = 0\ \ [0,1]$$

με : $a = 1,\quad b = -\dfrac{2GM}{\upsilon_0 R\sin\alpha},\quad c = \dfrac{2GM}{R} - \upsilon_0^2$ και διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4ac = \dfrac{4G^2M^2}{\upsilon_0^2 R^2\sin^2\alpha} - \dfrac{8GM}{R} + 4\upsilon_0^2$

Οι λύσεις της είναι :

$$\upsilon_{p,a} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{GM}{\upsilon_0 R\sin\alpha} \pm \sqrt{\frac{G^2M^2}{\upsilon_0^2 R^2\sin^2\alpha} - \frac{2GM}{R} + \upsilon_0^2}\qquad (3)\ [0,2]$$

Η μεγαλύτερη λύση (+), αντιστοιχεί στην ταχύτητα στο περίγειο υ_p (που στην περίπτωσή μας είναι μέσα στη Γη), ενώ η μικρότερη (–), αντιστοιχεί στην ταχύτητα στο απόγειο υ_a . Αυτά είναι τα δύο μόνα σημεία της τροχιάς που η ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτίνα και ισχύει $r_a\upsilon_a = r_p\upsilon_p = L/m$.

Αντικαθιστώντας $\dfrac{GM}{R} = \dfrac{\upsilon_e^2}{2}$ και ορίζοντας $\delta = \dfrac{\upsilon_0}{\upsilon_e}$, η έκφραση (3) γίνεται :

$$\upsilon_{p,a} = \frac{\upsilon_e^2}{2\upsilon_0\sin\alpha} \pm \sqrt{\frac{\upsilon_e^4}{4\upsilon_0^2\sin^2\alpha} - \upsilon_e^2 + \upsilon_0^2} = \frac{\upsilon_e}{2\delta\sin\alpha} \pm \sqrt{\frac{\upsilon_e^2}{4\delta^2\sin^2\alpha} - \upsilon_e^2(1-\delta^2)}\qquad (4)\ \ [0,1]$$

Ο πρώτος όρος κάτω από τη ρίζα είναι το τετράγωνο του όρου έξω από τη ρίζα. Τον βγάζω κοινό παράγοντα και παίρνω

$$\upsilon_{p,a} = \frac{\upsilon_e}{2\delta\sin\alpha} \pm \sqrt{\frac{\upsilon_e^2}{4\delta^2\sin^2\alpha} - \upsilon_e^2(1-\delta^2)\frac{4\delta^2\sin^2\alpha}{4\delta^2\sin^2\alpha}} = \frac{\upsilon_e}{2\delta\sin\alpha} \pm \frac{\upsilon_e}{2\delta\sin\alpha}\sqrt{1-(1-\delta^2)4\delta^2\sin^2\alpha}\qquad (5)$$

Παραγοντοποιώ ξανά και άρα

$$\upsilon_{p,a} = \frac{\upsilon_e}{2\delta\sin\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\delta^2(1-\delta^2)\sin^2\alpha}\right)\qquad [0,2]$$

1.4 [0,1] Για να είναι οι λύσεις πραγματικές και θετικές πρέπει η διακρίνουσα, δηλαδή ισοδύναμα η έκφραση κάτω από τη ρίζα να είναι θετική. Για αυτό αρκεί να είναι θετική όταν ο αρνητικός όρος γίνεται μέγιστος, δηλαδή το ημίτονο παίρνει τη μέγιστη τιμή του όπου $\sin^2\alpha = 1$.

$1-4\delta^2(1-\delta^2) = 1-2\cdot 2\delta^2\cdot 1+\left(2\delta^2\right)^2 = (2\delta^2-1)^2 \geq 0$ επειδή είναι τέλειο τετράγωνο. [0,05]

Επειδή $\upsilon_c \leq \upsilon_0 \leq \upsilon_e \Rightarrow \frac{\upsilon_e}{\sqrt{2}} \leq \upsilon_0 \leq \upsilon_e \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \delta \leq 1 \Rightarrow 2\delta^2 \geq 1$ [0,05]

1.5 [0,5]

α) $\upsilon_0 = \upsilon_e \Rightarrow \delta = 1 \Rightarrow \upsilon_a = \frac{\upsilon_e}{2\cdot 1\cdot \sin\alpha}\left(1-\sqrt{1-4\cdot 1^2(1-1^2)\sin^2\alpha}\right) = \frac{\upsilon_e}{2\sin\alpha}\left(1-\sqrt{1}\right) = 0$ [0,15]

Αν η αρχική ταχύτητα είναι η ταχύτητα διαφυγής τότε η μεγαλύτερη απόσταση που θα φτάσει το βλήμα (απόγειο) θα είναι το άπειρο όπου θα έχει ταχύτητα $\upsilon_a = \upsilon_\infty = 0$. [0,1]

β) $\alpha = 90^o \Rightarrow \sin\alpha = 1 \Rightarrow \upsilon_p = \frac{\upsilon_e}{2\delta}\left(1+\sqrt{\left(2\delta^2-1\right)^2}\right) = \frac{\upsilon_e}{2\delta}\left(1+2\delta^2-1\right) = \upsilon_e\delta = \upsilon_0$ [0,15]

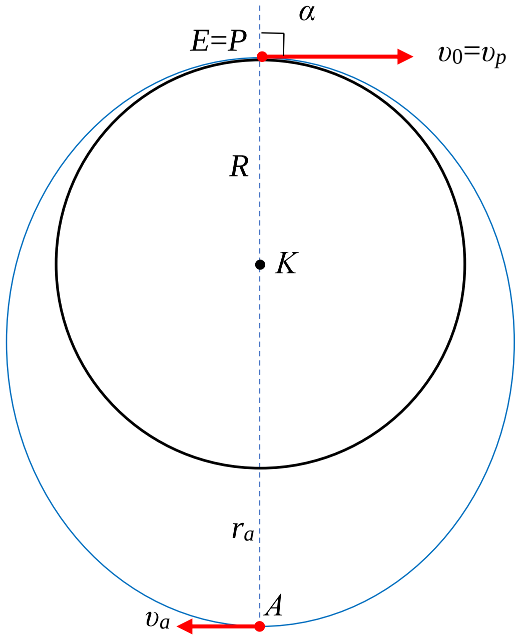
Για $\alpha = 90^o$ η αρχική ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτίνα (παράλληλη στο έδαφος) και αφού στη συνέχεια η ακτίνα θα μεγαλώσει αυτό σημαίνει ότι βρίσκομαι στο περίγειο. Δηλαδή το σημείο εκτόξευσης E=P είναι το περίγειο της τροχιάς του βλήματος. [0,1]

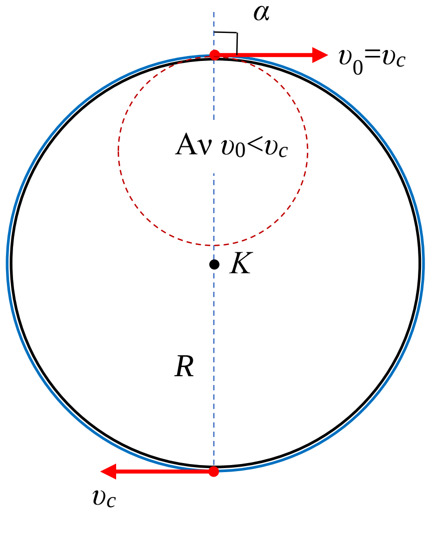
Το βλήμα μπαίνει σε ελλειπτική τροχιά που δεν χτυπάει τη Γη. Επιστρέφει και περνάει πάλι εφαπτομενικά από το E.

Αν η υ_0 είναι η ταχύτητα της κυκλικής τροχιάς, $\upsilon_0=\upsilon_c$, το βλήμα θα μπει σε τροχιά και θα εκτελεί κυκλική κίνηση λίγο πάνω από το έδαφος.

Αν η αρχική ταχύτητα είναι μικρότερη από την ταχύτητα της κυκλικής τροχιάς, $\upsilon_0<\upsilon_c$, τότε η βολή παράλληλα με το έδαφος δεν είναι εφικτή. Το βλήμα δεν θα ξεκολλήσει από την επιφάνεια αλλά θα καρφωθεί κατευθείαν στο έδαφος, λόγω της βαρύτητας.

Αν $\upsilon_0=\upsilon_e$ τότε πάλι $\upsilon_p = \frac{\upsilon_e}{2\cdot 1\cdot 1}\left(1+\sqrt{1-4\cdot 1^2(1-1^2)\sin^2\alpha}\right) = \frac{\upsilon_e}{2}\left(1+\sqrt{1}\right) = \upsilon_e$





1.6 [0,4] $\delta = \frac{\upsilon_0}{\upsilon_e} = \frac{10,0}{11,175} = 0,89489$, $\sin\alpha = \sin(53,13^o) = 0,80000$

$1-4\delta^2(1-\delta^2)\sin^2\alpha = 1-4(0,89489)^2\left[1-(0,89489)^2\right]0,80000^2 = 0,59167$ [0,1]

$$\upsilon_a = \frac{\upsilon_e}{2\delta \sin\alpha}\left(1-\sqrt{1-4\delta^2(1-\delta^2)\sin^2\alpha}\right) = \frac{11,175}{2(0,89489)0,80000}\left(1-\sqrt{0,59167}\right) = 1,8013 = 1,80 \text{ km/s}$$

[0,15]

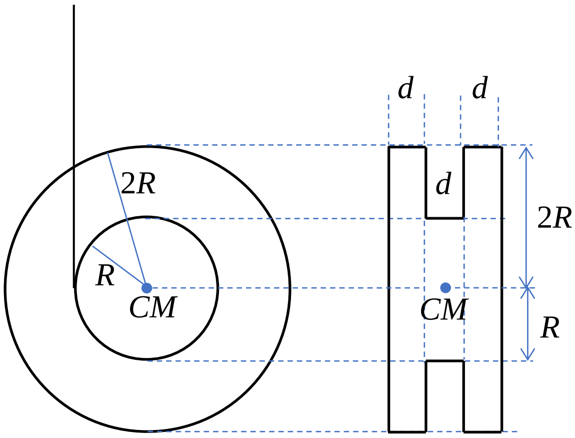
Από την (1) $r_a = \frac{\upsilon_0 R\sin\alpha}{\upsilon_a} = \frac{10,0\cdot\ 6371\cdot\ 0,80000}{1,8013} = 28.295 = 28.300 \text{ km}$ [0,15]

ΘΕΜΑ 2

2.1 [1] Γιο-γιο αποτελείται από τρεις ισοπαχείς δίσκους ομογενούς υλικού. Η ακτίνα των ακραίων δίσκων είναι διπλάσια από αυτή του κεντρικού. Δώστε την έκφραση της στροφικής αδράνειας του γιο-γιο *I*, σαν συνάρτηση της συνολικής μάζας του *M* και της ακτίνας του κεντρικού δίσκου *R*.

2.2 [1] Το γιο-γιο αφήνεται να ξετυλιχτεί από αβαρές νήμα που είναι τυλιγμένο στον κεντρικό δίσκο. Το νήμα δεν ολισθαίνει όπως ξετυλίγεται. Θεωρήστε ότι ξετυλίγεται κατακόρυφα. Να δείξετε ότι η επιτάχυνση του γιο-γιό είναι ανεξάρτητη της ακτίνας και της μάζας του (άρα και του υλικού) και είναι ίση με (6/17)*g*.

2.3 [0,5] Αν η μάζα του γιο-γιό είναι *M*=170 g βρείτε την τάση του νήματος.



ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ 2

2.1 [1]

$$I = 2I_{\alpha\kappa\rho} + I_{\mu\varepsilon\sigma} = 2\frac{1}{2}M_{\alpha\kappa\rho}(2R)^2 + \frac{1}{2}mR^2 = \left(4M_{\alpha\kappa\rho} + \frac{1}{2}m\right)R^2 \quad [0,4]$$

Μάζα μεσαίου δίσκου = $m = \rho V_1 = \rho d\pi R^2$

Μάζες ακριανών δίσκων = $M_{\alpha\kappa\rho} = \rho V_2 = \rho d\pi(2R)^2 = 4m$

Μάζα γιό-γιό = $M = M_{\alpha\kappa\rho} + m + M_{\alpha\kappa\rho} = 4m + m + 4m = 9m \Rightarrow m = \frac{M}{9}$ [0,4]

Ροπή αδράνειας γιο-γιό :

$$I = \left(4M_{\alpha\kappa\rho} + \frac{1}{2}m\right)R^2 = \left(16m + \frac{1}{2}m\right)R^2 = \frac{33}{2}mR^2 = \frac{33}{2}\frac{M}{9}R^2 = \frac{11}{6}MR^2 \quad [0,2]$$

2.2 [1] Το νήμα δεν ολισθαίνει : $a = \alpha R$ [0,1]

Νόμοι Νεύτωνα μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης:

$$Mg - T = Ma \qquad (1)\ [0,3]$$

$$TR = I\alpha \Rightarrow T = \frac{I}{R}\frac{a}{R} \Rightarrow T = \left(I/R^2\right)a \qquad (2)\ [0,3]$$

Αντικαθιστούμε την (2) στην (1) και παίρνουμε:

$$Mg - \left(I/R^2\right)a = Ma \Rightarrow \left(M + I/R^2\right)a = Mg \Rightarrow a = \frac{M}{M + I/R^2}g$$

Άρα $a = \frac{M}{M + (11/6)M}g = \frac{1}{1 + (11/6)}g = \frac{1}{17/6}g = \frac{6}{17}g$ [0,3]

Ανεξάρτητη και από την ακτίνα *R* (μέγεθος) και από τη μάζα *M* , άρα ανεξάρτητη και από το υλικό του γιο-γιο. Εξαρτάται μόνο από το σχήμα.

2.3 [0,5] $T = \frac{I}{R^2}a \Rightarrow T = \frac{11}{6}MR^2\cdot\ \frac{I}{R^2}\cdot\ \frac{6}{17}g = \frac{11}{17}Mg = \frac{11}{17}(0,170)9,8 = 1,078 = 1,08\,\text{N}$

Αν δεν είχατε κάνει την 2.1 χρησιμοποιείτε στην εξίσωση (1), την απάντηση που δίνεται στην 2.2 (για σιγουριά) και χωρίς αριθμομηχανή:

$$T = M(g-a) = M\left(g - \frac{6}{17}g\right) = \frac{11}{17}Mg = \frac{11}{17}(0,17)(9,80) = 11(0,01)(9,80) = (0,11)(9,80) =$$
$$= 0,98 + 0,098 = 1,078 = 1,08\,\mathrm{N}$$

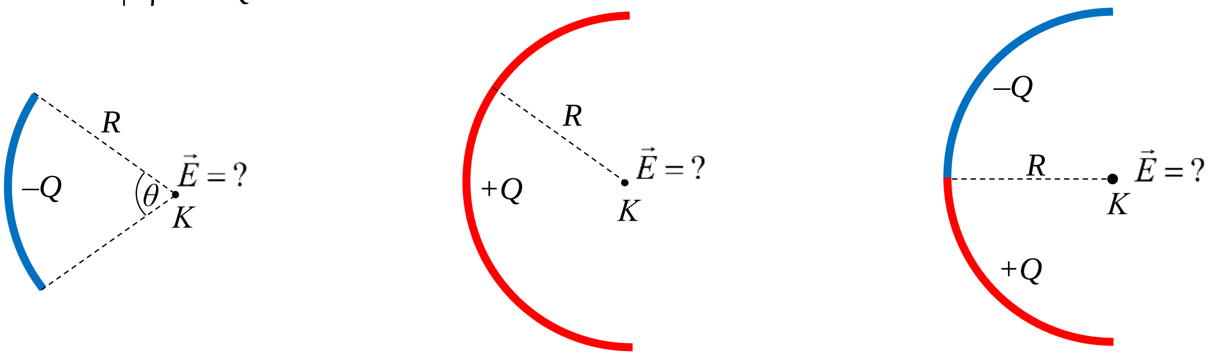
ΘΕΜΑ 3

Βρείτε την ένταση $\vec{E}$ του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται στο κέντρο Κ του κύκλου των παρακάτω λεπτών και ομοιόμορφα ηλεκτρικά φορτισμένων κυκλικών τόξων ακτίνας *R*. Δείξτε, κάθε φορά, τη φορά του πεδίου σε σχήμα.

3.1 [1] Τόξο αρνητικού φορτίου –*Q* που εκτείνεται σε γωνία *θ*

3.2 [0,5] Ημικυκλικό τόξο θετικού φορτίου +Q

3.3 [1] Ημικυκλικό τόξο το οποίο στο ένα μισό του είναι φορτισμένο με αρνητικό φορτίο – Q και στο άλλο μισό με θετικό φορτίο +*Q*?



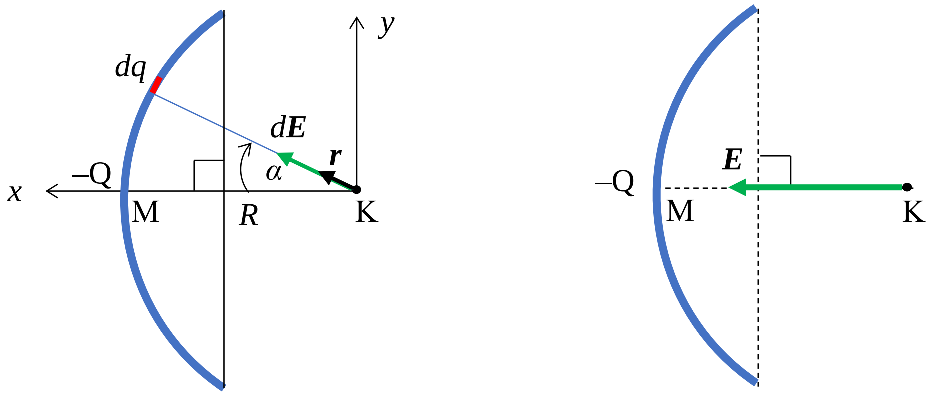
ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ 3

3.1 [1,0]

Κάθε τόξο κύκλου ακτίνας *R* που εκτείνεται σε γωνία *θ* έχει μήκος *s*=*θR* και άρα γραμμική πυκνότητα $\lambda = \frac{-Q}{s} = \frac{-Q}{\theta R}$. [0,1]

Το κάθε στοιχειώδες τμήμα του τόξου που βρίσκεται σε γωνία *α* από τον άξονα *x* και εκτείνεται σε γωνία *dα* έχει φορτίο με μέτρο $|dq| = |\lambda| ds = |\lambda| R d\alpha$ και απέχει απόσταση *R* από το κέντρο. [0,1]

Έτσι δημιουργεί στο κέντρο Κ πεδίο έντασης $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|dq|}{R^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|dq|}{R^2}(\hat{x}\cos\alpha + \hat{y}\sin\alpha)$. Το $\hat{r} = \cos\alpha\,\hat{x} + \sin\alpha\,\hat{y}$ ορίζεται στο παρακάτω σχήμα. Έχει φορά από το κέντρο προς το αρνητικό φορτίο *dq*. [0,2]



Από συμμετρία οι *y* συνιστώσες όλων των $dE_y = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|dq|}{R^2}\right)\sin\alpha$, θα αθροίζουν μηδέν. Επειδή για κάθε στοιχειώδες τμήμα του τόξου που βρίσκεται σε γωνία *α* πάνω από τη διχοτόμο (sin*α*) υπάρχει το συμμετρικό του κάτω από τη διχοτόμο σε γωνία –*α* που έχει συνιστώσα *y* ηλεκτρικού πεδίου αντίθετη με του πάνω ($\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$). Έτσι, το πεδίο που δημιουργείται στο κέντρο του κύκλου θα είναι κάθετο στη χορδή του, δηλαδή θα είναι στη διεύθυνση της διχοτόμου Κx του σχήματος. [0,2]

Αθροίζουμε τις x συνιστώσες για να πάρουμε το συνολικό πεδίο

$$E_x = \int_s dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^Q \frac{|dq|}{R^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\theta/2}^{\theta/2} \frac{|\lambda| R d\alpha}{R^2}\cos\alpha =$$

$$= \frac{|\lambda|}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\theta/2}^{\theta/2} \cos\alpha\, d\alpha = \frac{|\lambda|}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\sin(\theta/2) - \sin(-\theta/2)\right) \Rightarrow$$

$$= \frac{|\lambda|\sin(\theta/2)}{2\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{\sin(\theta/2)}{\theta}$$

Άρα το ηλεκτρικό πεδίο κυκλικού τόξου ομοιόμορφου φορτίου $-Q$ που εκτείνεται σε γωνία θ είναι:

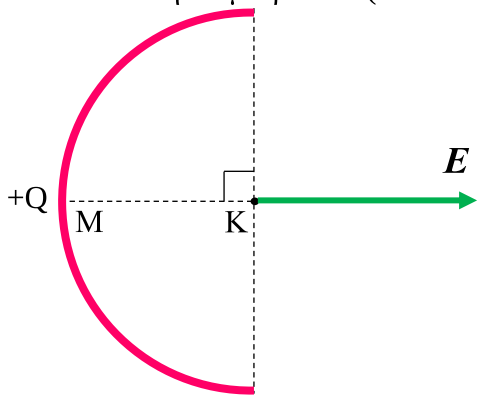
$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{\sin(\theta/2)}{\theta}\hat{x}$ κάθετα στη χορδή του (πάνω στη διχοτόμο $\overrightarrow{\mathrm{KM}}$) [0,3+0,1]

Έλεγχος: Αν βάλω θ=2π πρέπει να πάρω μηδέν. Ισχύει;

$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{\sin(2\pi/2)}{2\pi}\hat{x} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{\sin(\pi)}{2\pi}\hat{x} = 0$ OK ισχύει, αφού $\sin(\pi) = 0$

3.2 [0,5] Για ημικύκλιο, θ=π: $E_x = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$ [0,4]

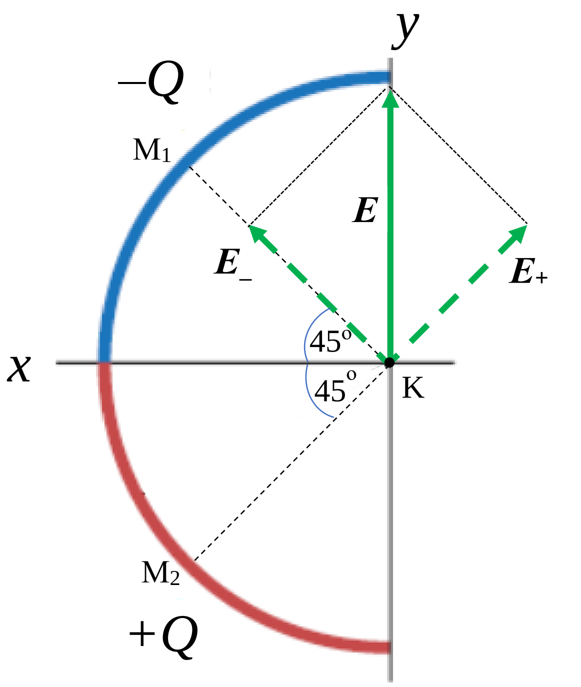
κάθετα στη διάμετρό του (πάνω στη διχοτόμο $\overrightarrow{\mathrm{MK}}$) [0,1]



3.3 [1,0] Για τεταρτοκύκλιο, θ=π/2**:** $E_x = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{\sqrt{2}/2}{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$

κάθετα στη χορδή του (πάνω στη διχοτόμο $\overrightarrow{\mathrm{M_2K}}$ για +Q ή στην $\overrightarrow{\mathrm{KM_1}}$ για –Q) [0,4]

Τα πεδία των δύο αντίθετα φορτισμένων τεταρτοκυκλίων θα αθροιστούν διανυσματικά και το πεδίο θα είναι στη διεύθυνση παράλληλα με τη διάμετρο



Δύο αντίθετα φορτισμένα τεταρτοκύκλια το καθένα με φορτίο μέτρου Q:

$$E=\sqrt{E_+^2+E_-^2}=\sqrt{2}E_+=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}=\frac{1}{\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2} \qquad [0,4]$$

με κατεύθυνση στον άξονα Ky [0,2]

ΘΕΜΑ 4

Διαθέτουμε οριζόντια δέσμη μονοσθενών ιόντων νικελίου Ni^+ διαφόρων ταχυτήτων. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα φασματογράφο μάζας για να ξεχωρίσουμε το νικέλιο ${}^{58}_{28}Ni$ από τα ισότοπά του, να μετρήσουμε τη μάζα του και να προσδιορίσουμε το μαζικό αριθμό x του πιο άφθονου ισοτόπου του ${}^{x}_{28}Ni$

Η δέσμη αρχικά περνάει μέσα από κατακόρυφο ηλεκτρικό πεδίο σταθερού μέτρου έντασης E = 1,30×10^4 N/C και φοράς προς τα πάνω, στο χώρο του οποίου υπάρχει και σταθερό μαγνητικό πεδίο με ένταση B= 650 mT που διασταυρώνεται κάθετα με το ηλεκτρικό.

4.1 [0,2] Τι φορά πρέπει να έχει το μαγνητικό πεδίο B ώστε κάποια από τα ιόντα της δέσμης να διασχίσουν το χώρο των διασταυρούμενων πεδίων χωρίς παρέκκλιση;

4.2 [0,3] Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας των ιόντων που διαπερνούν το χώρο των διασταυρούμενων πεδίων χωρίς παρέκκλιση;

Στη συνέχεια η δέσμη που απέμεινε εισέρχεται σε χώρο σταθερού οριζόντιου μαγνητικού πεδίου, έντασης B' = 0,18 T με διεύθυνση κάθετη στην ταχύτητά των ιόντων. Τα ιόντα διαγράφουν κυκλικές τροχιές και καταλήγουν πάνω σε κατακόρυφη φωτογραφική πλάκα στην οποία αφήνουν σημάδια αντιδιαμετρικά του σημείου εισόδου. Το πιο έντονο σημάδι $\left({}^{58}_{28}Ni\right)$ είναι σε απόσταση d_0 = 133,4 mm από το σημείου εισόδου.

Το δεύτερο πιο έντονο σημάδι $\left({}^{x}_{28}Ni\right)$ είναι σε απόσταση d_1 =138,0 mm

4.3 [0,5] Πόση είναι η μάζα του ${}^{58}_{28}Ni$;

4.4 [0,8] Αν η μάζα ενός νετρονίου είναι 1,674 927 498×10^{-27} kg, ποιος είναι ο μαζικός αριθμός x του μεγαλύτερου σε αφθονία ισοτόπου του νικελίου;

4.5 [0,3] Πόσο χρόνο χρειάζεται το καθένα από τα παραπάνω δύο διαφορετικά ιόντα για να διαγράψει την ημικυκλική του τροχιά

4.6 [0,4] Να σχεδιάσετε όλη τη διάταξη δείχνοντας τη φορά όλων των πεδίων, την κατεύθυνση της δέσμης, τις τροχιές των ιόντων που διαπερνούν χωρίς παρέκκλιση από τα διασταυρούμενα πεδία και το διαχωρισμό τους από το δεύτερο μαγνητικό πεδίο.

Δίνεται e = 1.602 176 634×10^{-19} C *ακριβώς*

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ 4

4.1 [0,2] Η δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο στα μονοσθενή θετικά ιόντα θα είναι προς τα πάνω $\hat{y}$:

$$\vec{F}_E=e\vec{E}=eE\hat{y}$$

Άρα η δύναμη από το μαγνητικό πεδίο πρέπει να είναι προς τα κάτω $-\hat{y}$: $\vec{F}_B = -F_B\hat{y}$.
Η ταχύτητα είναι στην κατεύθυνση $\hat{x}$: $\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{x}$.
Το μαγνητικό πεδίο πρέπει να είναι κάθετο και στην ταχύτητα ώστε το ιόν να έκανε μόνο κυκλική κίνηση και όχι σπειροειδή. Άρα πρέπει να είναι κάθετο στη σελίδα, δηλαδή ή στην κατεύθυνση $\hat{z}$ (προς τα έξω της σελίδας) ή στην κατεύθυνση $-\hat{z}$ (προς τα μέσα της σελίδας). Από τον κανόνα του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι πρέπει να είναι **προς τα έξω της σελίδας**, δηλαδή προς την κατεύθυνση $\hat{z}$

$$\vec{F}_B = e\vec{\upsilon}\times\vec{B} \Rightarrow -F_B\hat{y} = e\upsilon B\,\hat{x}\times\hat{b} \Rightarrow \hat{b} = \hat{z} \quad \text{επειδή } \hat{x}\times\hat{z} = -\hat{y}$$

4.2 [0,3] Οι δύο αντίθετες δυνάμεις θα έχουν ίσα μέτρα

$$F_B = F_E \Rightarrow q\upsilon B = qE \Rightarrow \upsilon = \frac{E}{B} \Rightarrow \upsilon = \frac{1,30\times10^4 \text{ N/C}}{0,650 \text{ T}} = 2,00\times10^4 \text{ m/s}$$

[τον τύπο $\upsilon = \dfrac{E}{B}$ πρέπει να τον αποδείξετε, δεν μπορείτε να τον πάρετε έτοιμο]

4.3 [0,5] Στο δεύτερο μαγνητικό πεδίο τα ιόντα θα εκτελέσουν ομαλή κυκλική κίνηση επειδή μπαίνουν κάθετα στις γραμμές του πεδίου και η μαγνητική δύναμη θα είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητά τους, παρέχοντας την κεντρομόλο δύναμη.

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \Rightarrow F_B = ma_c \Rightarrow e\upsilon B = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow m = \frac{eBR}{\upsilon} \quad [0,2]$$

[τον τύπο $m = \dfrac{eBR}{\upsilon}$ πρέπει να τον αποδείξετε, δεν μπορείτε να τον πάρετε έτοιμο]

$$R_0 = \frac{d_0}{2} = \frac{133,4\times10^{-3}}{2} = 66,70\times10^{-3} \text{ m} \ [0,1]$$

Η μάζα του $^{58}_{28}\text{Ni}$ είναι :

$$m_0 = \frac{eB'R_0}{\upsilon} = \frac{(1.602\ 176\ 634\times10^{-19})(0,180)(66,70\times10^{-3})}{2,00\times10^4} = 9,617866\times10^{-26} = 9,62\times10^{-26} \text{ kg} \ [0,2]$$

4.4 [0,8] $R_1 = \dfrac{d_1}{2} = \dfrac{138,0\times10^{-3}}{2} = 69,00\times10^{-3}$ m [0,1]

Η μάζα του $^{x}_{28}\text{Ni}$ είναι :

$$m_1 = \frac{eB'R_1}{\upsilon} = \frac{(1.602\ 176\ 634\times10^{-19})(0,180)(69,00\times10^{-3})}{2,00\times10^4} = 9,949517\times10^{-26} = 9,95\times10^{-26} \text{ kg} \ [0,2]$$

Ή από $\dfrac{m_1}{m_0} = \dfrac{R_1}{R_0} \Rightarrow m_1 = m_0\dfrac{R_1}{R_0} = 9,617866\times10^{-26}\dfrac{690}{677} = 9,949517\times10^{-26} = 9,95\times10^{-26}$ kg

Αγνοώντας τις ενέργειες σύνδεσης των πυρήνων (η μάζα τους είναι λίγο μικρότερη από το άθροισμα των μαζών των συστατικών τους, πρωτονίων και νετρονίων) η διαφορά των μαζών θα προέρχεται χοντρικά από τη μάζα των πρόσθετων *n* νετρονίων που έχει το ισότοπο $^{x}_{28}\text{Ni}$

$$n = \frac{m_1 - m_0}{m_n} = \frac{(9,949517 - 9,617866)\times10^{-26}}{1,674\ 927\ 498\times10^{-27}} = 1,98009 = 2 \text{ παραπάνω νετρόνια} \ [0,4]$$

Ο μαζικός αριθμός είναι : $\quad \text{x} = 58 + n = 58 + 2 = 60$ [0,1]

Το ισότοπο είναι το $^{60}_{28}\text{Ni}$

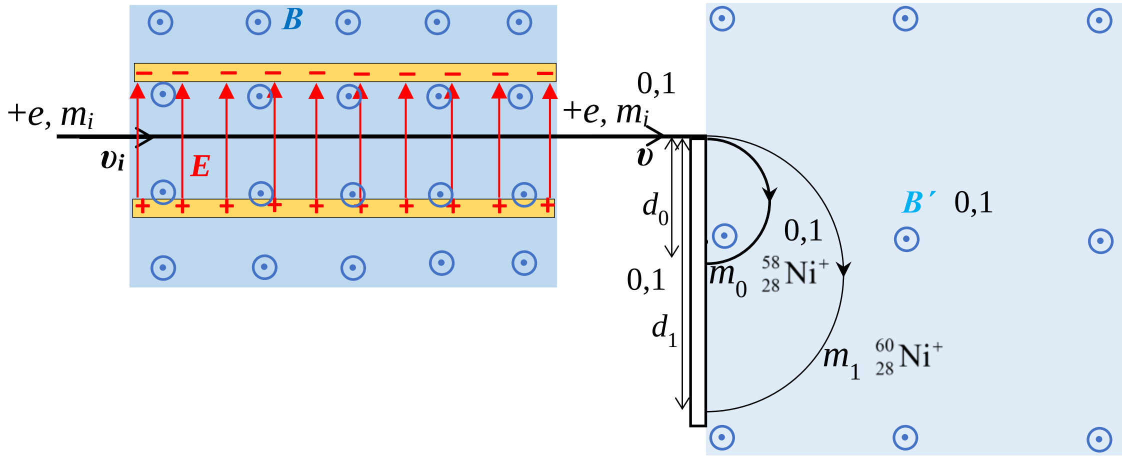
4.5 [0,3] $T = \dfrac{2\pi R}{\upsilon} = \dfrac{2\pi m}{eB'}$ και άρα $\dfrac{t_1}{t_0} = \dfrac{T_1/2}{T_0/2} = \dfrac{m_1}{m_0}$ [0,1]

$$t_0 = \frac{T_0}{2} = \frac{\pi R_0}{\upsilon} = \frac{\pi(66,70\times10^{-3})}{2,00\times10^4} = 104,7721\times10^{-7} = 10,5\times10^{-6} = 10,5\,\mu\text{s} \quad [0,1]$$

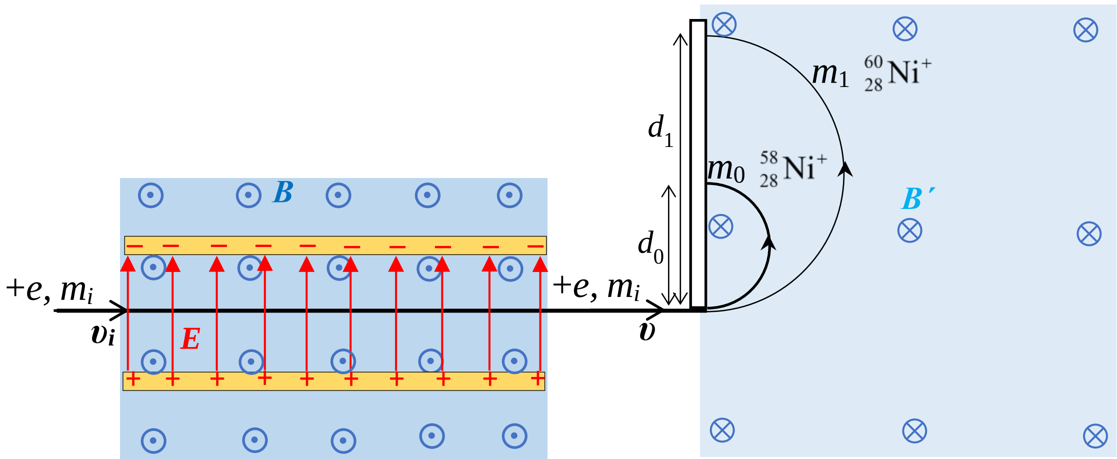
$$t_1 = t_0\frac{m_1}{m_0} = (104,7721\times10^{-7})\frac{9,949517}{9,617866} = 108,3849\times10^{-7} = 10,8\ \mu\text{s}$$

ή απευθείας $t_1 = \dfrac{T_1}{2} = \dfrac{\pi R_1}{\upsilon} = \dfrac{\pi(69,00\times10^{-3})}{2,00\times10^4} = 108,3849\times10^{-7} = 10,8\ \mu\text{s}$ [0,1]

4.6 [0,4]



Ή



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ