ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2021-22

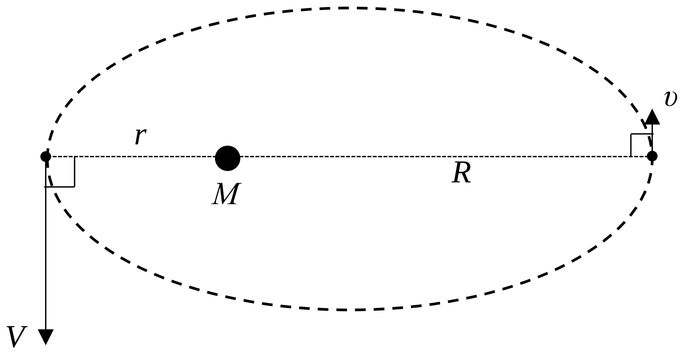
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ

Πέμπτη, 8 Σεπτεμβρίου 2022 9-11 π.μ. αίθ. 1, 3, 5, 7, 109
Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης (kphilippides@uowm.gr)

$\boxed{g = 9{,}80 \text{ N/kg}}$

ΘΕΜΑ 1. [2]

Δορυφόρος βρίσκεται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από πλανήτη με $GM = 4{,}00\times10^{14}$ m^3s^{-2} , όπως στο σχήμα. Το «περίγειο» βρίσκεται σε απόσταση $r = 1{,}60\times10^6$ m και η ταχύτητα στο «περίγειο» έχει μέτρο $V = 2{,}00\times10^4$ m/s.



Να βρείτε την απόσταση R στην οποία βρίσκεται το «απόγειο» και την ταχύτητα υ του δορυφόρου στο απόγειο.

Λύση

Κατά την κίνηση σε πεδίο κεντρικής δύναμης, όπως είναι η βαρύτητα, η μηχανική ενέργεια και η στροφορμή διατηρούνται.
Επίσης στο περίγειο και στο απόγειο η ταχύτητα είναι κάθετη στην επιβατική ακτίνα και η έκφραση της στροφορμής είναι απλή.

$$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GmM}{R} = E = \sigma\tau\alpha\theta, \qquad mVr = m\upsilon R = L = \sigma\tau\alpha\theta$$

Έχουμε δύο εξισώσεις για δύο αγνώστους. Επειδή η μια είναι δευτεροβάθμια θα βρούμε δύο λύσεις να την ικανοποιούν. Την (V, r) για το περίγειο, που ήδη γνωρίζουμε (τετριμμένη) και την (υ, R) την ταχύτητα και απόσταση στο απόγειο.

$$mVr = m\upsilon R \Rightarrow R = r\frac{V}{\upsilon} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GmM}{R} = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GmM}{r} \Rightarrow \upsilon^2 - \frac{2GM}{R} = V^2 - \frac{2GM}{r} \qquad (2)$$

$$(1) \rightarrow (2):\ \upsilon^2 - \frac{2GM}{Vr}\upsilon + \frac{2GM}{r} - V^2 = 0 \Rightarrow a\upsilon^2 + b\upsilon + c = 0$$

Δευτεροβάθμια με $a = 1,\quad b = -\dfrac{2GM}{Vr},\quad c = \dfrac{2GM}{r} - V^2$ και

$$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{4G^2M^2}{V^2r^2} - \frac{8GM}{r} + 4V^2 = 4\left[\left(\frac{GM}{Vr}\right)^2 - 2\frac{GM}{Vr}V + V^2\right] = 4\left(\frac{GM}{Vr} - V\right)^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\left(\frac{GM}{Vr} - V\right)$$

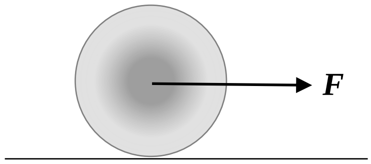
$$\upsilon = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{GM}{Vr} \pm \left(\frac{GM}{Vr} - V\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \upsilon = V \quad \text{τετριμμένη} \\ \upsilon = \dfrac{2GM}{Vr} - V \end{array}$$

$$\upsilon = \frac{2GM}{Vr} - V = \frac{2\cdot\ 4{,}00\times10^{14}}{2{,}00\times10^4\cdot\ 1{,}60\times10^6} - 2{,}00\times10^4 = 2{,}50\times10^4 - 2{,}00\times10^4 = 0{,}50\times10^4 \text{ m/s}$$

$$R = r\frac{V}{\upsilon} = 1{,}60\times10^6\,\frac{2{,}00\times10^4}{0{,}50\times10^4} = 6{,}40\times10^6 \text{ m}$$

ΘΕΜΑ 2. [3]

Σώμα με κυλινδρική συμμετρία, μάζας m= 10,00 kg, ακτίνας R=0,100 m και ροπής αδράνειας $I = 0,700mR^2$, ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή στατικής τριβής μ_s=0,800 και συντελεστή κινητικής τριβής μ_k=0,750. Τη χρονική στιγμή t =0 ασκούμε στο σώμα οριζόντια δύναμη F=200,0 N στο κέντρο μάζας του.



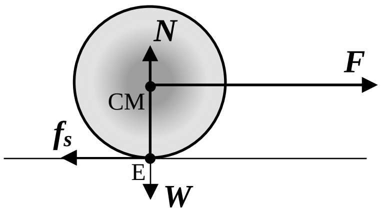
2.1 Να δείξετε ότι θα κάνει κύλιση με ολίσθηση [1]

2.2 Να βρείτε την ταχύτητα του κέντρου μάζας του και την γωνιακή του ταχύτητα τη χρονική στιγμή t=0,6 s [1]

2.3 Αν τη στιγμή αυτή καταργηθεί η δύναμη F ποια θα είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του όταν επιτευχθεί κύλιση χωρίς ολίσθηση; [1]

Λύση

Κάνουμε το σχεδιάγραμμα των δυνάμεων θεωρώντας ότι το σώμα εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση οπότε η τριβή είναι στατική.



Η στατική τριβή f_s είναι προς τα αριστερά επειδή αν δεν υπήρχε, το σώμα θα γλιστρούσε προς τα δεξιά χωρίς να περιστρέφεται.

Για τη στατική τριβή f_s δεν υπάρχει τύπος και είναι ένας άγνωστος του προβλήματος. Η τιμή της προκύπτει από τη λύση του προβλήματος ώστε το σώμα να κάνει την παρατηρούμενη κίνηση. Το μέτρο της όμως περιορίζεται από $f_s \le \mu_s N$, όπου επειδή το σώμα ισορροπεί κατακόρυφα: $N = W = mg$.

2.1 Για να γίνεται η επιτάχυνση με κύλιση χωρίς ολίσθηση θα πρέπει διαρκώς να ισχύει $a = \alpha R$.

Από τις αρχές της ορμής και της στροφορμής (νόμοι Νεύτωνα για μεταφορική και περιστροφική κίνηση) παίρνουμε:

$$\left.\begin{aligned} F_{net} &= ma \\ \tau_{net(CM)} &= I_{CM}\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} F - f_s &= ma \\ f_s R = I\alpha &= \kappa m R^2 \frac{a}{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} F - f_s &= ma \\ f_s &= \kappa m a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= \frac{F}{m(1+\kappa)} = \frac{200}{10(1+0,7)} = 11,76 \text{ m/s}^2 \\ f_s &= \frac{\kappa}{1+\kappa}F = \frac{0,7}{1+0,7}200 = 82,35 \text{ N} \end{aligned}$$

Η απαιτούμενη στατική τριβή πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση από τη μέγιστη δυνατή στατική τριβή

$$f_s \le \mu_s N \Rightarrow f_s \le \mu_s mg \Rightarrow 82,35 \le (0,8)(10)(9,8) \Rightarrow 83,35 \text{ N} \le 78,4 \text{ N}$$

Επειδή όμως αυτό δεν ισχύει, η κίνηση αυτή δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί. Το σώμα θα κάνει ΚΥΛΙΣΗ ΜΕ ΟΛΙΣΘΗΣΗ.

Η τριβή θα είναι κινητική (ή ολίσθησης) για την οποία υπάρχει τύπος $f_k = \mu_k N$ και άρα δεν θα αποτελεί πλέον άγνωστο του προβλήματος. Για τις δύο επιταχύνσεις όμως δεν θα ισχύει $a = \alpha R$ πλέον, αλλά $a \ne \alpha R$ και θα πρέπει να υπολογιστουν ανεξάρτητα.

2.2 Οι επιταχύνσεις του σώματος βρίσκονται απευθείας αφού πλέον όλες οι δυνάμεις W, N, f_k και F είναι σταθερές και γνωστές:

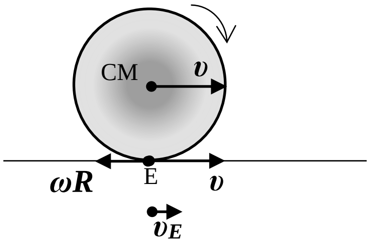
$$a = \frac{F_{net}}{m} = \frac{F - f_k}{m} = \frac{F - \mu_k N}{m} = \frac{F - \mu_k mg}{m} = \frac{F}{m} - \mu_k g = \frac{200}{10} - (0,75)(9,8) = 12,65 \text{ m/s}^2$$

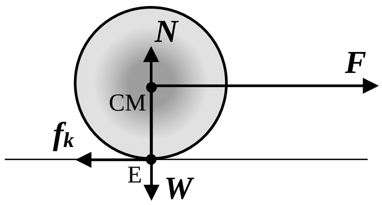
$$\alpha = \frac{\tau_{net(CM)}}{I_{CM}} = \frac{f_k R}{I_{CM}} = \frac{\mu_k N R}{\kappa m R^2} = \frac{\mu_k mg}{\kappa m R} = \frac{\mu_k g}{\kappa R} = \frac{(0,75)(9,8)}{(0,7)(0,1)} = 105,0 \text{ rad/s}$$

Οι ταχύτητες τη χρονική στιγμή t = 0,6 s θα είναι :

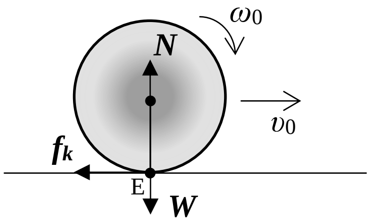
$$\left.\begin{array}{l}\upsilon = at \\ \omega = \alpha t\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\upsilon = (12,65)(0,6) = 7,59 \text{ m/s} \\ \omega = (105,0)(0,6) = 63,0 \text{ rad/s}\end{array}$$

Παρατηρούμε ότι $\upsilon > \omega R$ αφού $7,59 > 6,30$ οπότε το σημείο επαφής με το δάπεδο Ε κινείται προς τα δεξιά και άρα η τριβή ολίσθησης είναι προς τα αριστερά.





2.3 Από τη στιγμή που θα καταργηθεί η δύναμη F (ξαναθέτουμε t=0) η μεταφορική κίνηση του σώματος θα επιβραδύνεται $\upsilon\downarrow$, λόγω της κινητικής τριβής, ενώ η περιστροφική κίνηση θα συνεχίσει να επιταχύνεται $\omega\uparrow$, λόγω της ροπής της κινητικής τριβής, **έως να επιτευχθεί κυλιση χωρίς ολίσθηση** όταν η μεταφορική και η περιστροφική ταχύτητα εξισωθούν $\upsilon_r = \omega_r R$ οπότε εξαφανίζεται και η τριβή



Επειδή όλες οι δυνάμεις διέρχονται από το σημείο επαφής με το δάπεδο Ε, η συνολική ροπή ως προς το σημείο Ε θα είναι μηδέν και άρα η στροφορμή ως προς αυτό το σήμείο θα διατηρείται. Η συνολική στροφορμή είναι ίση με τη στροφορμή του CM ως προς το Ε λόγω της μεταφορικής κίνησης συν την στροφορμή γύρω από το κέντρο μάζας λόγω της περιστροφικής κίνησης:

$$L_{(\mathrm{E})} = L'_{(\mathrm{E})} \Rightarrow m\upsilon_0 R + I_{CM}\omega_0 = m\upsilon_r R + I_{CM}\omega_r$$

όπου $\upsilon_0 = 7,59$ m/s και $\omega_0 = 63$ rad/s,

Όμως $\upsilon_r = \omega_r R$ οπότε

$$m\upsilon_0 R + \kappa m R^2 \omega_0 = m\upsilon_r R + \kappa m R^2 \frac{\upsilon_r}{R} \Rightarrow$$

$$mR(\upsilon_0 + \kappa R\omega_0) = m\upsilon_r R(1+\kappa) \Rightarrow \upsilon_r = \frac{\upsilon_0 + \kappa R\omega_0}{1+\kappa} = \frac{(7,59)+(0,7)(0,1)(63)}{1+0,7} = 7,06 \text{ m/s}$$

Αν μας ζητούνταν και ο χρόνος που χρειάστηκε για να επιτευχθεί η κύλιση θα λύναμε την

$$\upsilon_r = \omega_r R \Rightarrow \upsilon_0 + a_{CM} t_r = \omega_0 R + \alpha R t_r \Rightarrow t_r = \frac{\upsilon_0 - \omega_0 R}{\alpha R - a_{CM}} = ...$$

όπου $\alpha = 105$ rad/s και $a_{CM} = \frac{F_{net}}{m} = \frac{-f_k}{m} = -\mu_k g = -(0,75)(9,8) = -7,35 \text{ m/s}^2$

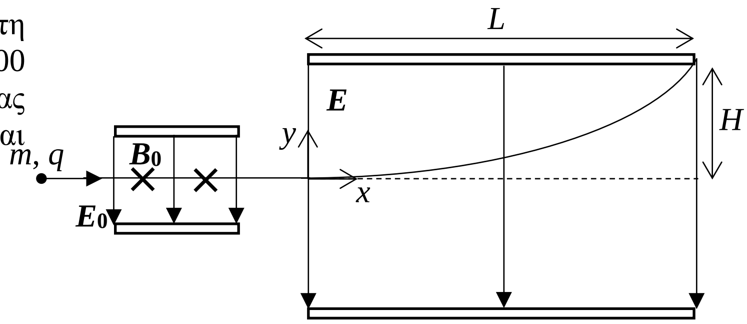
ΘΕΜΑ 3. [2]

Φορτισμένο σωματίδιο περνάει χωρίς εκτροπή από τα καθέτως διασταυρούμενα πεδία (ηλεκτρικό και μαγνητικό) εντάσεων E_0= 10 V/m, B_0= 0,5 T. Στη συνέχεια εισέρχεται καθέτως στο ηλεκτρικό πεδίο E=100 V/m, επίπεδου πυκνωτή το οποίο διασχίζει βγαίνοντας ξυστά από το άκρο του πάνω οπλισμού όπως φαίνεται στο σχήμα, όπου H=4 cm και L=10 cm

Αγνοήστε το βάρος του σωματιδίου.

3.1 Βρείτε το λόγο q/m του σωματιδίου [1,5]

3.2 Υπολογίστε την ταχύτητα του σωματιδίου όταν εξέρχεται από το ηλεκτρικό πεδίο E (μέτρο και κατεύθυνση) [0,5]



Λύση
Το σωματίδιο έχει αρνητικό ηλεκτρικό φορτίο αφού μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο ***E*** επιταχύνεται αντίθετα από τις δυναμικές γραμμές του πεδίου.
3.1 Εφόσον το σωματίδιο περνάει χωρίς εκτροπή από τα διασταυρούμενα πεδία η ταχύτητά του είναι

$$\upsilon_0 = \frac{E_0}{B_0} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ m/s}$$

από $F_E = F_B \Rightarrow qE_0 = q\upsilon B_0$

Από τις χρονικές εξισώσεις της κίνησης μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο E όπου το σωματίδιο εκτελεί οριζόντια βολή : $x = \upsilon_0 t,\ \ y = \frac{1}{2}a_y t^2$, $\upsilon_x = \upsilon_0 = \sigma\tau\alpha\theta$, $\upsilon_y = a_y t$, απαλείφοντας το χρόνο μεταξύ x και y βρίσκουμε την εξίσωση τροχιάς $y = \frac{a_y}{2\upsilon_0^2}x^2$.
Αφού το σωματίδιο περνάει από το σημείο (L, H) παίρνουμε :

$$H = \frac{a_y}{2\upsilon_0^2}L^2 \Rightarrow a_y = \frac{2\upsilon_0^2 H}{L^2} = \frac{2(20^2)(0,04)}{(0,1^2)} = 3200 \text{ m/s}^2$$

Όμως $a_y = \frac{F_{net}}{m} = \frac{qE}{m} \Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{a_y}{E} = \frac{3200}{(-100)} \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{q}{m} = -32 \text{ C/kg}}$$

3.2

$$\upsilon_y^2 = 2a_y y \Rightarrow \upsilon_{y,exit}^2 = 2a_y H = 2(3200)(0,04) = 256 \Rightarrow \ \upsilon_{y,exit} = 16 \text{ m/s}$$

$$\vec{\upsilon}_{exit} = (\upsilon_0, \upsilon_{y,exit}) = \sqrt{\upsilon_0^2 + \upsilon_{y,exit}^2}\angle\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_{y,exit}}{\upsilon_0}\right) = \sqrt{20^2+16^2}\angle\tan^{-1}\left(\frac{16}{20}\right) = \sqrt{656}\angle\tan^{-1}\left(0,8\right) \Rightarrow$$

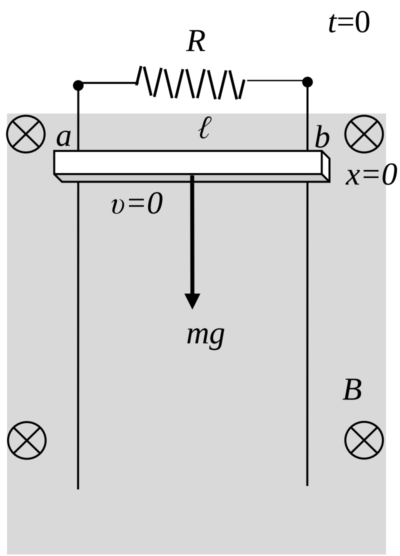
$$\boxed{\vec{\upsilon}_{exit} = (20,16) \text{ m/s } = 25,6\angle 38,7^\circ \text{ m/s}}$$

Ή μέσω της χρονικής στιγμής εξόδου από το πεδίο: $x = \upsilon_0 t \Rightarrow L = \upsilon_0 t_{exit} \Rightarrow t_{exit} = \frac{L}{\upsilon_0} = \frac{0,1}{20} = 0,005$ s ,

Είτε από : $\upsilon_{y,exit} = a_y t_{exit} = (3200)(0,005) = 16$ m/s

Είτε από τη μέση ταχύτητα : $\frac{H}{t_{exit}} = \frac{0+\upsilon_{y,exit}}{2} \Rightarrow \upsilon_{y,exit} = 2\frac{H}{t_{exit}} = 2\frac{0,04}{0,005} = 16$ m/s

ΘΕΜΑ 4. [3]
Η λεπτή αγώγιμη ράβδος *ab* αφήνεται να πέσει λόγω του βάρους της, μέσα σε οριζόντιο σταθερό μαγνητικό πεδίο, όντας συνεχώς σε επαφή με τις κατακόρυφες αγώγιμες ράγες, ώστε να παράγει ηλεκτρική ενέργεια.



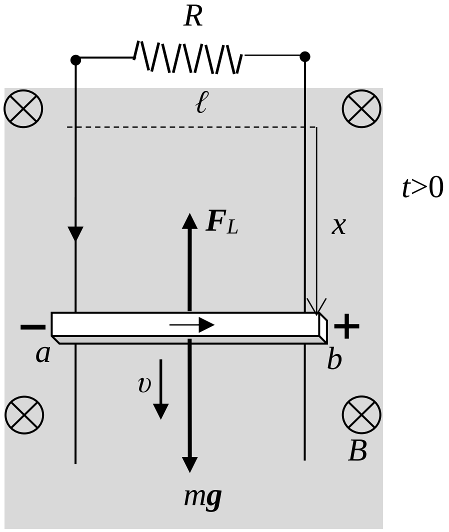
4.1 Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση που προκύπτει από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα και να προσδιορίσετε τη χρονική εξάρτηση της ταχύτητας της ράβδου. [1,5]

Τη χρονική στιγμή t= 1 s να υπολογίσετε :
4.2 Την επιτάχυνση της ράβδου [0,75]
4.3 Την ισχύ που καταναλώνεται στην ωμική αντίσταση R [0,75]

R=2,00 Ω, m=0,500 kg, ℓ = 1,00 m, B=1,00 T, g=9,80 N/kg

Λύση

4.1 $\mathscr{E} = B\upsilon\ell$, $I = \dfrac{\mathscr{E}}{R} = \dfrac{B\upsilon\ell}{R}$, $F_L = BI\ell = \dfrac{B^2\ell^2}{R}\upsilon$



Οριακή ταχύτητα όταν : $F_{net} = 0 \Rightarrow W - F_{L,\tau\varepsilon\lambda} = 0 \Rightarrow$ $BI_{\tau\varepsilon\lambda}\ell = mg \Rightarrow B\dfrac{B\upsilon_{o\rho}\ell}{R}\ell = mg \Rightarrow \upsilon_{o\rho} = \dfrac{mgR}{B^2\ell^2}$

$$\upsilon_{o\rho} = \frac{(1,00)(9,80)(1,00)}{(1,00)(1,00)} = 9,80 \text{ m/s}$$

2^{ος} νόμος Νεύτωνα (αρχή της ορμής):

$$F_{net} = ma \Rightarrow W - F_L = ma \Rightarrow mg - \frac{B^2\ell^2}{R}\upsilon = ma \Rightarrow a = g - \frac{B^2\ell^2}{mR}\upsilon \Rightarrow a = \frac{B^2\ell^2}{mR}\left(\frac{gmR}{B^2\ell^2} - \upsilon\right)$$

Ορίζουμε τη σταθερά χρόνου $\tau = \dfrac{mR}{B^2\ell^2} = \dfrac{(1,00)(1,00)}{(1,00)(1,00)} = 1,00$ s και η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{1}{\tau}\left(\upsilon_{o\rho} - \upsilon\right) \Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon_{o\rho} - \upsilon} = \frac{dt}{\tau} \Rightarrow \int_0^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{\upsilon_{o\rho} - \upsilon} = \frac{1}{\tau}\int_0^t dt \quad (1)$$

Αλλάζουμε μεταβλητή στο πρώτο ολοκλήρωμα : $u = \upsilon_{o\rho} - \upsilon \Rightarrow du = -d\upsilon$

$$-\int_{\upsilon_{o\rho}}^{\upsilon_{o\rho}-\upsilon} \frac{du}{u} = \frac{1}{\tau}\int_0^t dt \Rightarrow \ln u\Big|_{\upsilon_{o\rho}}^{\upsilon_{o\rho}-\upsilon} = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \ln(\upsilon_{o\rho} - \upsilon) - \ln\upsilon_{o\rho} = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \ln\left(\frac{\upsilon_{o\rho} - \upsilon}{\upsilon_{o\rho}}\right) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \frac{\upsilon_{o\rho} - \upsilon}{\upsilon_{o\rho}} = e^{-t/\tau} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon(t) = \upsilon_{o\rho}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = 9,80\left(1 - e^{-t}\right) \quad \text{SI}}$$

4.2 Παραγωγίζοντας βρίσκουμε την επιτάχυνση

$$a(t) = \frac{d\upsilon(t)}{dt} = \upsilon_{o\rho}\frac{d}{dt}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = -\upsilon_{o\rho}\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-t/\tau}, \quad \text{όπου } \frac{\upsilon_{o\rho}}{\tau} = \frac{\dfrac{mgR}{B^2\ell^2}}{\dfrac{mR}{B^2\ell^2}} = g \quad \text{και άρα}$$

$$\boxed{a(t) = ge^{-t/\tau} = 9,80e^{-t} \quad \text{SI}}$$

$$a(1\text{s}) = 9,80e^{-1} = 3,61 \text{ m/s}^2$$

Ισοδύναμα μπορούμε να βρούμε την επιτάχυνση και χωρίς παραγώγιση, από την (1):

$$a(t) = \frac{1}{\tau}\left(\upsilon_{o\rho} - \upsilon(t)\right) = \frac{1}{\tau}\left(\upsilon_{o\rho} - \upsilon_{o\rho} + \upsilon_{o\rho}e^{-t/\tau}\right) = \frac{\upsilon_{o\rho}}{\tau}e^{-t/\tau}$$

4.3 $P = I^2R = \left(\dfrac{B\upsilon\ell}{R}\right)^2 R = \dfrac{B^2\upsilon^2\ell^2}{R} = \dfrac{(1,00)^2\left(9,80\left(1 - e^{-1}\right)\right)^2(1,00)^2}{2,00} = 19,2$ W