ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2024-25

ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ

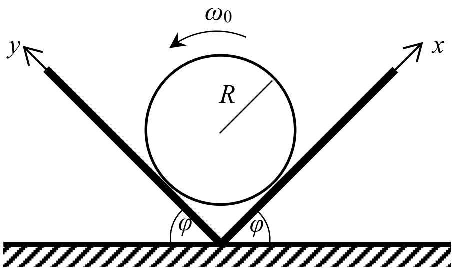
Παρασκευή, 22 Ιανουαρίου 2024: 18:00-21:00 π.μ. Αίθουσες: ΑΠ3_8, ΑΠ3_10, ΑΠ3_11
Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης (kphilippides@uowm.gr)

Να μεταφέρετε όλα τα σχήματα στο γραπτό σας και να δίνετε τα αποτελέσματα με το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων για να πάρετε όλες τις μονάδες.

Μηχανική $g = 9,80067$ N/kg (Κοζάνη)

ΘΕΜΑ 1 [2]

Λεπτός κυλινδρικός σωλήνας ακτίνας $R = 0,50$ m,
που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 20$ rad/s
αφήνεται πάνω στην ορθή γωνία του σχήματος.
Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ του σωλήνα και της γωνίας είναι $\mu_k = 0,20$.



1.1 Σχεδιάστε όλες τις δυνάμεις που δρουν στο σωλήνα και βρείτε τις εκφράσεις που δίνουν τα μέτρα των τριβών στα σημεία επαφής [1]
1.2 Σε πόσο χρόνο θα σταματήσει να περιστρέφεται ο σωλήνας και πόσες περιστροφές θα έχει κάνει μέχρι τότε [1].

ΛΥΣΗ

Πρέπει τα αριθμητικά αποτελέσματα για χρόνο και στροφές να δοθούν σε δύο σημαντικά ψηφία.

$$\varphi = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ, \quad \cos\varphi = \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

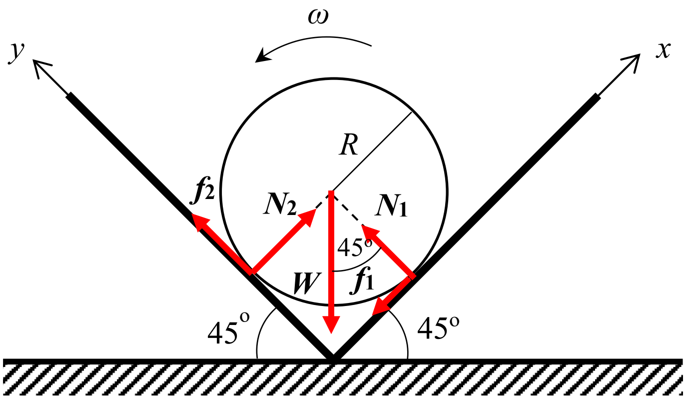
Ροπή αδράνειας λεπτού κυλίνδρου=Ροπή αδράνειας στεφάνης: $I = mR^2$

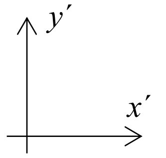
Επιλέγοντας τους προτεινόμενους άξονες x-y έχουμε μόνο μια δύναμη (W) που χρειάζεται να αναλυθεί σε συνιστώσες αντί να έχουμε τέσσερις (N_1, f_1, N_2, f_2)

$$W_x = W_y = \frac{W}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{\sqrt{2}}$$

1.1 [1]

[0,4]





Δεν συνιστάται

Η κατάσταση δεν είναι συμμετρική. Οι δυνάμεις στα δύο σημεία επαφής θα είναι διαφορετικές.

Ισορροπία στον x: $N_2 = \dfrac{W}{\sqrt{2}} + f_1$ (1)

Ισορροπία στον y: $N_1 = \dfrac{W}{\sqrt{2}} - f_2$ (2)

Χρησιμοποιώ τον τύπο της κινητικής τριβής $f = \mu_k N$ (3) και λύνω το σύστημα των (1), (2)

(3)→(1): $\dfrac{f_2}{\mu_k} = \dfrac{W}{\sqrt{2}} + f_1 \Rightarrow \qquad \mu_k f_1 - f_2 = -\mu_k \dfrac{W}{\sqrt{2}}$ (4)

(3)→(2): $\frac{f_1}{\mu_k} = \frac{W}{\sqrt{2}} - f_2 \Rightarrow \qquad f_1 + \mu_k f_2 = \mu_k \frac{W}{\sqrt{2}} \qquad (5)$

$\mu_k(5) - (4)$: $\cancel{\mu_k f_1} + \mu_k^2 f_2 - \cancel{\mu_k f_1} + f_2 = \mu_k^2 \frac{W}{\sqrt{2}} + \mu_k \frac{W}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$$\boxed{f_2 = \frac{\mu_k(1+\mu_k)}{1+\mu_k^2}\frac{mg}{\sqrt{2}} \qquad (6)}$$

(6)→(4) : $\cancel{\mu_k} f_1 - \frac{\cancel{\mu_k}(1+\mu_k)}{1+\mu_k^2}\frac{mg}{\sqrt{2}} = -\cancel{\mu_k}\frac{mg}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_1 = \left(\frac{1+\mu_k}{1+\mu_k^2} - 1\right)\frac{mg}{\sqrt{2}}$

$$\boxed{f_1 = \frac{\mu_k(1-\mu_k)}{1+\mu_k^2}\frac{mg}{\sqrt{2}} \qquad (7) \qquad [0,5]}$$

[Παρατηρήσεις στο αποτέλεσμα.

i) Αν ήταν μ_k=1 τότε $N_1 = f_1 = 0$ και ο σωλήνας χάνει την επαφή δεξιά. Η f_2 και η N_2 που είναι ίσες $N_2 = f_2 = \frac{mg}{\sqrt{2}}$ σηκώνουν το βάρος του ενώ η ροπή της f_2 τον σταμάτα και μετά μηδενίζεται. Όταν ο σωλήνας σταματά ανακτά την επαφή στη δεξιά πλευρά ώστε τώρα οι $N_1 = N_2 = \frac{mg}{\sqrt{2}}$ να σηκώνουν το βάρος του.

ii) Αν μ_k>1 ο σωλήνας θα αρχίσει να κυλάει προς τα πάνω στην αριστερή πλευρά αφού $f_2 > N_2 = \frac{mg}{\sqrt{2}}$.

iii) Λόγος των τριβών : $\frac{f_2}{f_1} = \frac{1+\mu_k}{1-\mu_k} = \frac{1,2}{0,8} = 1,5$]

Αν τις υπολογίσατε έπρεπε να βρείτε (δεν είναι τελικά αποτελέσματα οπότε τα γράφω με όσα ψηφία θέλω)

$f_1 = \frac{(0,20)(1-0,20)}{1+0,04}\frac{mg}{\sqrt{2}} = 0,109mg = 1,068m$, $\qquad f_2 = 1,5 f_1 = (1,5)0,109mg = 0,163mg = 1,602m$

$N_1 = \frac{f_1}{\mu_k} = 0,545mg = 5,34m \qquad\qquad N_2 = \frac{f_2}{\mu_k} = 0,815mg = 7,99m$

Οι δυνάμεις που προκαλούν γωνιακή επιτάχυνση f_1, f_2, είναι και οι δύο σταθερές, σε συγκεκριμένα σημεία εφαρμογής. Για αυτό θα προκαλέσουν σταθερή συνισταμένη ροπή και άρα θα οδηγήσουν σε ομαλά επιβραδυνόμενη περιστροφική κίνηση

Αν επιλέξατε οριζόντιο άξονα x' και κατακόρυφο άξονα y' και δεν μπλέξατε τα μπούτια σας στην πορεία, έπρεπε να βρείτε τα παρακάτω. Επειδή $\cos\varphi = \sin\varphi = 1/\sqrt{2}$ και οι x' και οι y' συνιστώσες οποιασδήποτε από τις δυνάμεις (F: N_1, f_1, N_2, f_2) θα είναι της μορφής $F/\sqrt{2}$. Αυτή τη φορά ας λύσουμε ως προς τις N_1, N_2 :

x' : $\frac{N_2}{\sqrt{2}} - \frac{f_2}{\sqrt{2}} - \frac{N_1}{\sqrt{2}} - \frac{f_1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow N_2 - \mu_k N_2 - N_1 - \mu_k N_1 \Rightarrow \quad N_2 = \frac{1+\mu_k}{1-\mu_k} N_1 \quad$ (A)

y' : $\frac{N_2}{\sqrt{2}} + \frac{f_2}{\sqrt{2}} + \frac{N_1}{\sqrt{2}} - \frac{f_1}{\sqrt{2}} = W \Rightarrow \qquad N_2(1+\mu_k) + N_1(1-\mu_k) = W\sqrt{2} \quad$ (B)

(A)→(B) : $\quad N_1 \frac{1+\mu_k}{1-\mu_k}(1+\mu_k) + N_1(1-\mu_k) = W\sqrt{2} \Rightarrow N_1 \frac{(1+\mu_k)^2 + (1-\mu_k)^2}{1-\mu_k} = W\sqrt{2} \Rightarrow$

$$N_1 \frac{1 + \cancel{2\mu_k} + \mu_k^2 + 1 - \cancel{2\mu_k} + \mu_k^2}{1-\mu_k} = W\sqrt{2} \Rightarrow \qquad N_1 = \frac{1-\mu_k}{1+\mu_k^2}\frac{W}{\sqrt{2}} \quad (\Gamma)$$

(Γ)→(A) : $N_2 = \frac{1+\mu_k}{1+\mu_k^2}\frac{W}{\sqrt{2}}$

1.2 [1] Περιστροφική κίνηση γύρω από τον z : $I\alpha=\tau_{net}\Rightarrow mR^2\alpha=-f_1R-f_2R\Rightarrow\alpha=-\dfrac{f_1+f_2}{mR}$ (8)

Το μείον επειδή η ροπή είναι στην αντίθετη κατεύθυνση από την αρχική γωνιακή ταχύτητα.

(6)+(7) : $$f_1+f_2=\frac{\mu_k(1-\cancel{\mu_k})}{1+\mu_k^2}\frac{mg}{\sqrt{2}}+\frac{\mu_k(1+\cancel{\mu_k})}{1+\mu_k^2}\frac{mg}{\sqrt{2}}=\frac{2\mu_k}{1+\mu_k^2}\frac{mg}{\sqrt{2}}\Rightarrow$$

$$f_1+f_2=\frac{\sqrt{2}\mu_k}{1+\mu_k^2}mg \quad (9)$$

Άρα από (8) $$\alpha=-\frac{\sqrt{2}\mu_k}{1+\mu_k^2}\frac{g}{R} \quad (10)$$

$$\alpha=-\frac{\sqrt{2}(0,20)}{1+(0,20)^2}\frac{(9,80067)}{0,50}=-5,3308617=-5,3\ \text{rad/s}^2$$

$$\frac{d\omega}{dt}=\alpha\Rightarrow\int_{\omega_0}^{\omega}d\omega=\alpha\int_0^t dt\Rightarrow\omega=\omega_0+\alpha t\Rightarrow 0=\omega_0+\alpha t_{stop}\Rightarrow t_{stop}=-\frac{\omega_0}{\alpha}\ \text{ ή }\ t_{stop}=\frac{1+\mu_k^2}{\sqrt{2}\mu_k}\frac{\omega_0R}{g} \quad (11)$$

$$\boxed{t_{stop}=-\frac{20}{-5,33086}=3,75174=3,8\ \text{s}}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\omega(t)\Rightarrow\int_0^{\theta}d\theta=\int_0^t(\omega_0+\alpha t)dt\Rightarrow\theta=\omega_0t+\frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\theta_{stop}=\omega_0t_{stop}+\frac{1}{2}\alpha t_{stop}^2=\omega_0t_{stop}+\frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{t_{stop}}\right)t_{stop}^2=\frac{\omega_0t_{stop}}{2}=\frac{(20)(3,75174)}{2}=37,5174=38\ \text{rad}$$

$$\boxed{N=\frac{\theta_{stop}}{2\pi}=\frac{37,5174}{2\pi}=5,9711=6,0\ \text{ στροφές}}$$

6 στροφές

ΑΛΛΙΩΣ

Από την αρχή της στροφορμής, επειδή η ροπή είναι σταθερή, μπορούμε να βρούμε κατευθείαν τη χρονική στιγμή t_{stop} :

$$\tau_{net}=\frac{\Delta L}{\Delta t}=\frac{0-I\omega_0}{t_{stop}-0}\Rightarrow t_{stop}=\frac{-I\omega_0}{\tau_{net}}=\frac{-I\omega_0}{-(f_1+f_2)R}=\frac{mR^{\cancel{2}}\omega_0}{(f_1+f_2)\cancel{R}}=\frac{mR\omega_0}{f_1+f_2}=\frac{\cancel{m}R\omega_0}{\dfrac{\sqrt{2}\mu_k}{1+\mu_k^2}\cancel{m}g}\Rightarrow$$

$$t_{stop}=\frac{1+\mu_k^2}{\sqrt{2}\mu_k}\frac{\omega_0R}{g}$$

Από την αρχή της ενέργειας, επειδή η ροπή είναι σταθερή, μπορούμε να βρούμε κατευθείαν, τη διαγραφείσα γωνία θ_{stop} :

$$\Delta E=\tau_{net}\,\Delta\theta\Rightarrow\ 0-\frac{1}{2}I\omega_0^2=-(f_1+f_2)R\cdot\left(\theta_{stop}-0\right)\Rightarrow\theta_{stop}=\frac{I\omega_0^2}{2(f_1+f_2)R}=\frac{mR^{\cancel{2}}\omega_0^2}{2(f_1+f_2)\cancel{R}}=\frac{mR\omega_0^2}{2(f_1+f_2)}\Rightarrow$$

$$\theta_{stop}=\frac{\cancel{m}R\omega_0^2}{2\dfrac{2\mu_k}{1+\mu_k^2}\dfrac{\cancel{m}g}{\sqrt{2}}}=\frac{1+\mu_k^2}{2\sqrt{2}\mu_k}\frac{R\omega_0^2}{g}=\frac{(1+0,040)}{2\sqrt{2}(0,20)}\frac{(0,50)(20)}{(9,80067)}=37,5174\ \text{rad}$$

Όπως και να το κάνετε χρειάζεται να ξέρετε τις δυνάμεις f_1+f_2

ΘΕΜΑ 2 [2]

Δύο σώματα με $m_1=4,00$ kg, $\upsilon_1=5,00$ m/s και $m_2=1,00$ kg, $\upsilon_2=-10,00$ m/s συγκρούονται κεντρικά. Η κρούση είναι ανελαστική και 32,4 J κινητικής ενέργειας μετατρέπονται σε θερμότητα και παραμόρφωση των σωμάτων.

2.1 Βρείτε το συντελεστή αποκατάστασης της κρούσης ε [0,5]
2.2 Βρείτε τις ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση [1,5]

ΛΥΣΗ
Αποτελέσματα σε τρία σημαντικά ψηφία.
2.1 [0,5] Αρχικές ταχύτητες : υ_1, υ_2, με $\upsilon_{12} = \upsilon_1 - \upsilon_2 = 5-(-10) = 15{,}00$ m/s τη σχετική τους ταχύτητα
Τελικές ταχύτητες : u_1, u_2, με $u_{12} = u_1 - u_2$ τη σχετική τους ταχύτητα
Απώλεια ενέργειας : $Q = K_{αρχ} - K_{τελ}$

Ο συντελεστής αποκατάστασης ορίζεται από τον κανόνα κρούσης του Νεύτωνα :

$$u_{12} = -\varepsilon\,\upsilon_{12} \Rightarrow \; u_1 - u_2 = -\varepsilon(\upsilon_1 - \upsilon_2)$$

πλαστική κρούση $0 \le \quad \varepsilon \quad \le 1$ ελαστική κρούση
ανελαστική

Για να υπολογίσουμε τον ε γράφουμε την κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων ως :

$$K = K_{CM} + K_{σχετ} = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu\upsilon_{σχετ}^2$$

καθώς η κινητική ενέργεια του CM δεν αλλάζει και θα φύγει στη διαφορά. Για το σύστημα των δύο σωμάτων η συνολική μάζα είναι : $M = m_1 + m_2 = 4 + 1 = 5{,}00$ kg

και η ανηγμένη μάζα είναι : $\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_1} \Rightarrow \mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{4\cdot 1}{4+1} = \dfrac{4}{5} = 0{,}800$ kg

$$Q = K_{αρχ} - K_{τελ} = \cancel{K_{CM}} + \frac{1}{2}\mu\upsilon_{12}^2 - \cancel{K_{CM}} - \frac{1}{2}\mu u_{12}^2 \Rightarrow Q = \frac{1}{2}\mu\upsilon_{12}^2(1-\varepsilon^2) \Rightarrow 1-\varepsilon^2 = \frac{2Q}{\mu\upsilon_{12}^2} \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2Q}{\mu\upsilon_{12}^2}} = \sqrt{1 - \frac{2(32{,}4)}{(0{,}800)15{,}0^2}} = \sqrt{1 - 0{,}360} = \sqrt{0{,}640} = 0{,}800$$

2.2 [1,5] Η διατήρηση της ορμής και ο κανόνας κρούσης του Νεύτωνα αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα 2×2 για τις τελικές ταχύτητες το οποίο λύνουμε με όποια μέθοδο επιθυμούμε (είτε συμβολικά για να πάρουμε τον γενικό τύπο, είτε αριθμητικά)

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 \qquad (1)$$

$$u_1 - u_2 = -\varepsilon(\upsilon_1 - \upsilon_2) \qquad (2)$$

Συμβολικά για να βρούμε το γενικό τύπο. Με ορίζουσες:

$$D = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(m_1 + m_2),$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 & m_2 \\ -\varepsilon(\upsilon_1 - \upsilon_2) & -1 \end{vmatrix} = -(m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2) + m_2\varepsilon(\upsilon_1 - \upsilon_2) = -(m_1 - \varepsilon m_2)\upsilon_1 - (1+\varepsilon)m_2\upsilon_2$$

$$u_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-(m_1 - \varepsilon m_2)\upsilon_1 - (1+\varepsilon)m_2\upsilon_2}{-(m_1 + m_2)} \Rightarrow \qquad u_1 = \frac{m_1 - \varepsilon m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{(1+\varepsilon)m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2$$

Έλεγχος : για ε=1 παίρνουμε τον τύπο της κεντρικής ελαστικής κρούσης που ξέρουμε από το λύκειο

Αριθμητικές τιμές: $\quad u_1 = \dfrac{4 - 0{,}8(1)}{5}5 + \dfrac{(1+0{,}8)(1)}{5}(-10) = 3{,}2 - 3{,}6 = -0{,}400$ m/s

$$u_2 = u_1 + \varepsilon(\upsilon_1 - \upsilon_2) = -0{,}4 + 0{,}8(15) = 11{,}6 \text{ m/s}$$

Αριθμητικά :

$$\left.\begin{aligned} 4u_1 + u_2 &= 4(5) + 1(-10) \\ u_1 - u_2 &= -0{,}8(15) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 4u_1 + u_2 &= 10 \quad (1) \qquad (1)+(2):\; 5u_1 = -2 \Rightarrow u_1 = -0{,}400 \text{ m/s} \;\; (3) \\ u_1 - u_2 &= -12 \quad (2) \qquad (3)\to(2): u_2 = 12 + u_1 = 12 - 0{,}4 = 11{,}6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

4 γραμμές πράξεις!

ΑΛΛΙΩΣ
Αν δεν έχετε βρει το ε από την 2.1 μπορείτε πρώτα να βρείτε τις τελικές ταχύτητες λύνοντας το δευτεροβάθμιο 2×2 σύστημα

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2 \qquad \text{Διατήρηση ορμής} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 - Q \qquad \text{Διατήρηση ενέργειας} \quad (3)$$

$$\left.\begin{matrix} 4u_1 + u_2 = 10 \\ \frac{1}{2}4u_1^2 + \frac{1}{2}u_2^2 = \frac{1}{2}4(5)^2 + \frac{1}{2}(-10)^2 - 32,4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4u_1 + u_2 = 10 \\ 4u_1^2 + u_2^2 = 135,2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} u_2 = 10 - 4u_1 \\ 4u_1^2 + (10 - 4u_1)^2 = 135,2 \end{matrix}$$

$4u_1^2 + (10 - 4u_1)^2 = 135,2 \Rightarrow 20u_1^2 - 80u_1 - 35,2 = 0 \Rightarrow u_1^2 - 4u_1 - 1,76 = 0$ **Δευτεροβάθμια**

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{4^2 - 4(-1,76)} = 2\sqrt{5,76} = 2(2,4) = 4,8$

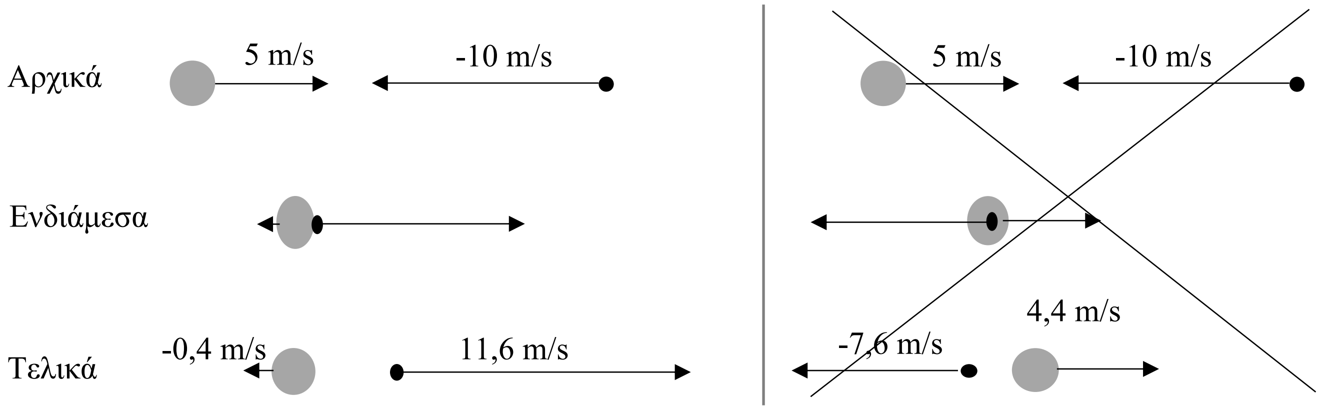
1^{η} λύση: $u_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4 + 4,8}{2} = 4,4$, $\quad u_2 = 10 - 4(4,4) = -7,6$

2^{η} λύση: $u_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4 - 4,8}{2} = -0,4$, $\quad u_2 = 10 - 4(-0,4) = 11,6$

Πρέπει να αιτιολογήσετε ποια λύση θα επιλέξετε.

Η πρώτη λύση απορρίπτεται αφού ούτε, έστω ένα από τα δύο σώματα δεν αναστρέφει ταχύτητα (περνούν το ένα μέσα από το άλλο).

Άρα:	$u_1 = -0,400$ m/s και $u_2 = 11,6$ m/s



Τώρα μπορείτε να βρείτε και το συντελεστή αποκατάστασης

$$\varepsilon = -\frac{u_{12}}{\upsilon_{12}} = \frac{u_2 - u_1}{\upsilon_1 - \upsilon_2} = \frac{11,6 - (-0,4)}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0,8$$

Η δεύτερη λύση (της δια-πέρασης), δίνει αρνητικό $\varepsilon = \dfrac{-7,6 - 4,4}{15} = -\dfrac{12}{15} = -0,8$ που δεν είναι αποδεκτό αφού δεν ανήκει στο διάστημα $0 \le \varepsilon \le 1$ (που σημαίνει ότι δεν έγινε κρούση, δηλ. αναστροφή έστω μιας ταχύτητας).

ΘΕΜΑ 3 [2]

Διαστημικό όχημα είναι σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τη Γη με απόγειο $r_a = 3R$ και περίγειο $r_p = 2R$ αντίστοιχα όπου $R = 6.371$ km η ακτίνα της Γης. Βρείτε το ελάχιστο κλάσμα της μάζας του που πρέπει να κάψει ώστε να διαφύγει από την έλξη της Γης αν η πυροδότηση των πυραύλων γίνει αντίστοιχα στο απόγειο ή στο περίγειο και αποφανθείτε που είναι πιο οικονομικό να γίνει η πυροδότηση.

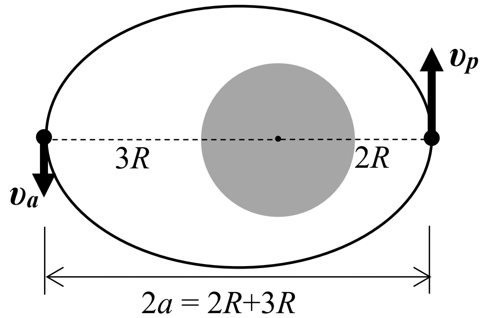
Δίνονται $\upsilon = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$, ταχύτητα καυσαερίων $\upsilon_e = 3,70$ km/s

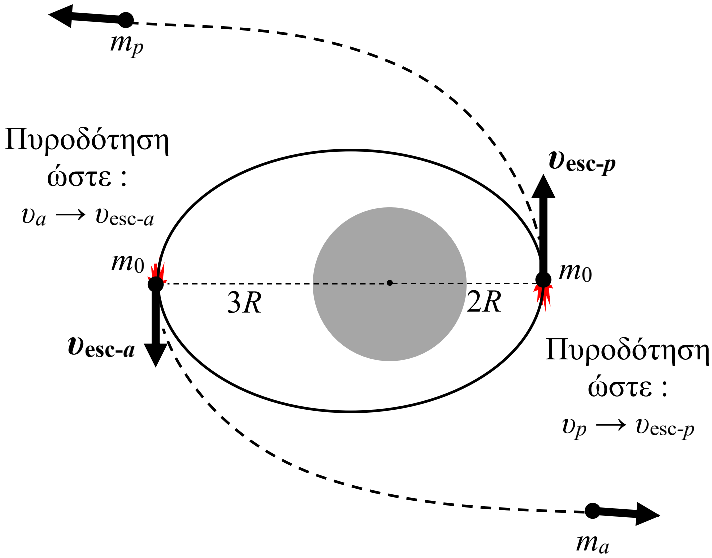
ΛΥΣΗ

Αποτελέσματα ταχυτήτων σε 4 σημαντικά ψηφία (από 6.371), κλασμάτων μάζας σε 3 σημαντικά ψηφία (από 3,70)

Ο μεγάλος ημιάξονας της ελλειπτικής τροχιάς είναι: $a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{2R + 3R}{2} = \frac{5}{2}R = 2,5R$

Για να διαφύγει από συγκεκριμένη απόσταση *r* πρέπει να έχει τουλάχιστον την ταχύτητα διαφυγής υ_{esc} που αντιστοιχεί σε αυτήν την απόσταση, την οποία βρίσκετε από διατήρηση της ενέργειας.





Διατήρηση ενέργειας : $E_r = E_\infty \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\upsilon_\infty^2 - \cancel{\frac{GMm}{\infty}}$

Όταν $\upsilon = \upsilon_{esc}$ τότε $\upsilon_\infty = 0$ ώστε μόλις και να φτάσει στο ∞.

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{esc}^2 - \frac{GMm}{r} = 0 \Rightarrow \upsilon_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Για τους υπολογισμούς χρησιμοποιούμε την $GM = gR^2$ αφού στην επιφάνεια της Γης $mg = G\frac{Mm}{R^2}$.

Υπολογισμοί στο περίγειο

$$\upsilon_{esc,p} = \sqrt{\frac{2GM}{r_p}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{2R}} = \sqrt{gR}, \qquad \upsilon_p = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{gR^2\left(\frac{2}{2R} - \frac{2}{5R}\right)} = \sqrt{gR}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{0,6}\sqrt{gR}$$

Υπολογίζουμε μια φορά το $\sqrt{gR}$ και το κρατάμε και για παρακάτω

$$\sqrt{gR} = \sqrt{(9,80067)(6.371\times10^3)} = 7.901,903 = 7,902 \text{ km/s}$$

$$\Delta\upsilon_p = \upsilon_{esc,p} - \upsilon_p = \left(1 - \sqrt{0,6}\right)\sqrt{gR} = (1 - 0,774597)(7,902 \text{ km/s}) = 1,781 \text{ km/s}$$

$$m_p = m_0 e^{-\Delta\upsilon_p/u_e} = m_0 e^{-\frac{1,781}{3,70}} = m_0(0,618) = 61,8\% m_0$$

Έχει μείνει μάζα ίση με το 61,8% της αρχικής.

Καταναλώθηκαν καύσιμα με μάζα ίση με το 38,2% της συνολικής αρχικής μάζας.

Υπολογισμοί στο απόγειο

$\upsilon_{esc,a} = \sqrt{\dfrac{2GM}{r_a}} = \sqrt{\dfrac{2gR^2}{3R}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\sqrt{gR}$, από διατήρηση στροφορμής : $\upsilon_a = \dfrac{r_p}{r_a}\upsilon_p = \dfrac{2}{3}\sqrt{0,6}\sqrt{gR}$

[δεν χρησιμοποιείτε ξανά τον τύπο $\upsilon = \sqrt{GM\left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{a}\right)}$ για να αποφύγετε πηγές λαθών]

$$\Delta\upsilon_a = \upsilon_{esc,a} - \upsilon_a = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}\sqrt{0,6}\right)\sqrt{gR} = (0,3000988)(7,902 \text{ km/s}) = 2,371 \text{ km/s}$$

Στο απόγειο πρέπει να πετύχω μεγαλύτερη *Δυ*.

$$m_a = m_0 e^{-\Delta\upsilon_a/u_e} = m_0 e^{-\frac{2,371}{3,70}} = m_0(0,527) = 52,7\% m_0$$

Έχει μείνει μάζα ίση με το 52,7% της αρχικής (λιγότερη από ό,τι θα έμενε στο περίγειο)
Καταναλώθηκαν καύσιμα με μάζα ίση με το 47,3% της συνολικής αρχικής μάζας (περισσότερα από όσα θα καταναλώνονταν στο περίγειο).

Άρα η μετάβαση γίνεται πιο οικονομικά στο περίγειο.
Είναι πιο οικονομική εκεί που η $\Delta\upsilon$ είναι μικρότερη

Οι αριθμητικές τιμές των ταχυτήτων, αν τις υπολογίσατε, είναι :

$\upsilon_{esc,p} = \sqrt{gR} = 7,902 \text{ km/s}$, $\upsilon_p = \sqrt{0,6}\sqrt{gR} = \sqrt{0,6}(7.901,903) = 6,121 \text{ km/s}$

$\upsilon_{esc,a} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\sqrt{gR} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}(7.901,903) = 6,452 \text{ km/s}$, $\upsilon_a = \dfrac{2}{3}\sqrt{0,6}\sqrt{gR} = \dfrac{2}{3}\sqrt{0,6}(7.901,903) = 4,081 \text{ km/s}$

Για να είναι η μετάβαση από τυχαίο σημείο $2 \to \infty$ πιο οικονομική από ότι από άλλο σημείο $1 \to \infty$, θα πρέπει για την εναπομείνασα μάζα να ισχύει :

$$m_2 > m_1 \Rightarrow m_0 e^{-\Delta\upsilon_2/u_e} > m_0 e^{-\Delta\upsilon_1/u_e} \Rightarrow e^{-\Delta\upsilon_2/u_e} > e^{-\Delta\upsilon_1/u_e} \Rightarrow e^{\Delta\upsilon_2/u_e} < e^{\Delta\upsilon_1/u_e} \Rightarrow \Delta\upsilon_2 < \Delta\upsilon_1$$

Για τη μάζα των καταναλωθέντων καυσίμων :

$$m_0 = m + m_F \Rightarrow m_F = m_0 - m \Rightarrow \frac{m_F}{m_0} = 1 - \frac{m}{m_0} \Rightarrow \frac{m_F}{m_0} = 1 - e^{-\Delta\upsilon/u_e}$$

θα πρέπει να ισχύει :

$$m_{F2} < m_{F1} \Rightarrow m_0\left(1 - e^{-\Delta\upsilon_2/u_e}\right) < m_0\left(1 - e^{-\Delta\upsilon_1/u_e}\right) \Rightarrow -e^{-\Delta\upsilon_2/u_e} < -e^{-\Delta\upsilon_1/u_e} \Rightarrow e^{-\Delta\upsilon_2/u_e} > e^{-\Delta\upsilon_1/u_e} \Rightarrow$$

$$e^{\Delta\upsilon_2/u_e} < e^{\Delta\upsilon_1/u_e} \Rightarrow \Delta\upsilon_2 < \Delta\upsilon_1$$

Άρα η μετάβαση είναι πιο οικονομική από το σημείο όπου η απαιτούμενη $\Delta\upsilon$ είναι μικρότερη

Για όσους/όσες δεν κατάλαβαν την ερώτηση, για να πάει το διαστημόπλοιο από το περίγειο στο απόγειο δεν χρειάζεται πυροδότηση και κατανάλωση καυσίμων, το πάει η βαρύτητα τσάμπα (αυτό σημαίνει είναι σε τροχιά).

Ηλεκτρομαγνητισμός $\varepsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)$

ΘΕΜΑ 4 [2]

4.1 Βρείτε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από ομοιόμορφα ηλεκτρισμένο λεπτό δακτύλιο θετικού φορτίου *Q* και ακτίνας *a* σε σημείο που βρίσκεται απόσταση *x* από το κέντρο του πάνω στον άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του και περνάει από το κέντρο του. [0,4]

4.2 Αν αφήσουμε ένα αρνητικό σημειακό φορτίο *–q*, μάζας *m*, σε μικρή απόσταση $x \ll a$ από το κέντρο του λεπτού δακτυλίου ο οποίος είναι στερεωμένος ακλόνητα, δείξτε ότι αυτό θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και γράψτε τον τύπο της περιόδου του. [0,4]

4.3 Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της 4.1 βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο ομοιόμορφα φορτισμένου κυκλικού δίσκου, ακτίνας *a* και επιφανειακής πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου *σ*, *στον άξονά του*. [0,8]

4.4 Ποιο είναι το μέτρο της έντασης και η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται στο σημείο με θέση $x=-3$ m από επίπεδο λεπτό φύλλο που εκτείνεται σε όλο το επίπεδο *y*-*z*, το οποίο βρίσκεται στη θέση $x=+5$ m και είναι ομοιόμορφα φορτισμένο με θετικό ηλεκτρικό φορτίο επιφανειακής πυκνότητας $\sigma = 3{,}1875$ nC/m^2. [0,4]

ΛΥΣΗ (πολύ αναλυτική)

Halliday Resnick Walker Φυσική: Κεφ. 22.6, 22.7 και **Εβδομάδα 12$^{\eta}$ Ηλεκτρισμός: Σελ. 14-18**

Αποτέλεσμα έντασης ηλεκτρικού πεδίου στην 4.4 σε 5 σημαντικά ψηφία.

$\mathrm{nC} = 10^{-9}\,\mathrm{C}$

4.1 [0,4] Ομοιόμορφα φορτισμένος δακτύλιος σημαίνει ότι τα στοιχειώδη τμήματα του δακτυλίου ίσου μήκους *ds* έχουν ίσο ηλεκτρικό φορτίο $dq = \lambda ds$, όπου $\lambda = \dfrac{Q}{2\pi a} = \dfrac{dq}{ds}$ η σταθερή γραμμική πυκνότητα φορτίου (C/m) σε όλο το μήκος του λεπτού δακτυλίου , που είναι κύκλος με περίμετρο $C = 2\pi a$.

Κάθε στοιχειώδες φορτίο *dq* του δακτυλίου δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο $d\vec{E}$ σε τυχαίο σημείο *P* του άξονα.

Προσθέτουμε τις στοιχειώδεις συνεισφορές $d\vec{E}$ για να βρούμε το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = \int d\vec{E}$ που δημιουργεί ο δακτύλιος (αρχή της επαλληλίας).

Το σημείο *P* απέχει απόσταση z από το κέντρο και όλα τα στοιχειώδη φορτία του δακτυλίου απέχουν από το *P* ίσες αποστάσεις $r = \sqrt{z^2 + a^2}$

Όλες οι ακτίνες *r* από κάθε στοιχείο του δακτυλίου τέμνουν τον άξονα *z* σε ίσες γωνίες $\cos\theta = \dfrac{z}{r}$

Το μέτρο του $d\vec{E}$ είναι, από τον νόμο του Coulomb, ίσο με $dE = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{r^2}$

Οι κάθετες στον άξονα *z* συνιστώσες των συνεισφορών $d\vec{E}$ δύο αντιδιαμετρικών στοιχείων του δακτυλίου είναι αντίθετες και αλληλοαναιρούνται.

Οι παράλληλες με τον άξονα *z* συνιστώσες των $d\vec{E}$ είναι ομόρροπες και προστίθενται.

Άρα το συνολικό πεδίο πάνω στον άξονα *z* (δηλ. τα σημεία του χώρου με συντεταγμένες (0, 0, *z*)) θα είναι παράλληλο με τον άξονα *z*:

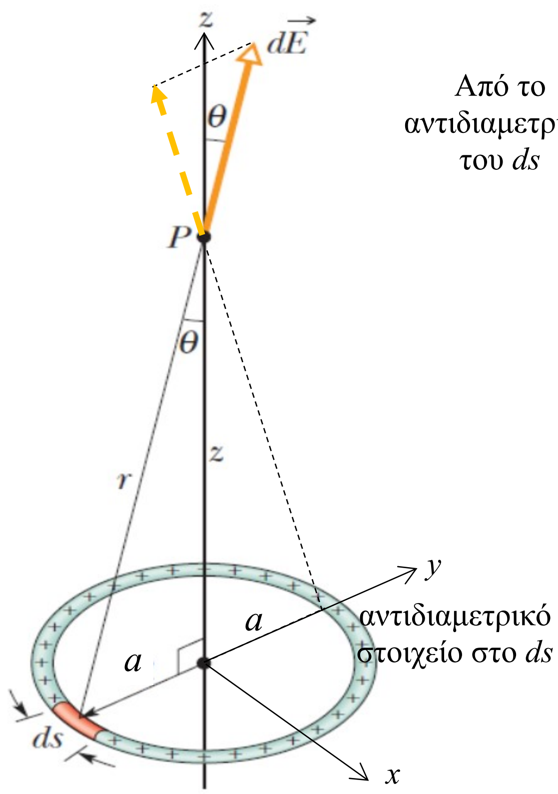
$$\vec{E}(0,0,z) = \int d\vec{E} = \int (\hat{z}dE_z + d\vec{E}_\perp) = \hat{z}\int dE_z + \cancel{\int d\vec{E}_\perp} = \hat{z}\cos\theta\int dE$$

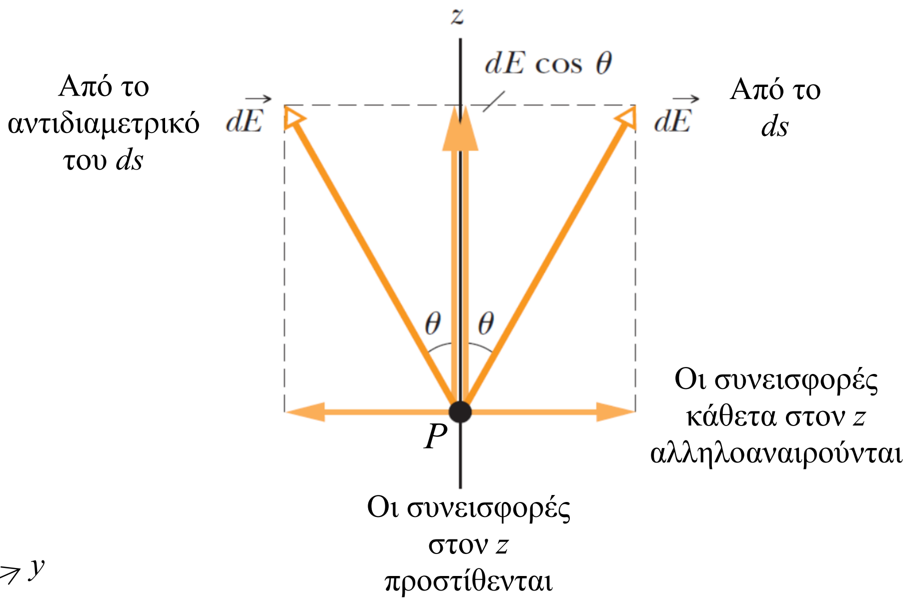
και θα είναι ίσο με

$$\vec{E}(0,0,z) = \hat{z}\frac{z}{r}\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \hat{z}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}\int dq = \hat{z}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{zQ}{r^3} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{E}(0,0,z) = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} \qquad (1)}$$

ΚΑΝΤΕ ΣΧΗΜΑ





ΑΛΛΙΩΣ

Από το δυναμικό που είναι μονόμετρο μέγεθος και άρα δεν χρειάζονται διανύσματα

Για να βρούμε το δυναμικό στον άξονα του δακτυλιδίου χρησιμοποιούμε πάλι την αρχή της επαλληλίας προσθέτοντας τις συνεισφορές από κάθε στοιχείο dq της κυκλικής κατανομής, οι οποίες είναι αριθμοί. Όλα τα στοιχεία απέχουν την ίδια απόσταση $r = \sqrt{z^2 + a^2}$ από το σημείο (0, 0, z) και συνεισφέρουν :

$$dV(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{z^2+a^2}}$$

Άρα:

$$V(0,0,z) = \int_0^Q dV(0,0,z) = \int_0^Q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{z^2+a^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\int_0^Q dq \Rightarrow$$

$$V(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{z^2+a^2}}$$

Το πεδίο είναι η βαθμίδα («διανυσματική παράγωγος») του δυναμικού :

$$\vec{E}(0,0,z) = -\vec{\nabla}V = -\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{z^2+a^2}} = -\hat{z}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dx}\left(z^2+a^2\right)^{-1/2} =$$

$$= -\hat{z}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)(z^2+a^2)^{-3/2}(2z) = \frac{Q\,z}{4\pi\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}$$

4.2 [0,4] Η (1) για μικρές αποστάσεις από το κέντρο $z << a$ γίνεται:

$$\vec{E}(0,0,z << a) = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0 a^3(1+z^2/a^2)^{3/2}}\hat{z} \simeq \hat{z}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}z$$

και άρα η δύναμη που θα δεχτεί ένα αρνητικό σημειακό φορτίο $-q$ από το πεδίο

$$\vec{F} = (-q)\vec{E} = -\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\right)z\;\hat{z} = (-kz)\hat{z}$$

είναι δύναμη επαναφοράς με $k = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$ που οδηγεί σε απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ και περίοδο :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a^3}}} = 4\pi\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 a^3 m}{qQ}} \quad (2)$$

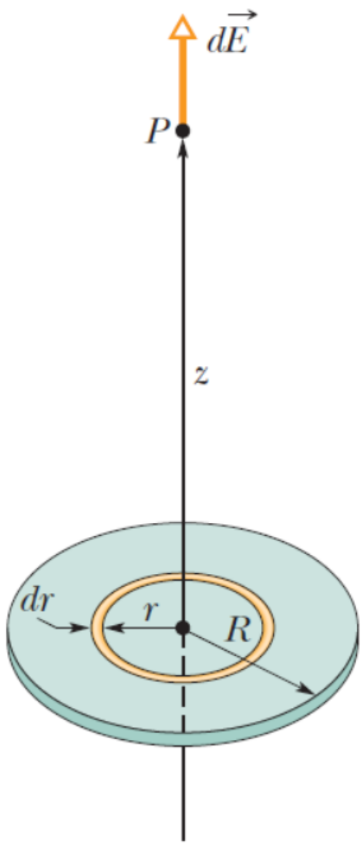
4.3 [0,8] Χωρίζουμε τον δίσκο σε στοιχειώδεις δακτυλίους για τους οποίους μόλις βρήκαμε τον τύπο του πεδίου που δημιουργούν και προσθέτουμε τις συνεισφορές όλων των δακτυλίων για να βρούμε το συνολικό πεδίο του δίσκου. ΚΑΝΤΕ ΣΧΗΜΑ

Κάθε δακτύλιος έχει: ακτίνα *r* από το κέντρο του δίσκου, πάχος *dr*, μήκος $2\pi r$ και εμβαδόν $dA = 2\pi r dr$. Άρα έχει φορτίο ίσο με $dQ = \sigma dA = 2\pi\sigma r\, dr$ και από την (1) συνεισφέρει στο ηλεκτρικό πεδίο όλου του δίσκου

$$d\vec{E} = \hat{z} dE = \hat{z}\frac{dQ\, z}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2}}$$

Έτσι το πεδίο του δίσκου πάνω στον άξονα *z* θα είναι :

$$\vec{E}(0,0,z) = \int d\vec{E} = \hat{z}\int \frac{dQ\, z}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2}} = \hat{z}\int_0^a \frac{\sigma 2\pi r dr\, z}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2}} = \hat{z}\frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\int_0^a (r^2+z^2)^{-3/2} 2r dr$$



Η έκφραση έξω από την παρένθεση είναι η παράγωγος της παρένθεσης. Έτσι με την αλλαγή μεταβλητής $X = r^2 + z^2$, $dX = 2rdr$ το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int_0^a (r^2+z^2)^{-3/2} 2r dr = \int_{z^2}^{a^2+z^2} X^{-3/2} dX = \left[\frac{X^{-3/2+1}}{-3/2+1}\right]_{z^2}^{a^2+z^2} = \left[\frac{X^{-1/2}}{-1/2}\right]_{z^2}^{a^2+z^2}$$

$$= 2\left[\frac{1}{\sqrt{X}}\right]_{a^2+z^2}^{z^2} = 2\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

Οπότε το πεδίο θα είναι :

$$\vec{E}(0,0,z) = \hat{z}\frac{\sigma z}{4\varepsilon_0} 2\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) = \hat{z}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

Ο όρος $\dfrac{z}{|z|}$ μας δίνει το πρόσημο του αριθμού *z* το οποίο συμβολίζουμε με τη συνάρτηση του προσήμου (sign) ως $\dfrac{z}{|z|} = \operatorname{sgn}(z)$. Έτσι ο παραπάνω τύπος καλύπτει όλες τις τιμές του *z*, τόσο τις θετικές (όπως στο σχήμα) όσο και τις αρνητικές (από την κάτω μεριά του δίσκου). Το πεδίο θετικού δίσκου, όπως θα περιμέναμε, δείχνει πάντα μακριά από τον δίσκο. Προς την κατεύθυνση $\hat{z}$ για θετικά *z* και προς την κατεύθυνση $-\hat{z}$ για αρνητικά *z*

$$\vec{E}(0,0,z) = \mathrm{sgn}(z)\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\hat{z} \quad (3)$$

Πεδίο δίσκου που βρίσκεται στο επίπεδο *x-y* με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων, πάνω στον άξονά του (*z*).

4.4 Παίρνοντας το όριο της ακτίνας να τείνει στο άπειρο $a \to \infty$ με το σ σταθερό, ο δίσκος γίνεται ένα ομοιόμορφα φορτισμένο επίπεδο φύλλο απείρων διαστάσεων το οποίο θα έχει **ένταση πεδίου με σταθερό μέτρο** επειδή ο 2ος όρος στην (3) γίνεται μηδέν

$$\lim_{a\to\infty}\left(\frac{|z|}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) = 0$$

Άρα για φύλλο τοποθετημένο στο επίπεδο *y-z* στη θέση *x*=0 το πεδίο θα είναι :

$$\vec{E}_{\delta\acute{\iota}\sigma\kappa o\varsigma}(x,0,0) = \hat{x}\,\mathrm{sgn}(x)\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{|x|}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) \xrightarrow[a\to\infty]{} \vec{E}_{\substack{\varepsilon\pi\acute{\iota}\pi\varepsilon\delta o\\ \varphi\acute{\upsilon}\lambda\lambda o}}(x,0,0) = \hat{x}\,\mathrm{sgn}(x)\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

και μάλιστα θα ισχύει για κάθε σημείο (*x*, *y*, *z*) γιατί το επίπεδο φύλλο απείρων διαστάσεων δεν έχει άξονα (όπως είχε ο δίσκος) ή αλλιώς κάθε ευθεία που ξεκινάει από οποιοδήποτε σημείο του *y*, *z* κάθετα στο φύλλο είναι άξονάς του.

$$\vec{E}_{\substack{\varepsilon\pi\acute{\iota}\pi\varepsilon\delta o\\ \varphi\acute{\upsilon}\lambda\lambda o}}(x,y,z) = \hat{x}\,\mathrm{sgn}(x)\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad \text{επίπεδο φύλλο στη θέση } x=0$$

Η μετατοπισμένη κατά *c* μιας συνάρτησης *f*(*x*) είναι η *f*(*x*–*c*)

$$\vec{E}_{\substack{\varepsilon\pi\acute{\iota}\pi\varepsilon\delta o\\ \varphi\acute{\upsilon}\lambda\lambda o}}(x,y,z) = \hat{x}\,\mathrm{sgn}(x-5)\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad \text{επίπεδο φύλλο στη θέση } x=+5$$

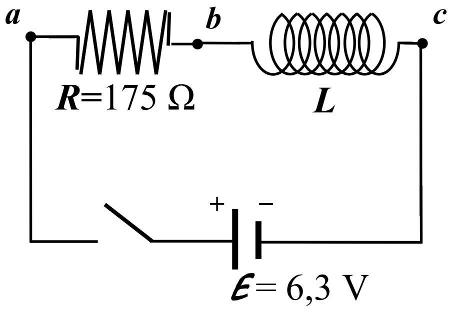
Άρα η ζητούμενη ένταση στο *x*=–3 m είναι

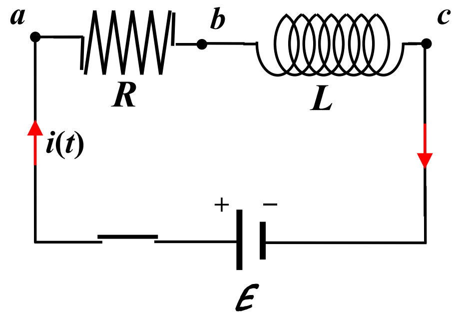
$$\vec{E}_{\substack{\varepsilon\pi\acute{\iota}\pi\varepsilon\delta o\\ \varphi\acute{\upsilon}\lambda\lambda o}}(-3,y,z) = \hat{x}\,\mathrm{sgn}(-3-5)\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = -\hat{x}\frac{3{,}1875\times 10^{-9}}{2(8{,}8542\times 10^{-12})} = -\hat{x}\,0{,}179999322\times 10^{3} = -180{,}00\,\hat{x}\ \text{N/C}$$

και η κατεύθυνσή της είναι προς τα αριστερά

ΘΕΜΑ 5 [2]

Στο παρακάτω κύκλωμα *RL* συνεχούς ρεύματος κλείνουμε τον διακόπτη τη χρονική στιγμή *t*=0.





5.1 Χρησιμοποιώντας τον «κανόνα τάσεων του Kirchhoff» να βρείτε τη χρονική εξάρτηση του ρεύματος $i(t)$ που διαρρέει το κύκλωμα. [1]

5.2 Ποια είναι η τελική τιμή I του ρεύματος στο κύκλωμα; [0,2]

5.3 Αν τη χρονική στιγμή t=58 μs, το ρεύμα έχει φτάσει στην τιμή i=3,9 mA πόση είναι η αυτεπαγωγή L του πηνίου; [0.4]

5.4 Δείξτε ότι η σταθερά $\tau=\frac{L}{R}$ έχει μονάδες χρόνου και υπολογίστε την [0,4]

ΛΥΣΗ

Απαντήσεις σε δύο σημαντικά ψηφία (από το 6,3).

$\mu\text{s}=10^{-6}\text{s}$, $\quad \text{mA}=10^{-3}\ \text{A}$

5.1 [1]

$$V_{ac}=V_{ab}+V_{bc}\Rightarrow \mathcal{E}=iR+L\frac{di}{dt}\quad (1)\ \text{διαφορική εξίσωση}$$

1^{ος} τρόπος εύρεσης $i(t)$ με ολοκληρωτικό παράγοντα

Πολλαπλασιάζω με $e^{Rt/L}$ και η δεξιά πλευρά γίνεται η παράγωγος γινομένου.

$$\mathcal{E}\ e^{Rt/L}=Re^{Rt/L}\cdot\ i+e^{Rt/L}L\cdot\frac{di}{dt}\Rightarrow \mathcal{E}\ e^{Rt/L}=\frac{d}{dt}\left(e^{Rt/L}Li\right)$$

Ολοκληρώνω, με $i_0=0$ για $t=0$

$$\mathcal{E}\int_0^t e^{Rt/L}dt=\int_0^{e^{Rt/L}Li}d\left(e^{Rt/L}Li\right)\Rightarrow \mathcal{E}\frac{\cancel{L}}{R}\left(e^{Rt/L}-1\right)=e^{Rt/L}\cancel{L}i\Rightarrow i(t)=\frac{\mathcal{E}}{R}\left(1-e^{-Rt/L}\right)$$

2^{ος} τρόπος εύρεσης $i(t)$ με απευθείας ολοκλήρωση

$$\mathcal{E}=iR+L\frac{di}{dt}\Rightarrow \frac{di}{dt}=\frac{1}{L}\left(\mathcal{E}-iR\right)=-\frac{(i-\mathcal{E}/R)}{L/R}\Rightarrow \frac{di}{i-\mathcal{E}/R}=-\frac{dt}{\tau}\quad \text{με}\quad \tau=\frac{L}{R}$$

Ολοκληρώνω

$$\int_0^i\frac{di}{i-\mathcal{E}/R}=-\int_0^t\frac{dt}{\tau}\Rightarrow \ln\left(\frac{i-\mathcal{E}/R}{-\mathcal{E}/R}\right)=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow \frac{i-\mathcal{E}/R}{-\mathcal{E}/R}=e^{-t/\tau}\Rightarrow i-\mathcal{E}/R=-\mathcal{E}/R\,e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{i(t)=\frac{\mathcal{E}}{R}\left(1-e^{-Rt/L}\right)\quad (2)\quad \text{εκθετική ανάπτυξη ρεύματος}}$$

5.2 [0,2]

Όταν $t\to\ \infty$ το ρεύμα δεν μεταβάλλεται πιά $\frac{di}{dt}$=0 καθώς έχει φτάσει στην τελική του τιμή $i_\infty=I$

και από την (1) $\mathcal{E}=IR+L\cdot\ 0\Rightarrow I=\frac{\mathcal{E}}{R}$

Ή από την (2) : $I=i(\infty)=\frac{\mathcal{E}}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}\infty}\right)=\frac{\mathcal{E}}{R}(1-0)=\frac{\mathcal{E}}{R}$

$$\boxed{I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{6,3}{175} = 0,036 = 36 \text{ mA}}$$

5.3 [0,4] Λύνουμε την (2) ως προς L:

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \Rightarrow 1 - e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{iR}{\mathscr{E}} \Rightarrow e^{-\frac{R}{L}t} = 1 - \frac{iR}{\mathscr{E}} \Rightarrow e^{\frac{R}{L}t} = \left(1 - \frac{iR}{\mathscr{E}}\right)^{-1} \Rightarrow \frac{R}{L}t = \ln\left[\left(1 - \frac{iR}{\mathscr{E}}\right)^{-1}\right] \Rightarrow$$

$$L = \frac{Rt}{-\ln\left(1 - \frac{iR}{\mathscr{E}}\right)} = -\frac{(175)(58\times10^{-6})}{\ln\left(1 - \frac{(3,9\times10^{-3})(175)}{6,3}\right)} = -\frac{10,15\times10^{-3}}{\ln(1-0,108333)} = -\frac{10,15\times10^{-3}}{\ln(0,891667)} = -\frac{10,15\times10^{-3}}{-0,114663} \Rightarrow$$

$$\boxed{L = 88,52027\times10^{-3} = 89 \text{ mH}}$$

Ή απευθείας αριθμητικά αφού έχουμε i=3,9 mA = $3,9\times10^{-3}$ A για t=58 μs = 58×10^{-6} s

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \Rightarrow 3,9\times \cancel{10^{-3}} = 36\times \cancel{10^{-3}}\left(1 - \exp\left(-\frac{(175)(58\times10^{-6})}{L}\right)\right) \Rightarrow$$

$$1 - \exp\left(-\frac{0,01015}{L}\right) = \frac{3,9}{36} \Rightarrow \exp\left(-\frac{0,01015}{L}\right) = 1 - \frac{1,3}{12} = \frac{10,7}{12} \Rightarrow \exp\left(\frac{0,01015}{L}\right) = \frac{12}{10,7} \Rightarrow$$

$$\frac{0,01015}{L} = \ln\left(\frac{12}{10,7}\right) \Rightarrow L = \frac{0,01015}{0,114663} = 0,08852027 = 89 \text{ mH}$$

Προσέγγιση.

Επειδή δεν είχατε βρει την εξίσωση $i(t) = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$ επιχειρήσατε να βρείτε κάποια τιμή για το L από τη διαφορική εξίσωση (1) $\mathscr{E} = iR + L\frac{di}{dt}$ θεωρώντας ότι επειδή το Δt είναι πολύ μικρό :

$\Delta t = t - t_0 = 58\times10^{-6} - 0 = 0,000058$ s τότε $\frac{di}{dt} \approx \frac{\Delta i}{\Delta t}$.

Καλά κάνατε και αν το κάνατε σωστά πήρατε τις μισές μονάδες (0,2) επειδή κάνατε κάτι λογικό για να βρείτε κάτι κοντά στη λύση. Έπρεπε να βρείτε :

$$6,3 = (3,9\times10^{-3})(175) + L\frac{3,9\times10^{-3}}{58\times10^{-6}} \Rightarrow 6,3 = 0,6825 + 67,2414\,L \Rightarrow L = \frac{5,6175}{67,2414} = 0,083542 = 84 \text{ mH}$$

Αρκετά κοντά στην πραγματική τιμή 89 mH

5.4 [0,4] $[\tau] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{\text{H}}{\Omega}$

Το χένρι το βρίσκουμε από το νόμο του Faraday για πηνίο: $V_L = L\frac{di}{dt} \Rightarrow [L] = \frac{[V][t]}{[i]} \Rightarrow \text{H}=\frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}}$ ενώ από τον νόμο του Ohm $V = IR \Rightarrow [V] = [I][R] \Rightarrow \text{V}=\text{A}\cdot\Omega$

Άρα $[\tau] = \frac{\text{H}}{\Omega} = \frac{1}{\Omega}\frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}} = \frac{\cancel{\text{V}}\cdot\text{s}}{\cancel{\text{V}}} = \text{s}$

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R} = \frac{89\times10^{-3}\ \Omega}{175\ \text{H}} = 0,5085713\times10^{-3}\ \text{s} = 5,1\times10^{-4}\ \text{s},\ \text{τάξη μεγέθους 510 μs}}$$

Αλλιώς. Ο εκθέτης στη (2) πρέπει να είναι αδιάστατος άρα : $\left[\frac{R}{L}t\right] = 1 \Rightarrow \left[\frac{L}{R}\right] = [t] = \text{s}$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ