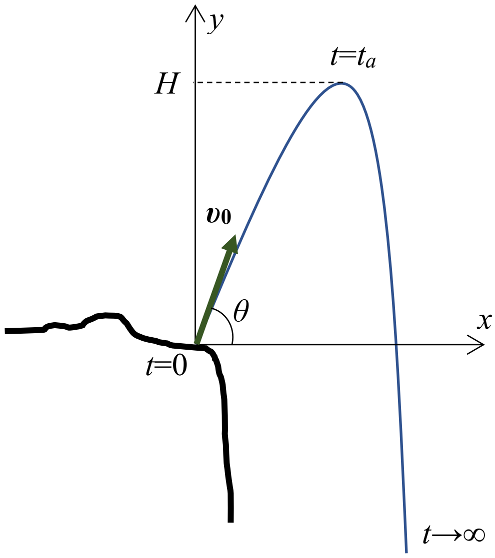
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2024

ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ

Δευτέρα, 2 Σεπτεμβρίου 09:00-12:00 π.μ. Αίθουσες: ΑΠ3_8, ΑΠ3_11
Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης (kphilippides@uowm.gr)

Μεταφέρετε όλα τα σχήματα στην κόλλα σας.

ΘΕΜΑ 1. Βλήμα εκτοξεύεται από το χείλος γκρεμού (Σχήμα 1) και ανέρχεται σε μέγιστο ύψος H=1.800 m. Το βλήμα εκτός από το βάρος του $\vec{F}_G = m\vec{g}$ δέχεται και οπισθέλκουσα $\vec{F}_D = -b\vec{\upsilon}$ από την αντίσταση του αέρα.
Για τους αριθμητικούς υπολογισμούς χρησιμοποιείστε :
$b = 1{,}00\times10^{-2}$ kg/s, $m = 1{,}00$ kg, $\upsilon_0 = 250$ m/s, $g = 9{,}80$ N/kg , $\theta = 53{,}13^{\circ}$



Σχήμα 1

1.1 [0,2] Δείξτε ότι η αρχή της ορμής οδηγεί στη διαφορική εξίσωση : $\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \dfrac{\vec{\upsilon}}{\tau} = \vec{g}$ (α) , όπου $\tau = \dfrac{m}{b}$

1.2 [0,8] Ολοκληρώστε την (α) για να βρείτε τη χρονική εξάρτηση της ταχύτητας :

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 e^{-t/\tau} + \vec{g}\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad (\beta)$$

1.3 [0,2] Βρείτε την οριακή ταχύτητα που θα αποκτήσει το βλήμα (μέτρο σε m/s και κατεύθυνση)

1.4 [0,6] Δείξτε ότι ο χρόνος ανόδου δίνεται από τον τύπο $t_a = \dfrac{m}{b}\ln\left(1 + b\dfrac{\upsilon_0 \sin\theta}{mg}\right)$ και ότι για μικρή αντίσταση αέρα ($b\to0$) είναι ίσος με το χρόνο ανόδου χωρίς αντίσταση αέρα.

(Υπόδειξη: είτε L' Hospital είτε $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + O(x^3)$ για $|x| < 1$)

1.5 [0,2] Υπολογίστε την ταχύτητα στο μέγιστο ύψος H

1.6 [0,5] Υπολογίστε το έργο της οπισθέλκουσας μέχρι το μέγιστο ύψος

ΛΥΣΗ

1.1 [0,2] Από την Αρχή της Ορμής έχουμε : $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{net} \Rightarrow m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}_G + \vec{F}_D \Rightarrow m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{g} - b\vec{\upsilon} \Rightarrow \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{g} - \dfrac{b}{m}\vec{\upsilon}$

$$\boxed{\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \frac{\vec{\upsilon}}{\tau} = \vec{g} \quad (\alpha)}$$

όπου $\tau = \dfrac{m}{b} = \dfrac{1{,}00}{1{,}00\times10^{-2}} = 100$ s

1.2 [0,8] Η (α) λύνεται εύκολα με ολοκληρωτικό παράγοντα. Αν την πολλαπλασιάσω με $e^{t/\tau}$ η αριστερή πλευρά της εξίσωσης γίνεται η παράγωγος του γινομένου $e^{t/\tau}\vec{\upsilon}$ και άρα μπορεί να ολοκληρωθεί κατευθείαν

$$e^{t/\tau}\left(\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right)+\left(\frac{1}{\tau}e^{t/\tau}\right)\vec{\upsilon}=e^{t/\tau}\vec{g}\Rightarrow e^{t/\tau}\left(\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right)+\frac{de^{t/\tau}}{dt}\vec{\upsilon}=e^{t/\tau}\vec{g}\ \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t/\tau}\vec{\upsilon}\right)=e^{t/\tau}\vec{g}\ \Rightarrow\int_0^t\frac{d}{dt}\left(e^{t/\tau}\vec{\upsilon}\right)dt=\vec{g}\int_0^t e^{t/\tau}dt\Rightarrow e^{t/\tau}\vec{\upsilon}(t)\Big|_0^t=\vec{g}\,\frac{e^{t/\tau}}{1/\tau}\Bigg|_0^t\ \Rightarrow e^{t/\tau}\vec{\upsilon}(t)-\vec{\upsilon}_0=\vec{g}\tau\left(e^{t/\tau}-1\right)$$

Όλα επί $e^{-t/\tau}$ για να βρω το $\vec{\upsilon}(t)$

$$\boxed{\vec{\upsilon}(t)=\vec{\upsilon}_0e^{-t/\tau}+\vec{g}\tau\left(1-e^{-t/\tau}\right)\quad(\beta)}$$

Ισοδύναμα, αν δεν θυμάστε τον ολοκληρωτικό παράγοντα, ολοκληρώνεται την (α) ανά συνιστώσες, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\vec{g}=-g\hat{y}$

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}+\frac{\vec{\upsilon}}{\tau}=\vec{g}\Rightarrow\begin{cases}x:\ \dfrac{d\upsilon_x}{dt}+\dfrac{\upsilon_x}{\tau}=0\\ y:\dfrac{d\upsilon_y}{dt}+\dfrac{\upsilon_y}{\tau}=-g\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{d\upsilon_x}{\upsilon_x}=-\dfrac{dt}{\tau}\\ \tau\dfrac{d\upsilon_y}{dt}=-\upsilon_y-g\tau\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\displaystyle\int_{\upsilon_{0x}}^{\upsilon_x}\frac{d\upsilon_x}{\upsilon_x}=-\frac{1}{\tau}\int_0^t dt\\ \displaystyle\int_{\upsilon_{0y}}^{\upsilon_y}\frac{d\upsilon_y}{\upsilon_y+g\tau}=-\frac{1}{\tau}\int_0^t dt\end{cases}\Rightarrow$$

$$x:\ \ln\upsilon_x-\ln\upsilon_{0x}=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow\ln\left(\frac{\upsilon_x}{\upsilon_{0x}}\right)=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow\frac{\upsilon_x}{\upsilon_{0x}}=e^{-t/\tau}\Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_x(t)=\upsilon_{0x}e^{-t/\tau}\quad(\beta.1)}$$

$$y:\ u=\upsilon_y+g\tau,\quad du=d\upsilon,\ \ t=0\Rightarrow u_0=\upsilon_{0y}+g\tau$$

$$\int_{\upsilon_{0y}}^{\upsilon_y}\frac{d\upsilon_y}{\upsilon_y+g\tau}=-\frac{1}{\tau}\int_0^t dt\Rightarrow\ \int_{u_0}^{u}\frac{du}{u}=-\frac{1}{\tau}\int_0^t dt$$

$$\ln(\upsilon_y+g\tau)-\ln(\upsilon_{0y}+g\tau)=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow\ \ln\frac{\upsilon_y+g\tau}{\upsilon_{0y}+g\tau}=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow\frac{\upsilon_y+g\tau}{\upsilon_{0y}+g\tau}=e^{-t/\tau}\Rightarrow\ \upsilon_y=-g\tau+(\upsilon_{0y}+g\tau)e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{\upsilon_y(t)=\upsilon_{0y}e^{-t/\tau}+g\tau\left(e^{-t/\tau}-1\right)\ (\beta.2)}$$

1.3 [0,2]

$$\vec{\upsilon}_{o\rho}\equiv\vec{\upsilon}(t\to\infty)=\lim_{t\to\infty}\left[\ \vec{\upsilon}_0e^{-t/\tau}+\vec{g}\tau\left(1-e^{-t/\tau}\right)\right]=\vec{\upsilon}_0\cdot\ 0+\vec{g}\tau\left(1-0\right)=\vec{g}\tau=-\frac{m}{b}g\hat{y}=-\frac{(1,00)(9,80)}{(1,00\times10^{-2})}\hat{y}=-980\,\hat{y}\ \text{m/s}$$

Βλέπουμε ότι για $t\to\infty$ το σώμα «ξεχνάει» την αρχική ταχύτητα που είχε και κινείται (πέφτει) με <u>σταθερό μέτρο ταχύτητας</u> $\upsilon_{o\rho}=\dfrac{mg}{b}=980$ m/s στην κατεύθυνση του πεδίου βαρύτητας $\vec{g}$ δηλ. την $-\hat{y}$. Η όποια ταχύτητα είχε κάθετα στο $\vec{g}$ (δηλ. οριζόντια) έχει μηδενιστεί.

Ισοδύναμα: Η οριακή ταχύτητα επιτυγχάνεται όταν η οπισθέλκουσα δύναμη από την αντίσταση του αέρα γίνει αντίθετη με τη δύναμη του βάρους και άρα η συνισταμένη μηδενίζεται :

$$\vec{F}_G+\vec{F}_D=0\Rightarrow\ \vec{F}_D=-\vec{F}_G\Rightarrow\ -b\vec{\upsilon}_{o\rho}=-m\vec{g}\Rightarrow\vec{\upsilon}_{o\rho}=\frac{m}{b}\vec{g}=-\frac{mg}{b}\hat{y}$$

1.4 [0,6]

Ο χρόνος ανόδου t_a βρίσκεται θέτοντας $\upsilon_y(t_a)=0$ στην εξίσωση (β):

$$\upsilon_y(t_a)=0\Rightarrow\ \upsilon_{0y}e^{-t_a/\tau}+g\tau\left(e^{-t_a/\tau}-1\right)=0\Rightarrow\ e^{-t_a/\tau}(\upsilon_{0y}+g\tau)=g\tau\Rightarrow\ e^{t_a/\tau}=1+\frac{\upsilon_{0y}}{g\tau}\Rightarrow\frac{t_a}{\tau}=\ln\left(1+\frac{\upsilon_{0y}}{g\tau}\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{t_a=\frac{m}{b}\ln\left(1+b\frac{\upsilon_0\sin\theta}{mg}\right)\quad[0,3]}$$

Για μικρή αντίσταση αέρα: $b\to 0 \Rightarrow b\dfrac{\upsilon_0\sin\theta}{mg}\to 0$ αναπτύσσω το λογάριθμο σε σειρά

$$t_a=\frac{m}{b}\ln\left(1+b\frac{\upsilon_0\sin\theta}{mg}\right)=\frac{m}{b}\left(b\frac{\upsilon_0\sin\theta}{mg}-\frac{1}{2}\left(b\frac{\upsilon_0\sin\theta}{mg}\right)^2+O(b^3)\right)=\frac{\upsilon_0\sin\theta}{g}-b\frac{\upsilon_0^2\sin^2\theta}{2mg^2}+O(b^2)=\frac{\upsilon_0\sin\theta}{g}+O(b)$$

Άρα $\lim\limits_{b\to 0}(t_a)=\lim\limits_{b\to 0}\left(\dfrac{\upsilon_0\sin\theta}{g}+O(b)\right)=\dfrac{\upsilon_0\sin\theta}{g}$ [0,2]

Με L' Hospital:

$$\lim_{b\to 0}(t_a)=\lim_{b\to 0}\left(\frac{m\ln\left(1+b\frac{\upsilon_0\sin\theta}{mg}\right)}{b}\right)=\lim_{b\to 0}\left(\frac{m\frac{d\ln\left(1+b\frac{\upsilon_0\sin\theta}{mg}\right)}{db}}{\frac{d(b)}{db}}\right)=\lim_{b\to 0}\left(\frac{m\frac{1}{1+b\frac{\upsilon_0\sin\theta}{mg}}\frac{\upsilon_0\sin\theta}{mg}}{1}\right)=\frac{\upsilon_0\sin\theta}{g}$$

Αυτή η έκφραση δίνει το χρόνο ανόδου όταν δεν υπάρχει αντίσταση αέρα. Τότε η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας είναι $\upsilon_y(t)=\upsilon_{0y}-gt$ και γίνεται μηδέν για $t_a=\dfrac{\upsilon_{0y}}{g}=\dfrac{\upsilon_0\sin\theta}{g}$ [0,1]

1.5 [0,2] Στο μέγιστο ύψος το ρολόι γράφει

$$t_a=\frac{m}{b}\ln\left(1+b\frac{\upsilon_0\sin\theta}{mg}\right)=\frac{1}{10^{-2}}\ln\left(1+10^{-2}\frac{250\sin(53,13^\circ)}{(1)(9,8)}\right)=100\ln\left(\frac{9,8+(2,5)(0,8)}{9,8}\right)=$$

$$=100\ln\left(\frac{11,8}{9,8}\right)=100\ln(1,20408)=18,5717=18,6\text{ s}$$

$$\boxed{t_a=18,6\text{ s}}$$

και η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας είναι ίση με μηδέν

$$\boxed{\upsilon_y(t_a)=0}$$

Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας είναι ίση με :

$$\upsilon_x(t_a)=\upsilon_0\cos\theta\, e^{-t_a/\tau}=(250)\cos(53,13^\circ)\exp\left(-\frac{18,5717}{100}\right)=124,5766$$

Ή

$$\upsilon_x(t_a)=\upsilon_0\cos\theta\, e^{-\tau\ln\left(1+b\frac{\upsilon_0\sin\theta}{mg}\right)/\tau}=\frac{\upsilon_0\cos\theta}{1+b\frac{\upsilon_0\sin\theta}{mg}}=\frac{(250)\cos(53,13^\circ)}{1+10^{-2}\frac{250\sin(53,13^\circ)}{(1)(9,8)}}=\frac{(250)(0,6)}{1+\frac{(2,5)(0,8)}{9,8}}=\frac{150}{1,20408}=124,5766$$

$$\boxed{\upsilon_x(t_a)=124,6\text{ m/s}}$$

Αρχικά η οριζόντια ταχύτητα ήταν $\upsilon_{x0}=\upsilon_0\cos\theta=(250)\cos(53,13^\circ)=150$ m/s

1.6 [0,5] Από την αρχή της ενέργειας

$$\Delta E=W_G+W_D\Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_x^2(t_a)-\frac{1}{2}m\upsilon_0^2=U(0)-U(H)+W_D\Rightarrow W_D=\frac{1}{2}m\upsilon_x^2(t_a)-\frac{1}{2}m\upsilon_0^2+mgH\Rightarrow$$

$$\boxed{W_D=\frac{1}{2}(1)(124,5766^2)-\frac{1}{2}(1)(250^2)+(1)(9,8)(1.800)=7.760-31.250+17.640=-5,85\text{ kJ}}$$

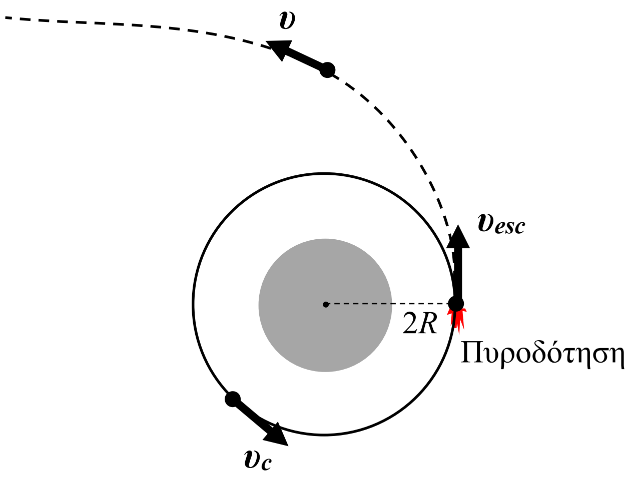
Σωματιδιακή ενέργεια στη μη σχετικιστική προσέγγιση: $E=\dfrac{1}{2}m\upsilon^2+mc^2$

Το βάρος είναι συντηρητική δύναμη : $W_G(\alpha\rho\chi\to\tau\varepsilon\lambda)=-\Delta U_G(\alpha\rho\chi\to\tau\varepsilon\lambda)=U_G(\alpha\rho\chi)-U_G(\tau\varepsilon\lambda)$

Η δυναμική ενέργεια του βάρους, κοντά στην επιφάνεια της Γης, είναι : $U_G(x,y,z)=mgy$

ΘΕΜΑ 2

Διαστημικό όχημα βρίσκεται σε κυκλική τροχιά, ακτίνας $r = 2R$, γύρω από πλανήτη ακτίνας $R = 6.400$ km και μάζας M. Η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια του πλανήτη είναι $g = 9$ N/kg. Το όχημα διαθέτει πυραύλους οι οποίοι όταν πυροδοτούνται εκτοξεύουν καυσαέρια με ταχύτητα $u = 3,0$ km/s ως προς το όχημα.



Σχήμα 2

1.1 [0,1] Δείξτε ότι $GM = gR^2$

1.2 [0,8] Βρείτε τον τύπο που δίνει την ταχύτητα υ_c κυκλικής τροχιάς ακτίνας r και υπολογίστε την ;

1.3 [0,8] Βρείτε τον τύπο που δίνει την ταχύτητα διαφυγής υ_{esc} από απόσταση r και υπολογίστε την.

1.4 [0,8] Το όχημα πυροδοτεί τους πυραύλους του και διαφεύγει από τη βαρυτική έλξη του πλανήτη. Ποιο είναι το ελάχιστο κλάσμα της μάζας του που πρέπει να κάψει σε καύσιμα;

ΛΥΣΗ

1.1 [0,1] Στην επιφάνεια κάθε πλανήτη μάζας M και ακτίνας R :

$$W = F_G \Rightarrow \cancel{m} g = G\frac{\cancel{m} M}{R^2} \Rightarrow gR^2 = GM$$

1.2 [0,8] Στην κυκλική τροχιά, η μόνη διαθέσιμη δύναμη στην ακτινική διεύθυνση, η δύναμη της βαρύτητας, θα προκαλεί την κεντρομόλο επιτάχυνση του οχήματος προς το κέντρο του πλανήτη.

$$m\vec{a} = \vec{F}_{net} \Rightarrow ma_c = F_G \Rightarrow m\frac{\upsilon_c^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow \upsilon_c = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad [0,4]$$

$$\upsilon_c = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{gR^2}{2R}} = \sqrt{\frac{gR}{2}} = \sqrt{\frac{(9)(6.400.000)}{2}} = (3)(8)(100)\sqrt{5} = 5.366,6 \text{ m/s} \quad [0,4]$$

1.3 [0,8] Στο άπειρο, το όχημα θα έχει την ίδια ενέργεια με αυτή που είχε σε απόσταση r , αφού η ενέργεια διατηρείται. Η ταχύτητα διαφυγής είναι η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το όχημα σε απόσταση r για να καταφέρει να φτάσει ίσα ίσα στο άπειρο, δηλαδή όταν φτάσει εκεί να έχει ταχύτητα μηδέν, $\upsilon_\infty = 0$.

Η δυναμική ενέργεια της βαρύτητας μεταξύ του πλανήτη και του οχήματος δίνεται από τον τύπο :

$$U_G(r) = -\frac{GMm}{r}$$

$$K_c + U_c = K_\infty + U_\infty \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\upsilon_{esc}^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\upsilon_\infty^2 - \frac{GMm}{\infty} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_{esc}^2 - \frac{GMm}{r} = 0 - 0 \Rightarrow$$

$$\upsilon_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2}\upsilon_c \quad [0,4]$$

$$\upsilon_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{2R}} = \sqrt{gR} = \sqrt{(9)(6.400.000)} = (3)(8)(100)\sqrt{10} = 7.589,5 \text{ m/s} \quad [0,4]$$

$$\text{ή} \quad \upsilon_{esc} = \sqrt{2}\upsilon_c = \sqrt{2}(5.366,6) = 7.589,5 \text{ m/s}$$

1.4 [0,8] Η απαιτούμενη μεταβολή που πρέπει να επιτευχθεί στο μέτρο της ταχύτητας πρέπει να είναι τουλάχιστον :

$$\Delta\upsilon = \upsilon_{esc} - \upsilon_c = 7.589,5 - 5.366,6 = 2.222,9 \text{ m/s} \;\; [0,1]$$

Από την εξίσωση του πυραύλου (στο κενό ή για στιγμιαία πυροδότηση) :

$$\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{\Delta\upsilon}{u}} = e^{-\frac{2.222,9}{3.000}} = e^{-0,740967} = 0,47665 = 47,67\% \;\; [0,4]$$

Ηλεκτρομαγνητισμός

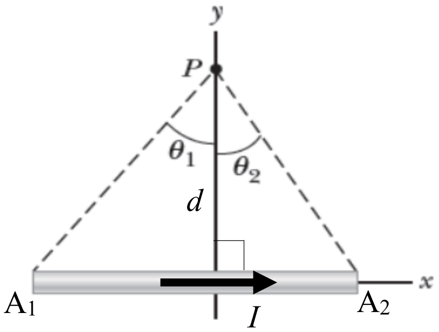
ΘΕΜΑ 3 3.1 [1] Χρησιμοποιώντας το νόμο των Biot-Savart $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{s}\times\hat{r}}{r^2}$ δείξτε ότι το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται στο σημείο P του σχήματος 3.1 από το ρευματοφόρο ευθύγραμμο τμήμα A_1A_2 δίνεται από τον τύπο: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{d}\left(\sin\theta_1 - \sin\theta_2\right)\hat{z}$

(Υπόδειξη: Σχήμα 3.2 Θετική κατεύθυνση θ προς τα αριστερά, θετική κατεύθυνση x προς τα δεξιά)

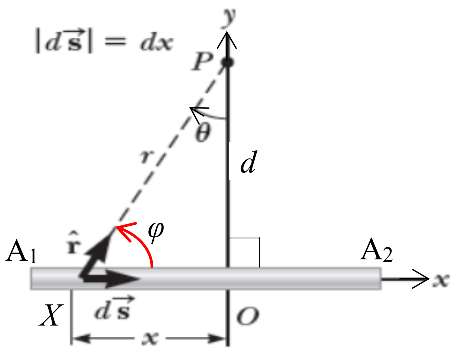
3.2 [1,2] Δείξτε ότι η έκφραση για το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται στο κέντρο ορθογώνιου παραλληλόγραμμου σύρματος πλευρών a και b, που διαρρέεται από ρεύμα I (Σχήμα 3.3), δίνεται από τον τύπο : $B_{\square} = \mu_0\frac{I}{G}$ όπου G γεωμετρικός παράγοντας με μονάδες μήκους $G = \frac{\pi ab}{2\delta}$ και δ η διαγώνιος του ορθογωνίου.

3.3 [0,3] Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο ενός επίπεδου ορθογώνιου βρόχου για I = 707 A, a =10,0 cm, b= 20,0 cm, αν το καλώδιο του βρόχου περιέχει N=20 συρμάτινες σπείρες.

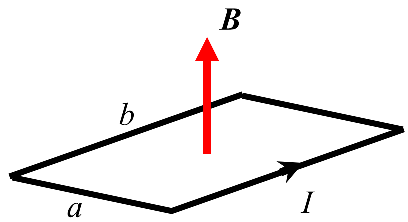
Δίνεται: μ_0=4π×10^{-7} N/A^2



Σχήμα 3.1



Σχήμα 3.2



Σχήμα 3.3

ΛΥΣΗ

3.1 [1] Biot-Savart : $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{s}\times\hat{r}}{r^2}$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο XOP ισχύουν :

Α) οι γωνίες φ και θ είναι συμπληρωματικές : $\sin\varphi = \cos\theta$

Β) $r = \frac{d}{\cos\theta}$

Γ) $x = -d\tan\theta$ επειδή όταν θ>0 τότε x<0. Οπότε $\frac{dx}{d\theta} = -d\frac{d(\tan\theta)}{d\theta} = -\frac{d}{\cos^2\theta} \Rightarrow dx = -\frac{d}{\cos^2\theta}d\theta$

Το στοιχείο μήκους είναι $d\vec{s} = dx\,\hat{x}$

$$\text{Άρα } \frac{d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{dx\cdot 1\cdot \sin\varphi\;\hat{z}}{d^2/\cos^2\theta} = \frac{-(d/\cos^2\theta)d\theta\cdot\cos\theta}{d^2/\cos^2\theta}\hat{z} = -\frac{\cos\theta}{d}d\theta\,\hat{z}$$

$$\text{Έτσι έχουμε : } \vec{B} = \int_{\alpha\rho\chi\acute{\eta}}^{\tau\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma} d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\alpha\rho\chi\acute{\eta}}^{\tau\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma}\frac{d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2} = -\hat{z}\frac{\mu_0 I}{4\pi d}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta d\theta \Rightarrow \vec{B} = -\hat{z}\frac{\mu_0 I}{4\pi d}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right)$$

$$\vec{B}_{\varepsilon\upsilon\theta.\tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}\left(\sin\theta_1 - \sin\theta_2\right)\hat{z}$$

3.2 [1,2] Το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του ορθογωνίου θα είναι το άθροισμα των τεσσάρων πεδίων που δημιουργεί κάθε πλευρά.
Οι πλευρές απέχουν διαφορετικές αποστάσεις από το κέντρο. Οι πλευρές μήκους a απέχουν απόσταση $d_a = b/2$ ενώ οι πλευρές μήκους b απέχουν απόσταση $d_b = a/2$

$$B_{\square} = B_a + B_b + B_a + B_b = 2B_a + 2B_b = 2\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{\sin\theta_a - \sin(-\theta_a)}{d_a} + \frac{\sin\theta_b - \sin(-\theta_b)}{d_b}\right] =$$

$$= 2\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{2\sin\theta_a}{b/2} + \frac{2\sin\theta_b}{a/2}\right] = \frac{2\mu_0 I}{\pi}\left[\frac{\sin\theta_a}{b} + \frac{\sin\theta_b}{a}\right]$$

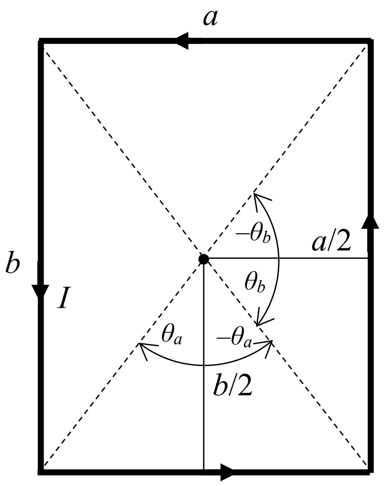
Οι διαγώνιες είναι ίσες, διχοτομούνται και έχουν μήκος δ όπου :

$$\delta = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(1\cdot\ 10^{-1})^2 + (2\cdot\ 10^{-1})^2} = 10^{-1}\sqrt{5} = 0,2236\,\mathrm{m},$$

ενώ τα ημίτονα των γωνιών είναι : $\sin\theta_a = \dfrac{a}{\delta}$, $\sin\theta_b = \dfrac{b}{\delta}$

Έτσι έχουμε : $B_{\square} = \dfrac{2\mu_0 I}{\pi}\left[\dfrac{a/\delta}{b} + \dfrac{b/\delta}{a}\right] = \dfrac{2\mu_0 I}{\pi\delta}\left[\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right] = \dfrac{2\mu_0 I}{\pi\delta}\left[\dfrac{a^2 + b^2}{ba}\right] = \dfrac{2\mu_0 I}{\pi\cancel{\delta}}\left[\dfrac{\delta^{\cancel{2}}}{ba}\right] \Rightarrow$

$$B_{\square} = \frac{\mu_0 I}{\pi ba/2\delta} = \mu_0\frac{I}{G} \quad \text{με} \quad G = \frac{\pi ab}{2\delta} = \pi\frac{0,1\cdot\ 0,2}{2\cdot\ 10^{-1}\sqrt{5}} = \frac{0,1\pi}{\sqrt{5}} = 0,1405\,\mathrm{m}$$



3.3 [0,3] Εφόσον υπάρχουν N ορθογώνια (σπείρες) τότε το συνολικό πεδίο στο κέντρο θα είναι :

$$B = NB_{\square} = N\mu_0 I\frac{2\delta}{\pi ba} = (20)(4\cancel{\pi}\times 10^{-7})(707)\frac{2\cdot\ 10^{-1}\sqrt{5}}{\cancel{\pi}(0,100)(0,200)} =$$

$$= 8\cdot\ 707\times 10^{-5}\cdot\ \sqrt{5} = 12.647,2\times 10^{-5} = 0,126\,\mathrm{T}$$

Αν όλα τα μεγέθη εκφραστούν σε μονάδες SI, τότε και το αποτέλεσμα θα βγει σε SI δηλαδή τέσλα (T). Το αποτέλεσμα δίνεται με ακρίβεια 3 σημαντικών ψηφίων, τόσων δηλαδή όσων είναι και των δεδομένων (707 A, 0,100 m, 0,200 m).

ΘΕΜΑ 4

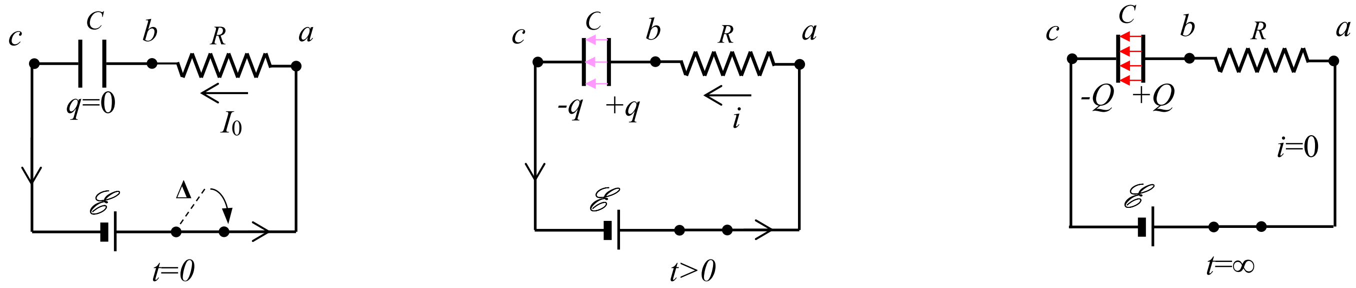
Πυκνωτής χωρητικότητας $C = 1\ \mu\mathrm{F}$, ο οποίος είναι αρχικά αφόρτιστος συνδέεται με πηγή με ΗΕΔ $\mathscr{E}$ =12 V, μέσω ωμικού αντιστάτη με $R = 10\ \mathrm{M\Omega}$ σε σειρά. Τη χρονική στιγμή t=0 κλείνουμε τον διακόπτη Δ για να φορτίσουμε τον πυκνωτή.
4.1 [0,1] Δείξτε ότι η σταθερά $\tau = RC$ έχει μονάδες χρόνου (s) και να την υπολογίσετε.
4.2 [0,2] Ποιο είναι το τελικό ηλεκτρικό φορτίο Q που θα αποκτήσει ο πυκνωτής?
4.3 [0,2] Ποιο είναι το αρχικό ηλεκτρικό ρεύμα I_0 που θα διατρέξει το κύκλωμα?

4.4 [0,7] Να δείξετε ότι η χρονική εξάρτηση του φορτίου $q(t)$ του πυκνωτή είναι : $q(t)=Q\left(1-e^{-t/\tau}\right)$

(Υπόδειξη : διαφορική εξίσωση από κανόνα τάσεων του Kirchhoff)

4.5 [0,6] Ποια χρονική στιγμή $t_{1/2}$, το ρεύμα i στο κύκλωμα έχει τιμή ίση με το μισό της αρχικής $I_0/2$? Τι τιμή έχει το φορτίο του πυκνωτή την ίδια στιγμή?

4.5 [0,7] Να κάνετε τη γραφική παράσταση q vs. t όπου να φαίνονται και οι εξής δύο ευθείες: η οριζόντια ευθεία $q=Q$ και η ευθεία της εφαπτομένης στην καμπύλη $q(t)$ στην αρχή των αξόνων, δηλαδή για $t=0$. Να βρείτε τη χρονική στιγμή στην οποία τέμνονται αυτές οι ευθείες. (Υπόδειξη: γνωρίζετε την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας)



Δίνονται οι πτώσεις τάσης : $\upsilon_{ab}=iR$, $\quad \upsilon_{bc}=\dfrac{q}{C}$, $\quad \upsilon_{ac}=\mathscr{E}$

ΛΥΣΗ

4.1 Από τους τύπους που δίνονται βρίσκεται τις μονάδες αντίστασης Ω (ωμ) και χωρητικότητας F (φάραντ):

$$\upsilon_{ab}=iR\Rightarrow \mathrm{V}=\mathrm{A}\cdot\Omega\Rightarrow\Omega=\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}},\qquad \upsilon_{bc}=\frac{q}{C}\Rightarrow \mathrm{V}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{F}}\Rightarrow \mathrm{F}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}$$

και γνωρίζεται ότι το αμπέρ είναι κουλόμ ανά δευτερόλεπτο $\mathrm{A}=\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$

Οπότε: $\quad [\tau]=[R][C]=\Omega\cdot\mathrm{F}=\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\cdot\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}=\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}=\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{C/s}}=\mathrm{s}\quad [0,1]$

$$\tau=RC=10\times10^{6}\cdot1\times10^{-6}=10\ \mathrm{s}$$

Από τον 2º κανόνα Kirchhoff (κανόνα τάσεων) έχουμε για κάθε χρονική στιγμή t:

$$\upsilon_{ab}(t)+\upsilon_{bc}(t)+\upsilon_{ca}(t)=0\Rightarrow\quad i(t)R+\frac{q(t)}{C}-\mathscr{E}=0\Rightarrow$$

$$\boxed{i(t)=\frac{\mathscr{E}}{R}-\frac{q(t)}{RC}\qquad(1)}$$

4.2 Από την (1), επειδή για $t=\infty$, $i=0$, $q=Q$: $\quad 0=\dfrac{\mathscr{E}}{R}-\dfrac{Q}{RC}\Rightarrow Q=C\mathscr{E}=1\times10^{-6}\cdot12=12\ \mu\mathrm{C}$ [0,2]

4.3 Από την (1), επειδή για $t=0$, $i=I_0$, $q=0$: $\quad I_0=\dfrac{\mathscr{E}}{R}-\dfrac{0}{RC}\Rightarrow I_0=\dfrac{\mathscr{E}}{R}=\dfrac{12}{10\times10^{6}}=1,2\ \mu\mathrm{A}$ [0,2]

4.4 Η (1) γίνεται:

$$i=\frac{\mathscr{E}}{R}-\frac{q}{RC}\Rightarrow\frac{dq}{dt}=-\frac{q-C\mathscr{E}}{RC}\Rightarrow\frac{dq}{dt}=-\frac{q-Q}{\tau}\Rightarrow\frac{dq'}{dt}=-\frac{q'}{\tau}$$

Όπου : $\quad q'=q-Q,\quad dq'=dq$

για $q=0\Rightarrow\ q'=-Q,$

Χωρίζουμε τις μεταβλητές και ολοκληρώνουμε :

$$\frac{dq'}{dt}=-\frac{q'}{\tau}\Rightarrow\frac{dq'}{q'}=-\frac{dt}{\tau}\Rightarrow\quad\int_{-Q}^{q-Q}\frac{dq'}{q'}=-\int_0^t\frac{dt}{\tau}\Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{q-Q}{-Q}\right)=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow\frac{q-Q}{-Q}=e^{-t/\tau}\Rightarrow\ q-Q=-Qe^{-t/\tau}\Rightarrow$$

$$\boxed{q(t)=Q(1-e^{-t/\tau})\ (2)}$$

4.5 Είτε από την (1) είτε με παραγώγιση από τη (2), βρίσκουμε τη χρονική εξάρτηση του ρεύματος: $i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$

(1): $i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q(t)}{RC} = \frac{C\mathcal{E} - q(t)}{RC} = \frac{C\mathcal{E} - Q(1-e^{-t/\tau})}{RC} = \frac{\cancel{C\mathcal{E}} - \cancel{Q} + Qe^{-t/\tau}}{RC} = \frac{\cancel{C}\mathcal{E}\, e^{-t/\tau}}{R\cancel{C}} = I_0 e^{-t/\tau}$

(2): $q(t) = Q(1-e^{-t/\tau}) \Rightarrow \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Q - Qe^{-t/\tau}\right) \Rightarrow i(t) = -Q\left(\frac{-1}{\tau}e^{-t/\tau}\right) = \frac{\cancel{C}\mathcal{E}\, e^{-t/\tau}}{R\cancel{C}} = I_0 e^{-t/\tau}$

Η χρονική στιγμή $t_{1/2}$ κατά την οποία το ρεύμα γίνεται μισό από το αρχικό βρίσκεται από :

$$i(t_{1/2}) = \frac{I_0}{2} \Rightarrow I_0 e^{-t_{1/2}/\tau} = \frac{I_0}{2} \Rightarrow e^{-t_{1/2}/\tau} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{t_{1/2}/\tau} = 2 \Rightarrow \frac{t_{1/2}}{\tau} = \ln 2 \Rightarrow t_{1/2} = \tau \ln 2 = (10)\ln 2 = 6{,}93 \text{ s}$$

Είτε από την (1) είτε από την (2) βρίσκουμε ότι τότε και το φορτίο γίνεται το μισό του τελικού : $q(t_{1/2}) = \frac{Q}{2}$

(1) $i(t_{1/2}) = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q(t_{1/2})}{RC} \Rightarrow \frac{I_0}{2} = I_0 - \frac{q(t_{1/2})}{RC} \Rightarrow \frac{q(t_{1/2})}{RC} = \frac{I_0}{2} \Rightarrow q(t_{1/2}) = \cancel{R}C\frac{\mathcal{E}/\cancel{R}}{2} = \frac{C\mathcal{E}}{2} = \frac{Q}{2}$

(2) $q(t_{1/2}) = Q(1-e^{-t_{1/2}/\tau}) = Q\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{Q}{2}$

4.6 Η γραφική παράσταση q vs. t, είναι η καμπύλη της εκθετικής ανάπτυξης από 0 ως Q (κόκκινη).
Όταν το t τείνει στο άπειρο προσεγγίζει την ευθεία q=Q (πράσινη).
Χαράσσουμε την καμπύλη και με το μάτι φέρουμε την εφαπτομένη της στη αρχή (μπλε).
Οι ευθείες (μπλε και πράσινη) τέμνονται κάποια χρονική στιγμή που ονομάζουμε t_1,

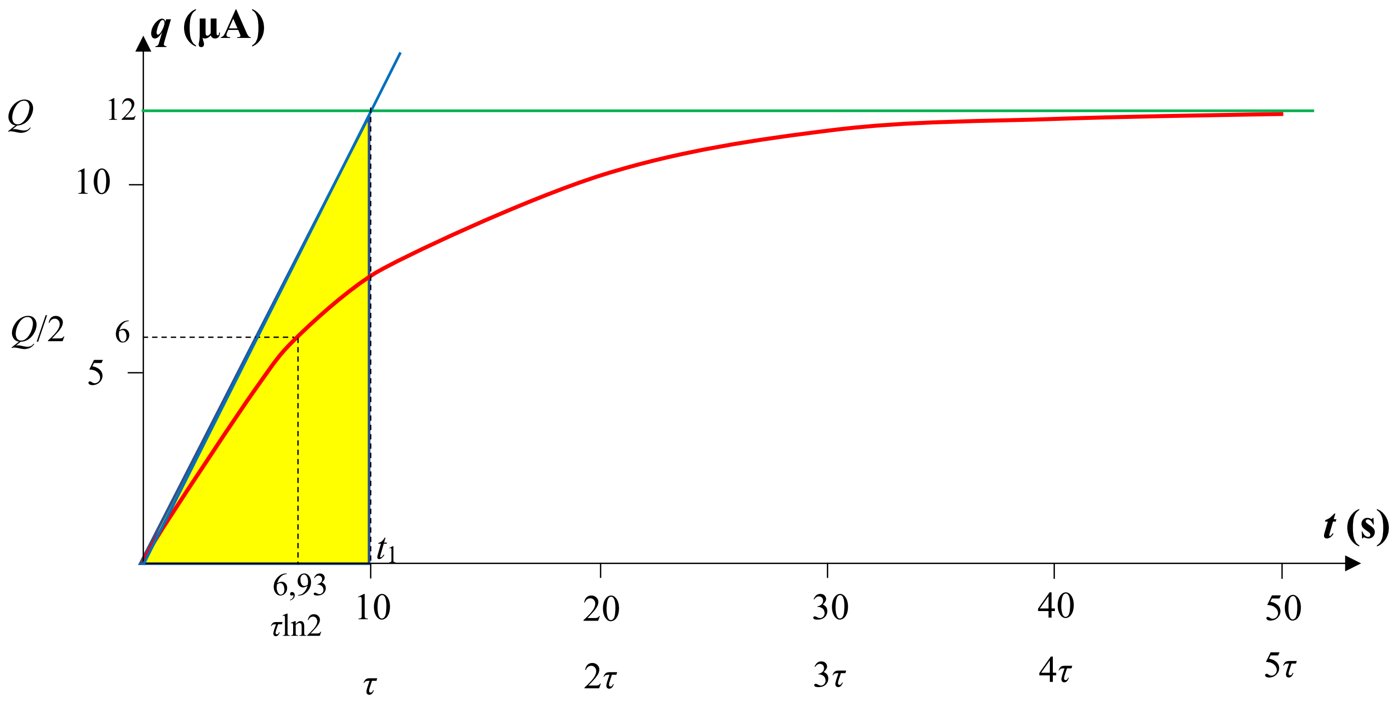
Η κλίση σε διάγραμμα q-t είναι το ρεύμα: $\kappa\lambda\acute{\iota}\sigma\eta = \frac{dq}{dt} = i$.

Η κλίση στην αρχή είναι το αρχικό ρεύμα $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$.

Η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας (μπλε) στην αρχή, είναι από το τρίγωνο :

$$\kappa\lambda\acute{\iota}\sigma\eta = \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Q-0}{t_1 - 0} \Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{C\mathcal{E}}{t_1} \Rightarrow t_1 = RC = \tau$$

Άρα οι ευθείες (μπλε και πράσινη) τέμνονται τη χρονική στιγμή $t = \tau$, δηλ. στη σταθερά χρόνου.



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ