

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2021-22

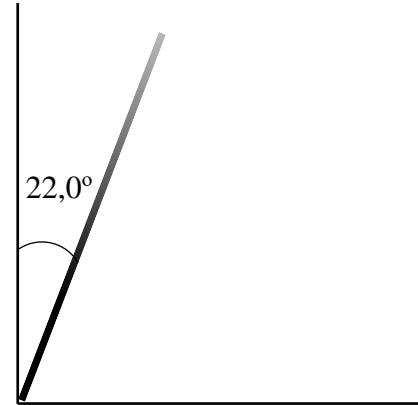
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ

Πέμπτη, 10 Φεβρουαρίου 2022 9-11 π.μ. αίθ. 1, 3, 5, 7, 109
Εισηγητής: Κώστας Φιλίππιδης (kphilippides@uowm.gr) Γ

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα και αξίας 2,5 μονάδων

ΘΕΜΑ 1.

Η λεπτή ευθύγραμμη μη ομογενής ράβδος του σχήματος, αφήνεται ελεύθερη από αρχική γωνία $\theta_0 = 22^\circ$. Ο κατακόρυφος τοίχος και το οριζόντιο δάπεδο είναι λεία. Να βρείτε τη γωνία θ στην οποία η ράβδος θα χάσει την επαφή με τον τοίχο.



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Όταν η ράβδος χάσει την επαφή με τον τοίχο η οριζόντια δύναμη F_y θα μηδενιστεί και μαζί της θα μηδενιστεί και η οριζόντια επιτάχυνση \ddot{x} του CM. Θέτοντας $\ddot{x} = 0$ βρίσκουμε τη γωνία που χάνεται η επαφή.

$$x = d \sin \theta \Rightarrow \dot{x} = d \cos \theta \cdot \dot{\theta} \Rightarrow \ddot{x} = d \cos \theta \cdot \ddot{\theta} - d \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2$$

Χρειαζόμαστε εκφράσεις για την γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}$ και την γωνιακή επιτάχυνση $\ddot{\theta}$. Η ράβδος περιστρέφεται γύρω από το O. Τη γωνιακή επιτάχυνση την βρίσκουμε από την αρχή της στροφορμής και την γωνιακή επιτάχυνση από την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

$$\tau_{(O)} = I_{(O)} \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{mgd \sin \theta}{I_{(O)}}, \quad mgy_0 = mgy + \frac{1}{2} I_{(O)} \dot{\theta}^2 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2mgd(\cos \theta_0 - \cos \theta)}{I_{(O)}}$$

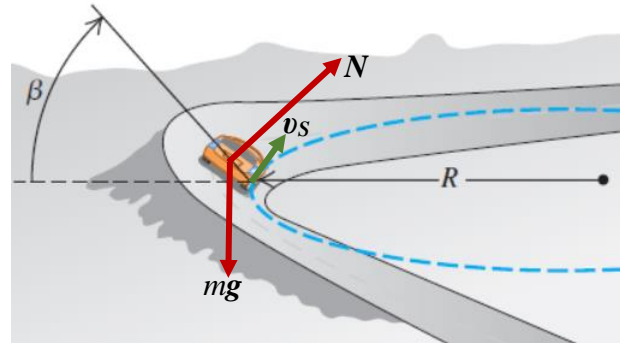
$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow d \cos \theta \cdot \ddot{\theta} - d \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 = 0 \Rightarrow d \cos \theta \frac{mgd \sin \theta}{I_{(O)}} - d \sin \theta \frac{2mgd(\cos \theta_0 - \cos \theta)}{I_{(O)}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{mgd^2}{I_{(O)}} \sin \theta [\cos \theta - 2 \cos \theta_0 + 2 \cos \theta] = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3} \cos \theta_0 \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{2}{3} \cos 22^\circ \right) \Rightarrow$$

$$\theta = \cos^{-1}(0,61812257) = 51,8208362^\circ \approx 51,8^\circ$$

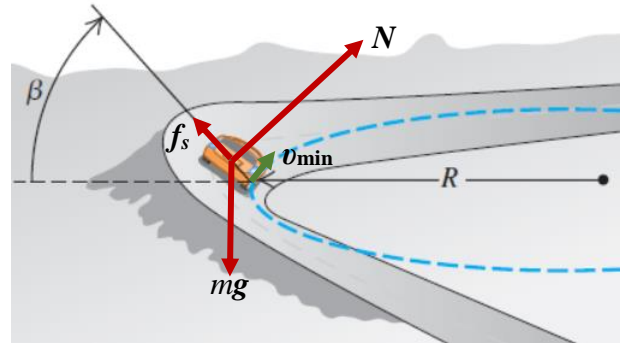
ΘΕΜΑ 2.

Ποια είναι η ταχύτητα ασφαλείας v_s της κεκλιμένης στροφής; Δηλαδή η ταχύτητα που πρέπει να έχει το όχημα ώστε να καταφέρει τη στροφή χωρίς την ανάγκη στατικής τριβής f_s . [0,5]



Ποια είναι η ελάχιστη ταχύτητα v_{min} με την οποία μπορεί το όχημα να πάρει τη στροφή; [1,0]

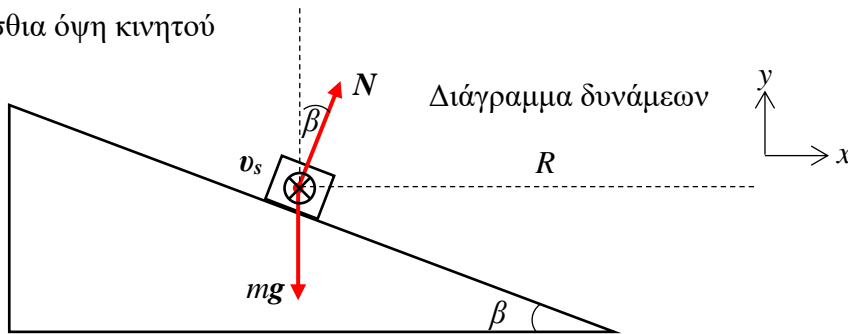
Όταν ταχύτητα v του οχήματος βρίσκεται στο διάστημα $v_{min} \leq v \leq v_s$ από ποια έκφραση δίνεται η στατική τριβή f_s ; [1,0]



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Ταχύτητα ασφαλείας

Οπίσθια όψη κινητού



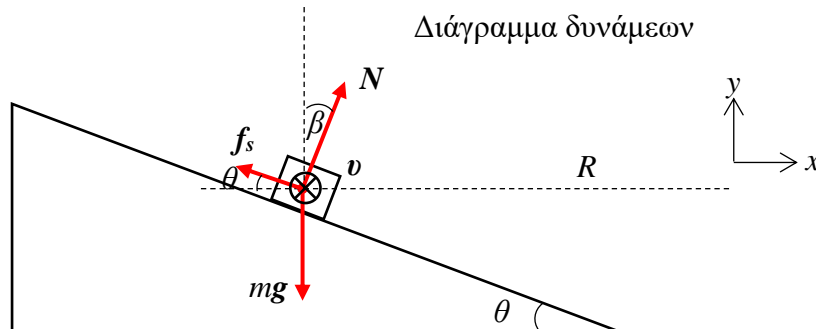
$$\sum F_x = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow N \sin \beta = m \frac{v_s^2}{R} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N \cos \beta - mg = 0 \Rightarrow N \cos \beta = mg \quad (2)$$

Διαιρώντας την (1) με τη (2)

$$\frac{N \sin \beta}{N \cos \beta} = \frac{m v_s^2 / R}{mg} \Rightarrow v_s^2 = gR \tan \beta \Rightarrow v_s = \sqrt{gR \tan \beta}$$

Ελάχιστη ταχύτητα



$$\sum F_x = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow N \sin \beta - f_s \cos \beta = m \frac{v^2}{R} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N \cos \beta + f_s \sin \beta - mg = 0 \quad (2)$$

Από την (2) βλέπουμε ότι η f_s και η N μεταβάλλονται αντίστροφα. Αν αυξηθεί η f_s θα πρέπει να μειωθεί η N , αφού τα m , g , θ είναι σταθερά. Όταν μειώνεται η ταχύτητα του οχήματος, για να ισχύει η (1) πρέπει να μειωθεί η N και να αυξηθεί η f_s . Η ταχύτητα θα φτάσει στην ελάχιστη τιμή της όταν η στατική τριβή θα φτάσει στη μέγιστη επιτρεπτή τιμή της $f_{s,\max} = \mu_s N$ σε σχέση με την N .

$$N \sin \beta - f_{s,\max} \cos \beta = m \frac{v_{\min}^2}{R} \Rightarrow N(\sin \beta - \mu_s \cos \beta) = m \frac{v_{\min}^2}{R} \quad (1)$$

$$N \cos \beta + f_{s,\max} \sin \beta - mg = 0 \Rightarrow N(\cos \beta + \mu_s \sin \beta) = mg \quad (2)$$

$$\text{Διαιρώντας: } \frac{m \frac{v_{\min}^2}{R}}{mg} = \frac{\sin \beta - \mu_s \cos \beta}{\cos \beta + \mu_s \sin \beta} \Rightarrow v_{\min}^2 = gR \frac{\sin \beta - \mu_s \cos \beta}{\cos \beta + \mu_s \sin \beta} \Rightarrow$$

$$v_{\min} = \sqrt{gR \frac{\tan \beta - \mu}{1 + \mu \tan \beta}}$$

Μέτρο της στατικής τριβής όταν $f_s < \mu_s N$ και $v_{\min} < v < v_s$

$$\sum F_x = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow N \sin \beta - f_s \cos \beta = m \frac{v^2}{R} \quad (1) \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow N \cos \beta + f_s \sin \beta = mg \quad (2)$$

$$D = \begin{vmatrix} \sin \beta & -\cos \beta \\ \cos \beta & \sin \beta \end{vmatrix} = \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

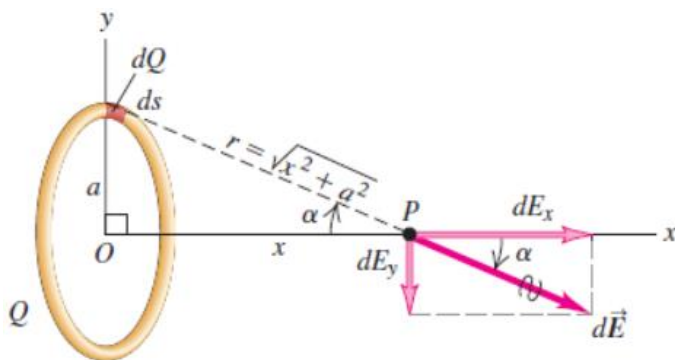
$$D_f = \begin{vmatrix} \sin \beta & mv^2/R \\ \cos \beta & mg \end{vmatrix} = mg \sin \beta - m \frac{v^2}{R} \cos \beta = \frac{m \cos \beta}{R} \left(gR \frac{\sin \beta}{\cos \beta} - v^2 \right) = \frac{m \cos \beta}{R} (gR \tan \beta - v^2)$$

$$f_s = \frac{D_f}{D} = \frac{m \cos \beta}{R} (v_s^2 - v^2)$$

ΘΕΜΑ 3.

Να βρείτε την έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί, λεπτό ομοιόμορφα θετικά φορτισμένο δακτυλίδι πάνω στον άξονά του. [1,0]

Να δείξετε ότι για πολύ μικρά x ($x \ll a$) η δύναμη που ασκεί ο δακτύλιος σε ένα αρνητικό σημειακό φορτίο $-q$ είναι δύναμη επαναφοράς. [0,5]



Να γράψετε στο SI την χρονική εξίσωση της ταχύτητας ενός αρνητικού σημειακού φορτίου $-q$ και μάζας m , το οποίο τη χρονική στιγμή μηδέν αφήνεται ελεύθερο στη θέση $+2,0$ mm του άξονα του δακτυλιδιού. [1,0]

$$1/4\pi\epsilon_0 = 9,0 \times 10^9 \text{ NC}^2/\text{m}^2, a = 4,0 \text{ cm}, Q = 64 \mu\text{C}, q = 8,0 \mu\text{C}, m = 45 \text{ mg}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Βρίσκουμε το δυναμικό στον άξονα του δακτυλιδιού χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας, δηλαδή χωρίζοντας το δακτυλίδι σε σημειακά στοιχειώδη φορτία dq και αθροίζοντας τις συνεισφορές τους. Κάθε στοιχείο dq της κυκλικής κατανομής απέχει την ίδια απόσταση $\sqrt{x^2 + a^2}$ από το σημείο x . Παίρνουμε ως αρχή των αξόνων το κέντρο του δακτυλιδιού και τον άξονά του να είναι ο άξονας x .

$$V(x, 0, 0) = \int_0^Q dV = \int_0^Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \int_0^Q dq \Rightarrow V(x, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (50)$$

Από το δυναμικό βρίσκουμε το πεδίο:

$$\vec{E}(x,0,0) = -\vec{\nabla}V(x,0,0) = -\frac{\partial V(x,0,0)}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial V(x,0,0)}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial V(x,0,0)}{\partial z}\hat{z} =$$

$$= -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\hat{x} - 0 - 0 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)(2x)(x^2+a^2)^{-3/2}\hat{x} \Rightarrow$$

$$\vec{E}(x,0,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{(x^2+a^2)^{3/2}}\hat{x}$$

$$\vec{E}(x,0,0) \xrightarrow{x \ll a} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{a^3}\hat{x}$$

Δύναμη σε αρνητικό φορτίο σε απόσταση $x \ll a$

$$\vec{F} = -q\vec{E} = -\left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a^3}\right)x\hat{x} \quad \text{δύναμη επαναφοράς με} \quad k = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

Το φορτίο θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{a^3 m}} = \sqrt{9 \times 10^9 \frac{8 \times 10^{-6} \cdot 64 \times 10^{-6}}{4^3 \times 10^{-2 \cdot 3} \cdot 45 \times 10^{-6}}} = \sqrt{90 \times 10^8 \frac{8 \cdot 64}{64 \cdot 45}} = \sqrt{16 \times 10^8}$$

$$\omega = 4 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

$$A = 2,0 \text{ mm}, \quad \varphi_0 = \pi/2, \quad x = A \sin(\omega t + \varphi_0) = 2,0 \times 10^{-3} \sin(4 \times 10^4 t + \pi/2)$$

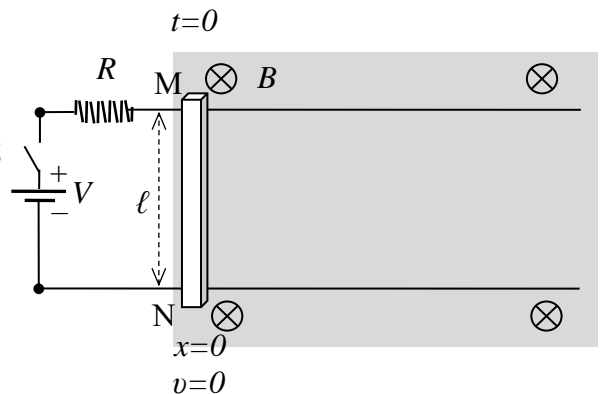
$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) = 2 \times 10^{-3} \cdot 4 \times 10^4 \cos(4 \times 10^4 t + \pi/2)$$

$$v = 80 \cos\left(4 \times 10^4 t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{SI})$$

ΘΕΜΑ 4.

Η αγώγιμη ράβδος MN μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές στις οριζόντιες αγώγιμες ράγες που βρίσκονται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο όπως στο σχήμα. Το όλο κύκλωμα της διάταξης θεωρούμε ότι παρουσιάζει ωμική αντίσταση R . Τη χρονική στιγμή μηδέν εφαρμόζουμε στους ακροδέκτες της διάταξης ηλεκτρική τάση, κλείνοντας τον διακόπτη, ώστε να επιταχύνουμε τη ράβδο προς τα δεξιά μέσω της δύναμης Laplace.

$$V=100 \text{ V}, R=2,00 \Omega, B=1,00 \text{ T}, m=500 \text{ g}, \ell=0,500 \text{ m}$$



Υπολογίστε το αρχικό ρεύμα I_0 που θα διατρέξει το κύκλωμα όταν κλείσουμε το διακόπτη, την αρχική δύναμη Laplace F_{L0} που θα ασκηθεί στη ράβδο και την αρχική της επιτάχυνση a_0 . [0,3]

Σχεδιάστε την πολικότητα της επαγωγικής τάσης όταν η ράβδος αρχίσει να κινείται. Πόση είναι η επαγωγική τάση και το ρεύμα στο κύκλωμα όταν η ράβδος φτάσει στην ορική ταχύτητα και κινείται πλέον ομαλά; Υπολογίστε την ορική ταχύτητα v_{op} που θα αποκτήσει η ράβδος. [0,4]

Αν $\tau = mR/B^2\ell^2$ δείξτε ότι $v_{op} = a_0\tau$. Δείξτε ότι η σταθερά τ έχει μονάδες χρόνου και υπολογίστε την τιμή της. [0,4]

Βρείτε τις χρονικές εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης της ράβδου. [1,2]

Τι επιτάχυνση έχει και με τι ταχύτητα κινείται η ράβδος μετά από τρεις σταθερές χρόνου $t = 3\tau$ [0,2]

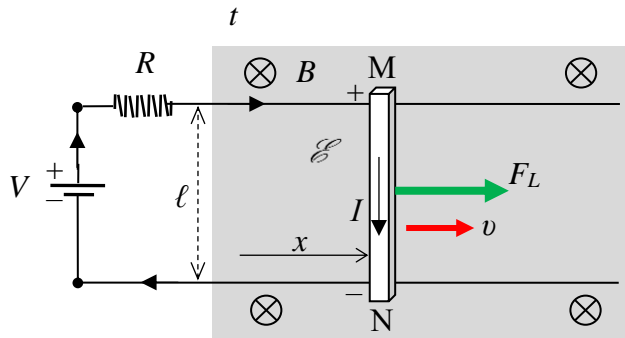
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Αποτελέσματα σε 3 σημαντικά ψηφία

$$\mathcal{E} = Bv\ell$$

$$I = \frac{V - \mathcal{E}}{R}$$

$$F_L = BI\ell$$



Αρχικές τιμές

$$V = I_0 R \Rightarrow I_0 = \frac{V}{R} = \frac{100}{2} = 50,0 \text{ A}$$

$$F_{L0} = BI_0 \ell = 1 \cdot 50 \cdot 0,5 = 25,0 \text{ N}$$

$$a_0 = \frac{\sum F}{m} = \frac{F_{L0}}{m} = \frac{25}{0,5} = 50 \text{ m/s}^2$$

$$a_0 = \frac{F_{L0}}{m} = \frac{BI_0 \ell}{m} = \frac{BV\ell}{mR}$$

Τελικές τιμές

Με το κλείσιμο του διακόπτη θα διατρέξει τη ράβδο ηλεκτρικό ρεύμα $I_0 = \frac{V}{R}$ και όντας μέσα σε μαγνητικό πεδίο

θα της ασκηθεί δύναμη Laplace που θα την επιταχύνει. Αποκτώντας η ράβδος ταχύτητα, θα αναπτυχθεί στα άκρα της επαγωγική τάση $\mathcal{E} = Bv\ell$, με πολικότητα αντίθετη της πηγής (M+ N-). Για το λόγο αυτό θα αντιτίθεται

στην κίνησή της, αφού έτσι μειώνεται το ρεύμα στο κύκλωμα $V = IR + \mathcal{E}$ (Kirchhoff) $\Rightarrow I = \frac{V - \mathcal{E}}{R}$ και άρα η

δύναμη Laplace $F_L = BI\ell$ που επιταχύνει τη ράβδο (Lenz). Η ταχύτητα θα σταματήσει να αυξάνεται όταν η δύναμη Laplace μηδενιστεί και στη συνέχεια η ράβδος θα κινείται με σταθερή ταχύτητα (ορική).

$$\text{Άρα } F_{Lf} = 0 \Rightarrow BI_f \ell = 0 \Rightarrow I_f = 0 \Rightarrow \frac{V - \mathcal{E}_f}{R} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_f = V \Rightarrow Bv_{op} \ell = V \Rightarrow v_{op} = \frac{V}{Bl}$$

$$\text{Οπότε: } F_{Lf} = 0, \quad I_f = 0, \quad \mathcal{E}_f = V = 100 \text{ V}, \quad v_{op} = \frac{V}{Bl} = \frac{100}{1 \cdot 0,5} = 200 \text{ m/s}$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: Το κύκλωμα αποτελείται από ένα και μοναδικό βρόχο και άρα θα διαρρέεται από ένα και μοναδικό ρεύμα παντού. Από τις δύο πηγές που υπάρχουν στο κύκλωμα η μία (V) δημιουργεί αρχικά και υποστηρίζει αυτό το ρεύμα ενώ η δεύτερη (\mathcal{E}), αφού εμφανιστεί, του αντιτίθεται και το εξασθενεί. Οι δύο πηγές παρέχουν ηλεκτρικά φορτία που κατανομούνται στις επιφάνειες των αγωγών και δημιουργούν ένα και μοναδικό ομογενές ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} μέσα στους αγωγούς το οποίο προκαλεί μια και μοναδική πυκνότητα ρεύματος $\vec{J} = \sigma \vec{E}$. Το ηλεκτρικό πεδίο κινεί τους ελεύθερους φορείς ηλεκτρικού φορτίου προς την κατεύθυνσή του $\vec{J} \equiv nq\vec{v}_{ολισθ}$ αν είναι θετικοί ή προς την αντίθετη $\vec{J} \equiv n(-q)(-\vec{v}_{ολισθ})$ αν είναι αρνητικοί. Αλλά η φορά αυτού του φυσικού μεγέθους που ονομάζουμε ηλεκτρικό ρεύμα $I = J/A$ και μπαίνει σε όλους τους τύπους, είναι μία και μοναδική και ταυτίζεται με τη φορά της πυκνότητας ρεύματος \vec{J} που ταυτίζεται με τη φορά του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} . Δεν μπορούν να υπάρξουν δύο ρεύματα με αντίθετες φορές καθώς δεν μπορεί σε ένα σημείο του αγωγού κάποιοι θετικοί φορείς να κινούνται προς μια κατεύθυνση και κάποιοι άλλοι, επίσης θετικοί, να κινούνται προς την αντίθετη, αφού τους κινεί το ίδιο ηλεκτρικό πεδίο σε εκείνο το σημείο! Η έννοια ενός δεύτερου ξεχωριστού επαγωγικού ρεύματος $I_{επ}$ είναι λάθος από φυσική άποψη. Υπάρχει ένα και μοναδικό ρεύμα I και άρα μια και μοναδική δύναμη Laplace, $BI\ell$.

$$a_0 \tau = \frac{BV\ell}{mR} \cdot \frac{mR}{B^2 \ell^2} = \frac{V}{B\ell} = v_{op}$$

$$[\tau] = \left[\frac{mR}{B^2 \ell^2} \right] = \frac{\text{kg} \cdot \Omega}{\text{T}^2 \text{m}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{V}}{\text{A}}}{\frac{\text{N}^2}{\text{A}^2 \text{m}^2} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{V} \cdot \text{A}}{\text{N}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{J}}{\text{C}} \cdot \frac{\text{C}}{\text{s}}}{\text{N}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{N} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{N} \cdot \text{s}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{s}} = \text{s}$$

$$\tau = \frac{mR}{B^2 \ell^2} = \frac{0,5 \cdot 2}{1^2 \cdot 0,5^2} = 4,00 \text{ s}$$

Χρονικές εξισώσεις

$$a = \frac{\sum F}{m} = \frac{F_L}{m} = \frac{BI\ell}{m} = \frac{B(V - \mathcal{E})\ell}{mR} = \frac{B(V - Bv\ell)\ell}{mR} = \frac{VB\ell}{mR} - \frac{B^2 \ell^2}{mR} v = \frac{B^2 \ell^2}{mR} \left(\frac{VB\ell}{mR} \frac{mR}{B^2 \ell^2} - v \right) = \frac{B^2 \ell^2}{mR} \left(\frac{V}{B\ell} - v \right) \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_{op} - v}{\tau} \Rightarrow \frac{dv}{v_{op} - v} = \frac{dt}{\tau} \Rightarrow \int_0^v \frac{dv}{v_{op} - v} = \frac{1}{\tau} \int_0^t dt$$

Αλλάζουμε μεταβλητή στο πρώτο ολοκλήρωμα : $u = v_{op} - v \Rightarrow du = -dv$

$$-\int_{v_{op}}^{v_{op}-v} \frac{du}{u} = \frac{1}{\tau} \int_0^t dt \Rightarrow \ln u \Big|_{v_{op}}^{v_{op}-v} = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \ln(v_{op} - v) - \ln v_{op} = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \ln \left(\frac{v_{op} - v}{v_{op}} \right) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \frac{v_{op} - v}{v_{op}} = e^{-t/\tau} \Rightarrow$$

$$v(t) = v_{op} (1 - e^{-t/\tau})$$

Παραγωγίζοντας βρίσκουμε την επιτάχυνση

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = v_{op} \frac{d}{dt} (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{v_{op}}{\tau} e^{-t/\tau} \Rightarrow$$

$$a(t) = a_0 e^{-t/\tau}$$

και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε τη θέση

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = v_{op} \int_0^t (1 - e^{-t/\tau}) dt = v_{op} t - v_{op} \int_0^t e^{-t/\tau} dt = v_{op} t + v_{op} \tau \int_0^{-t/\tau} e^u du = v_{op} t + v_{op} \tau \left[e^u \right]_0^{-t/\tau} =$$

$$= v_{op} t + v_{op} \tau (e^{-t/\tau} - 1) \Rightarrow$$

$$x(t) = v_{op} (t - \tau) + v_{op} \tau e^{-t/\tau}$$

με την αλλαγή μεταβλητής: $u = -t/\tau \Rightarrow du = -dt/\tau$.

Για $t = 3\tau$

$$v(3\tau) = v_{op} (1 - e^{-3\tau/\tau}) = 200(1 - e^{-3}) = 190 \text{ m/s}$$

$$a(3\tau) = a_0 e^{-3\tau/\tau} = 50e^{-3} = 2,49 \text{ m/s}^2$$

$$x(3\tau) = v_{op} (3\tau - \tau) + v_{op} \tau e^{-3\tau/\tau} = v_{op} \tau (2 + e^{-3}) = 200 \cdot 4(2 + e^{-3}) = 1.639,82966 \approx 1,64 \text{ km}$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ