Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Σε αναζήτηση μιας νέας αρχής

Η μεταβολή της ορμής ενός υλικού σημείου είναι το αποτέλεσμα της ώθησης, δηλαδή της δράσης της συνισταμένης δύναμης επί ένα χρονικό διάστημα

$$\textit{μεταβολή της ορμής} = (\textit{συνισταμένη δύναμη})\cdot\ (\textit{χρονικό διάστημα}) \ \Rightarrow$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}_{net}\Delta t$$

(όπου $\Delta\vec{p}$ και Δt λαμβάνονται επαρκώς μικρά ώστε η δύναμη $\vec{F}_{net}$ να μπορεί να θεωρηθεί σταθερή)

Ποιο είναι το φυσικό μέγεθος που θα μεταβάλλονταν αν θεωρούσαμε τη δράση της συνισταμένης δύναμης όχι για κάποιο χρονικό διάστημα αλλά για κάποια μετατόπιση (απόσταση) ;

$$\textit{μεταβολή ποιού φυσικού μεγέθους}? = (\textit{συνισταμένη δύναμη})\cdot\ (\textit{μετατόπιση}) \ \Rightarrow$$

$$\Delta ? = \vec{F}_{net}\cdot\ \Delta\vec{r}$$

(πάλι το $\Delta\vec{r}$ λαμβάνεται επαρκώς μικρό ώστε η δύναμη $\vec{F}_{net}$ να παραμένει σταθερή).

Έργο

Το μέγεθος

$$\vec{F}\cdot\ \Delta\vec{r} = W$$

ονομάζεται **έργο** της σταθερής δύναμης $\vec{F}$ που δρα στο σώμα ενώ το σώμα μετατοπίζεται κατά $\Delta\vec{r}$. Αν η δύναμη δεν είναι σταθερή ορίζουμε το στοιχειώδες έργο dW για μια μετατόπιση $d\vec{r}$ τόσο μικρή ώστε η δύναμη να θεωρείται σταθερή:

$$dW = \vec{F}\cdot\ d\vec{r}\ .$$

Το συνολικό έργο για μια πεπερασμένη μετατόπιση $\Delta r = \vec{r}_f - \vec{r}_i$ του σώματος από μια αρχική (initial) θέση $\vec{r}_i$ σε μία τελική (final) θέση $\vec{r}_f$ θα είναι το άθροισμα όλων των ενδιάμεσων στοιχειωδών έργων, δηλαδή το ολοκλήρωμα :

$$W(\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f) = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot\ d\vec{r}$$

Οι μονάδες του έργου ονομάζονται τζάουλ ή τζούλ:

$$[W] = [F][\Delta r] = \mathrm{N}\cdot\ \mathrm{m} = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\ \mathrm{m} = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{J}$$

Ενέργεια

Το αντίστοιχο φυσικό μέγεθος που αναζητάμε ονομάζεται **ενέργεια:**

$$\textit{μεταβολή της ενέργειας} = (\textit{συνισταμένη δύναμη})\cdot\ (\textit{μετατόπιση}) \ \Rightarrow$$

$$\Delta E = \vec{F}_{net}\cdot\ \Delta\vec{r} = W$$

Η ορμή ενός υλικού σημείου δίνεται από τον τύπο $\vec{p} = \gamma m\vec{\upsilon}$. Ποιος είναι ο τύπος για την ενέργεια ενός σωματιδίου (υλικού σημείου)?

Ενέργεια ενός σωματιδίου

Έχει μάζα και πιθανώς κίνηση. Μόνο δύο πιθανά είδη ενέργειας: Ενέργεια ηρεμίας και κινητική ενέργεια.

(Einstein 1905) Σωματιδιακή ενέργεια : $E = \gamma m c^2$

Όπου: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$ ο γνωστός παράγοντας Lorentz

Μονάδες: $[E]=[m][c]^2 = \mathrm{kg}\dfrac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{J}$

Ενέργεια ηρεμίας όταν είναι ακίνητο $\vec{\upsilon}=0 \Rightarrow \gamma = 1$: $E_0 = mc^2$

Κινητική ενέργεια :

$$K = \gamma m c^2 - mc^2$$

Άρα:

$$E = K + mc^2$$

Προσεγγιστική μορφή κινητικής ενέργειας για μικρές ταχύτητες $|\vec{\upsilon}| << c \Rightarrow x = \dfrac{|\vec{\upsilon}|}{c} << 1$

$$\gamma = (1-x^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + O(x^4) \approx 1 + \frac{1}{2}x^2$$

$$K = \gamma mc^2 - mc^2 \approx \left(1+\frac{1}{2}x^2\right)mc^2 - mc^2 = \cancel{mc^2} + \frac{1}{2}x^2 mc^2 - \cancel{mc^2} = \frac{1}{2}x^2 mc^2 = \frac{1}{2}\frac{|\vec{\upsilon}|^2}{c^2}mc^2 \Rightarrow$$

$$K \simeq \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{p^2}{2m} \qquad \text{για } \upsilon << c$$

Επειδή $\vec{p} = \gamma m \vec{\upsilon} \Rightarrow p = \gamma m \upsilon$ βλέπουμε ότι η ταχύτητα του σωματιδίου σε σχέση με την ενέργεια και την ορμή που έχει, θα δίνεται από τη σχέση:

$$\left.\begin{aligned} \gamma m\vec{\upsilon} &= \vec{p} \\ \gamma m c^2 &= E \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\vec{\upsilon}}{c^2} = \frac{\vec{p}}{E} \Rightarrow$$

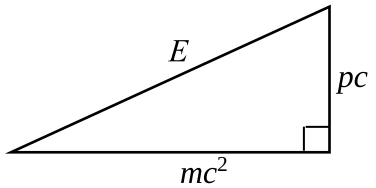
$$\vec{\upsilon} = \left(\frac{\vec{p}c}{E}\right)c$$

Επίσης έχουμε μια «πυθαγόρεια» σχέση μεταξύ ενέργειας-ορμής-μάζας:

$$E^2 = (\gamma mc^2)^2 = \gamma^2 m^2 c^4 = \frac{m^2c^4}{1-\upsilon^2/c^2} = \frac{m^2c^6}{c^2-\upsilon^2} = \frac{m^2c^4(c^2-\upsilon^2+\upsilon^2)}{c^2-\upsilon^2} = (mc^2)^2 + \frac{m^2c^4\upsilon^2}{c^2-\upsilon^2} =$$

$$= (mc^2)^2 + \frac{m^2c^2\upsilon^2}{1-\upsilon^2/c^2} = (mc^2)^2 + \gamma^2 m^2 c^2 \upsilon^2 \Rightarrow$$

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$$



$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$$

Αυτή γράφεται και : $E^2-(pc)^2=(mc^2)^2$

Η ενέργεια και η ορμή εξαρτώνται από το σύστημα αναφοράς. Σε ένα διαφορετικό σύστημα αναφοράς θα έχουν εν γένει διαφορετικές τιμές E', p'. Όμως παρατηρούμε ότι ο συνδυασμός $E^2-(pc)^2$ παραμένει μια αναλλοίωτη ποσότητα ανεξάρτητη από το σύστημα αναφοράς αφού η μάζα είναι μια σταθερά:

$$E^2-(pc)^2=E'^2-(p'c)^2=(mc^2)^2=\sigma\tau\alpha\theta$$

Υπάρχει η δυνατότητα ύπαρξης σωματιδίων με μηδενική μάζα, άμαζων. Μη σχετικιστικά ένα τέτοιο σωματίδιο θα είχε μηδενική ενέργεια και μηδενική ορμή, δηλαδή θα ήταν τίποτα. Όμως τώρα μπορεί να υπάρχει, αρκεί να έχει ενέργεια και ορμή που να σχετίζονται με την εξίσωση:

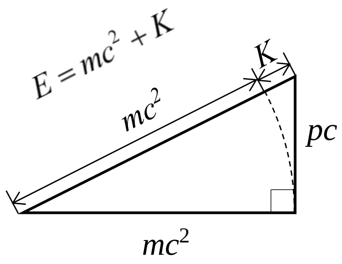
$$\boxed{E^2-(pc)^2=0\Rightarrow\quad E=pc\qquad \text{για } m=0}$$

Ένα άμαζο σωματίδιο όχι μόνο δεν μπορεί ποτέ να είναι ακίνητο αλλά θα κινείται με ταχύτητα φωτός.

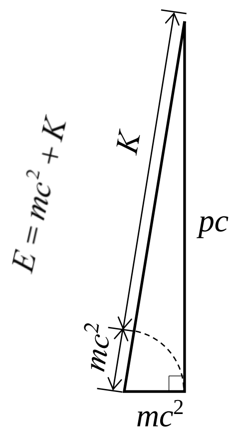
$$\boxed{\upsilon=\left(\frac{pc}{E}\right)c=c\qquad \text{για } m=0}$$

Τέτοια σωματίδια είναι τα φωτόνια.

Χαράσσοντας έναν κύκλο ακτίνας mc^2 από τη βάση, χωρίζουμε την υποτείνουσα σε ενέργεια ηρεμίας και κινητική ενέργεια.



Μη σχετικιστικό (καθημερινό) σώμα.
Η ενέργεια ηρεμίας mc^2
είναι πολύ μεγαλύτερη από την
κινητική ενέργεια K.



Σχετικιστικό σώμα.
Η κινητική ενέργεια K
είναι πολύ μεγαλύτερη από την
ενέργεια ηρεμίας mc^2.

Επίσης, από την παραπάνω πυθαγόρεια σχέση, παίρνουμε ένα νέο τύπο για την κινητική ενέργεια:

$E^2-(mc^2)^2=(pc)^2\Rightarrow(E-mc^2)(E+mc^2)=p^2c^2\Rightarrow$

$K(\gamma mc^2+mc^2)=p^2c^2\Rightarrow K(\gamma+1)m=p^2\Rightarrow$

$$\boxed{K=\frac{p^2}{(\gamma+1)m}}$$

Αυτή για μικρές ταχύτητες $\vec{\upsilon}\simeq 0\Rightarrow\gamma\simeq 1$ καταλήγει πάλι στο γνωστό μας τύπο

$K=\dfrac{p^2}{(1+1)m}=\dfrac{p^2}{2m}=\dfrac{1}{2}m\upsilon^2$

Απόδειξη της Αρχής της Ενέργειας:

Για μικρές ταχύτητες (μη σχετικιστικά)

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_{net}\cdot\ d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt}(m\vec{\upsilon})\cdot\ \vec{\upsilon}dt = m\int_{\vec{\upsilon}_i}^{\vec{\upsilon}_f} d\vec{\upsilon}\cdot\ \vec{\upsilon} = \frac{m}{2}\int_{\vec{\upsilon}_i}^{\vec{\upsilon}_f} d(\upsilon^2) = \frac{1}{2}m\upsilon_f^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_i^2 \Rightarrow$$

$$W = K_f - K_i = \left(mc^2 + K_f\right) - \left(mc^2 + K_i\right) = E_f - E_i$$

Γενική απόδειξη για κάθε ταχύτητα (σχετικιστικά)

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_{net}\cdot\ d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt}(\gamma m\vec{\upsilon})\cdot\ \vec{\upsilon}dt = \int_{\vec{\upsilon}_i}^{\vec{\upsilon}_f} \vec{\upsilon}\cdot\ d(\gamma m\vec{\upsilon})$$

Ολοκλήρωση κατά μέρη $\int udv = uv - \int vdu$

$$W = \gamma m\vec{\upsilon}\cdot\ \vec{\upsilon}\Big|_{\vec{\upsilon}_i}^{\vec{\upsilon}_f} - \int_{\vec{\upsilon}_i}^{\vec{\upsilon}_f} \gamma m\vec{\upsilon}\cdot\ d\vec{\upsilon}$$

Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\upsilon}\cdot\ d\vec{\upsilon}$ είναι ίσο με $\upsilon d\upsilon$ (αυτή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε διάνυσμα), επειδή η επιτάχυνση γράφεται ως επιτρόχια και κεντρομόλος : $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{a} = \frac{d\upsilon}{dt}\hat{t} + \frac{\upsilon^2}{\rho}\hat{n} \Rightarrow d\vec{\upsilon} = \vec{a}dt = d\upsilon\ \hat{t} + \frac{\upsilon^2}{\rho}dt\ \hat{n}$

ενώ η ταχύτητα είναι εφαπτόμενη στην τροχιά : $\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{t}$

και άρα έχουμε : $\vec{\upsilon}\cdot\ d\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{t}\cdot\left(d\upsilon\hat{t} + \frac{\upsilon^2}{\rho}dt\hat{n}\right) = \upsilon d\upsilon$

Οπότε

$$W = \gamma m\upsilon^2\Big|_{\upsilon_i}^{\upsilon_f} - m\int_{\upsilon_i}^{\upsilon_f} \gamma\upsilon d\upsilon = \gamma m\upsilon^2\Big|_{\upsilon_i}^{\upsilon_f} - m\int_{\upsilon_i}^{\upsilon_f} \frac{\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}d\upsilon$$

Το ολοκλήρωμα γίνεται εύκολα επειδή ο αριθμητής είναι ανάλογος με την παράγωγο του υπόριζου στον παρονομαστή. Θέτουμε το υπόριζο ίσο με μια νέα μεταβλητή *u*:

$$u = 1 - \frac{\upsilon^2}{c^2} \Rightarrow du = -2\frac{\upsilon}{c^2}d\upsilon \Rightarrow \upsilon d\upsilon = -\frac{c^2}{2}du$$

$$-m\int_{\upsilon_i}^{\upsilon_f} \frac{\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}d\upsilon = \frac{mc^2}{2}\int_{u_i}^{u_f} u^{-1/2}du = \frac{mc^2}{2}\frac{u^{1/2}}{1/2}\Big|_{u_i}^{u_f} = mc^2\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\Big|_{\upsilon_i}^{\upsilon_f}$$

Οπότε

$$W = \gamma m\upsilon^2\Big|_{\upsilon_i}^{\upsilon_f} + mc^2\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\Big|_{\upsilon_i}^{\upsilon_f} = m\left(\frac{\upsilon^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} + c^2\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\right)_{\upsilon_i}^{\upsilon_f} = m\left(\frac{\upsilon^2 + c^2\left(1-\upsilon^2/c^2\right)}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right)_{\upsilon_i}^{\upsilon_f} =$$

$$= m\left(\frac{\upsilon^2 + c^2 - \upsilon^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right)_{\upsilon_i}^{\upsilon_f} = \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right)_{\upsilon_i}^{\upsilon_f} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon_f^2/c^2}} - \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon_i^2/c^2}} = E_f - E_i = \Delta E$$

Δεύτερη απόδειξη

Πρέπει να δείξουμε ότι $\quad dE = \vec{F}_{net}\cdot\ d\vec{r}$

όπου $\quad E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} = \left(m^2c^4 + c^2\vec{p}\cdot\ \vec{p}\right)^{1/2}$

και $\quad \vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$$dE = \vec{F}_{net}\cdot\, d\vec{r} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \vec{F}_{net}\cdot\,\frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\,\vec{\upsilon}$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο της ενέργειας στο αριστερό σκέλος. Πράγματι, βλέπουμε ότι είναι ίση με το δεξί σκέλος:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left(m^2c^4 + c^2\vec{p}\cdot\,\vec{p}\right)^{1/2}\right] = \frac{1}{\cancel{2}}\left(m^2c^4 + c^2\vec{p}\cdot\,\vec{p}\right)^{-1/2}\cancel{2}\,\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\,\vec{p}c^2 = \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\,\frac{\vec{p}c^2}{E} = \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\,\vec{\upsilon}$$

επειδή η ταχύτητα είναι $\dfrac{\vec{p}c^2}{E} = \vec{\upsilon}$

Άρα:

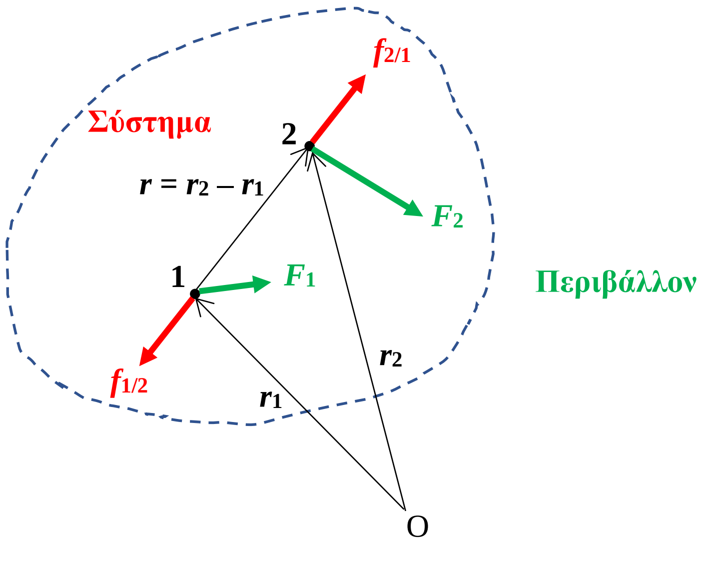
Αρχή της Ενέργειας για ένα σωματίδιο : $\Delta E = W$
$E = \gamma mc^2 = mc^2 + K$
$W = \vec{F}_{net}\cdot\,\Delta\vec{r}$

Σύστημα Δύο Υλικών σημείων – Δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης

Με κεφαλαίο F σημειώνουμε τις εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στα σωματίδια ενώ με μικρό f τις δυνάμεις που ασκεί το ένα στο άλλο (εσωτερικές δυνάμεις).
Για τις εσωτερικές δυνάμεις ισχύει η αρχή της αμοιβαιότητας (3^{ος} νόμος του Νεύτωνα, δράση-αντίδραση)

$$\vec{f}_{2/1} = -\vec{f}_{1/2}$$

Η δύναμη $\vec{f}_{2/1}$ που ασκεί το 1^{ο} σωματίδιο στο 2^{ο} είναι αντίθετη από αυτή που δέχεται αυτό από το 2^{ο} σωματίδιο $\vec{f}_{1/2}$. Στο σχήμα έχουμε θεωρήσει τις δυνάμεις και κεντρικές (επειδή οι θεμελιώδεις βαρυτικές και ηλεκτροστατικές δυνάμεις είναι κεντρικές), παρόλο που αυτό δεν είναι απαραίτητο,



Η αρχή της ορμής για δύο σωματίδια γράφεται

$$\Delta\vec{p}_{tot} = \vec{F}_{net}^{ext}\Delta t$$

Όπου $\vec{p}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ είναι η ολική ορμή του συστήματος και η συνισταμένη δύναμη $\vec{F}_{net}$ προέρχεται μόνο από **εξωτερικές** (external) δυνάμεις που ασκούνται στα σωματίδια του συστήματος από το περιβάλλον:

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_{1net} + \vec{F}_{2net} = \vec{f}_{1/2} + \vec{F}_1 + \vec{f}_{2/1} + \vec{F}_2 = \cancel{\vec{f}_{1/2}} + \vec{F}_1 - \cancel{\vec{f}_{1/2}} + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \equiv \vec{F}_{net}^{ext}$$

<u>Θέλουμε να βρούμε μια ανάλογη σχέση για την ενέργεια.</u>

Θεωρούμε τις μεταβολές των σωματιδιακών ενεργειών του κάθε σωματιδίου και τις προσθέτουμε

$$\Delta E_1 = (\vec{f}_{1/2} + \vec{F}_1) \cdot \Delta\vec{r}_1 = W_{1,\text{int}} + W_{1,ext}$$

$$\Delta E_2 = (\vec{f}_{2/1} + \vec{F}_2) \cdot \Delta\vec{r}_2 = W_{2,\text{int}} + W_{2,ext}$$

$$\Delta(E_1 + E_2) = W_{\text{int}} + W_{1,\text{ext}} + W_{2,\text{ext}}$$

όπου

$$W_{\text{int}} = W_{1,\text{int}} + W_{2,\text{int}} = \vec{f}_{1/2} \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{f}_{2/1} \cdot \Delta\vec{r}_2$$

$$W_{1,\text{ext}} + W_{2,\text{ext}} = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r}_2$$

Μεταφέρουμε το έργο των εσωτερικών δυνάμεων στο αριστερό σκέλος της εξίσωσης ώστε, αριστερά να έχουμε μόνο εσωτερικά μεγέθη και δεξιά το συνολικό έργο των εξωτερικών δυνάμεων:

$$\Delta(E_1 + E_2) + (-W_{\text{int}}) = W_{1,\text{ext}} + W_{2,\text{ext}}$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι το έργο των εσωτερικών δυνάμεων, λόγω της αμοιβαιότητας, εξαρτάται μόνο από τη μεταβολή της σχετικής θέσης των δύο σωμάτων $\vec{r} \equiv \vec{r}_{2/1} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ και όχι από τις ατομικές τους μετατοπίσεις $\Delta\vec{r}_2,\ \Delta\vec{r}_1$ ξεχωριστά

$$W_{\text{int}} = W_{1,\text{int}} + W_{2,\text{int}} = \vec{f}_{1/2} \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{f}_{2/1} \cdot \Delta\vec{r}_2 = -\vec{f}_{2/1} \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{f}_{2/1} \cdot \Delta\vec{r}_2 = \vec{f}_{2/1} \cdot (\Delta\vec{r}_2 - \Delta\vec{r}_1) \Rightarrow$$

$$W_{\text{int}} = \vec{f}_{2/1} \cdot \Delta\vec{r}_{2/1}$$

Επίσης είναι συμμετρικό στην αντιμετάθεση $1 \leftrightarrow 2$

$$W_{\text{int}} = \vec{f}_{2/1} \cdot \Delta\vec{r}_{2/1} = (-\vec{f}_{1/2}) \cdot (-\Delta\vec{r}_{1/2}) = \vec{f}_{1/2} \cdot \Delta\vec{r}_{1/2}$$

Οπότε το γράφουμε ως

$$W_{\text{int}} \equiv W_{12} = \vec{f} \cdot \Delta\vec{r}$$

όπου : $\vec{f} \equiv \vec{f}_{2/1}$ η δύναμη στο 2 από το 1

$\vec{r} \equiv \vec{r}_{2/1} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ η σχετική θέση του 2 ως προς το 1

$\Delta\vec{r} \equiv \Delta\vec{r}_{2/1} = \Delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \Delta\vec{r}_2 - \Delta\vec{r}_1$

Το όρο $-W_{\text{int}} \equiv -W_{12}$ τον θεωρούμε ως την μεταβολή ενός μεγέθους U_{12} κατά τη μεταβολή του συστήματος από την αρχική στην τελική του κατάσταση. Τον όρο αυτό τον ονομάζουμε **δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης** μεταξύ του ζεύγους σωματιδίων 1 και 2:

$$-W_{\text{int}} \equiv \Delta U_{12}$$

Αυτό μπορεί να γίνει για όλες τις θεμελιώδεις δυνάμεις. Όταν το έργο μιας δύναμης μπορεί να γραφτεί έτσι, η δύναμη ονομάζεται συντηρητική.

Το έργο των εξωτερικών δυνάμεων δεν μπορεί να γραφτεί με παρόμοιο τρόπο. Το έργο της κάθε δύναμης προκύπτει από το γινόμενο της κάθε δύναμης επί την αντίστοιχη μετατόπιση του σωματιδίου στο οποίο δρα.

Έτσι η Αρχή της Ενέργειας για ένα σύστημα δύο αλληλεπιδρώντων υλικών σημείων γράφεται :

$$\Delta(E_1 + E_2 + U_{12}) = W_{1,\text{ext}} + W_{2,\text{ext}} \Rightarrow$$

$$\Delta E = W_{1,\text{ext}} + W_{2,\text{ext}}$$

όπου η ενέργεια του συστήματος είναι

$$E = E_1 + E_2 + U_{12} \Rightarrow$$

$$E = m_1c^2 + K_1 + m_2c^2 + K_2 + U_{12}$$

Παρατηρούμε ότι όταν το σύστημά μας αποτελείται από δύο σωματίδια εκτός από τις σωματιδιακές ενέργειες του κάθε σωματιδίου, στην ενέργεια του συστήματος υπάρχει και τρίτος όρος που προέρχεται από την αμοιβαία αλληλεπίδραση των δύο σωματιδίων, η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης U_{12}. Η ολική ενέργεια του συστήματος δεν είναι απλά το άθροισμα των δύο σωματιδιακών ενεργειών όπως συμβαίνει με την ορμή.

Ουσιαστικά λοιπόν η Αρχή της Ενέργειας για σύστημα δύο σωματιδίων είναι ίδια με αυτήν του ενός σωματιδίου αρκεί να αναγνωρίσουμε ότι υπάρχει ενέργεια και λόγω της αμοιβαίας αλληλεπίδρασης των δύο σωματιδίων

Αρχή της Ενέργειας για δύο σωματίδια : $\Delta E = W_{1,\mathrm{ext}} + W_{2,\mathrm{ext}}$

$E = \gamma_1 m_1 c^2 + \gamma_2 m_2 c^2 + U_{12} = m_1 c^2 + K_1 + m_2 c^2 + K_2 + U_{12}$

$W = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r}_2$

Σύστημα *n* υλικών σημείων

Η γενίκευση σε σύστημα με παραπάνω από δύο σωματίδια γίνεται εύκολα. Η ολική ενέργεια του συστήματος θα είναι το άθροισμα των ενεργειών ηρεμίας και των κινητικών ενεργειών κάθε σωματιδίου (σωματιδιακές ενέργειες) συν το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών αλληλεπίδρασης όλων των δυνατών ζευγών σωματιδίων του συστήματος. Η μεταβολή της θα είναι ίση με το συνολικό έργο των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν στο κάθε σωματίδιο του συστήματος.

Αριθμός σωματιδίων συστήματος	Ορμή/Ώθηση	Ενέργεια/Εργο
2	$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$	$E = m_1 c^2 + m_2 c^2 + K_1 + K_2 + U_{12}$
3	$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$	$E = m_1 c^2 + m_2 c^2 + m_3 c^2 + K_1 + K_2 + K_3 + U_{12} + U_{13} + U_{23}$
n	$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$	$E = \sum_{i=1}^{n} m_i c^2 + \sum_{i=1}^{n} K_i + \sum_{\substack{(ij)\\ i<j}}^{n} U_{ij}$

(*ij*) με *i*<*j* : είναι όλα τα δυνατά ζευγάρια ξεχωριστών σωματιδίων
Για 2 σωματίδια έχουμε 1 ζευγάρι: (12)
Για 3 σωματίδια έχουμε 3 ζευγάρια: (12), (13), (23)
Για 4 σωματίδια έχουμε 6 ζευγάρια: (12), (13), (14), (23), (24), (34)
Για *n* σωματίδια έχουμε $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$ ζευγάρια.

Αρχή της Ενέργειας για σύστημα *n* σωματιδίων :

$$\Delta E = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$$

Ενέργεια συστήματος: $E = \sum_{i=1}^{n} m_i c^2 + \sum_{i=1}^{n} K_i + \sum_{\substack{(ij)\\ i\neq j}}^{n} U_{ij}$

Μακροσκοπικό σώμα - Θερμοδυναμική

Όταν το σύστημα μας αποτελείται από πολύ μεγάλο αριθμό σωματιδίων (10^{23}) τα οποία είναι μικροσκοπικά και μη παρατηρήσιμα τότε έχουμε ένα μακροσκοπικό σώμα. Π.χ. ένα ρευστό σώμα σε κάποιο δοχείο ή ένα στερεό σώμα της καθημερινότητας. Επειδή αποτελείται από μικροσκοπικά σωματίδια οι περισσότερες από τις μετατοπίσεις $\Delta\vec{r}_i$ θα είναι μικροσκοπικές και μη παρατηρήσιμες αλλά και οι δυνάμεις $\vec{F}_i$ που τους ασκούνται θα είναι μη παρατηρήσιμες. Έτσι το άθροισμα των μικροσκοπικών έργων είναι πρακτικώς αδύνατον να υπολογιστεί.
Συμβαίνει όμως το εξής. Το άθροισμα των μικροσκοπικών έργων μπορεί πάντα να χωριστεί σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος μπορεί να γραφτεί σαν το έργο μιας μακροσκοπικής και υπολογίσιμης δύναμης επί μια μακροσκοπική και παρατηρήσιμη μετατόπιση, δηλαδή κάποιο μακροσκοπικό έργο:

$$\sum \vec{F}_k \cdot \Delta\vec{r}_k = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = W$$

Όπου $\vec{F}_k$ είναι κάποιες από τις μικροσκοπικές δυνάμεις που δρουν για μέρος $\Delta\vec{r}_k$ της μετατόπισης κάποιων σωματιδίων *k*.
Το άθροισμα των υπόλοιπων μικροσκοπικών έργων που περισσεύουν και δεν μπορούν να εκφραστούν συνολικά ως το έργο κάποιας μακροσκοπικής δύναμης συμβολίζεται με *Q*, ονομάζεται θερμότητα και συνδέεται με την μεταβολή της θερμοκρασίας του σώματος:

$$\sum \vec{F}_m \cdot \Delta\vec{r}_m = Q$$

Αρχή της Ενέργειας για μακροσκοπικό σώμα ($1^{ος}$ νόμος της Θερμοδυναμικής) :

$$\Delta E = W + Q$$

[Η σύμβαση προσήμων είναι διαφορετική από την παλαιομοδίτικη σύμβαση της θερμοδυναμικής που μας έχει κολλήσει ιστορικά. Στη θερμοδυναμική θετικό θεωρείται το έργο που παράγεται από το σύστημα, δηλαδή βγαίνει από το σύστημα. Στην παραπάνω σχέση και το έργο και η θερμότητα θεωρούνται θετικά όταν αυξάνουν την ενέργεια του συστήματος, δηλαδή μπαίνουν στο σύστημα]

Η μάζα ενός συστήματος σωματιδίων

1 σωματίδιο *(υλικό σημείο)*

Μετράμε την ταχύτητα ενός σωματιδίου *P* ως προς ένα σημείο Ο, την αρχή του συστήματος αναφοράς μας:

$$\vec{\upsilon} \equiv \vec{\upsilon}_{\mathrm{P/O}}$$

Η ορμή και η ενέργειά του δίνονται από τους παρακάτω τύπους.

1 σωματίδιο : $\vec{p} = \gamma m \vec{\upsilon}$

$$E = \gamma m c^2 = m c^2 + K$$

όπου $\gamma = (1 - \upsilon^2/c^2)^{-1/2}$

Η αδρανειακή μάζα ενός σωματιδίου είναι ο σταθερός συντελεστής *m* στις παραπάνω εξισώσεις ορισμού της ορμής και της ενέργειάς του.
Όταν το σωματίδιο δεν κινείται, δηλαδή έχει ταχύτητα ίση με μηδέν τότε θα έχει και ορμή και κινητική ενέργεια ίσες με μηδέν

$$\vec{\upsilon} = 0 \Rightarrow \quad \vec{p} = 0, \quad K = 0$$

και η ενέργειά του, που ονομάζεται ενέργεια ηρεμίας, θα δίνεται από

$$E_0 = mc^2$$

Από αυτή τη σχέση ορίζεται η μάζα ενός σωματιδίου. Είναι η ενέργειά του όταν είναι ακίνητο δια την ταχύτητα του φωτός στο τετράγωνο

ορισμός μάζας :

$$m = \frac{E_0}{c^2} \qquad (1)$$

και είναι μια σταθερά που χαρακτηρίζει το σωματίδιο.

Το να έχει ένα σωματίδιο ταχύτητα μηδέν είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι το παρατηρούμε από ένα σημείο Ο΄ που κινείται παράλληλα με το σωματίδιο με την ίδια ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ με το σωματίδιο. Δηλαδή η ταχύτητα του σημείου Ο΄, που είναι η αρχή του νέου μας συστήματος αναφοράς, ως προς το σημείο Ο είναι και αυτή :

$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{O}'/\mathrm{O}} = \vec{\upsilon}$$

Τότε η σχετική ταχύτητα $\vec{\upsilon}'$ του P ως προς αυτό το σημείο Ο΄ θα είναι μηδέν:

$$\vec{\upsilon}' \equiv \vec{\upsilon}_{P/\mathrm{O}'} = \vec{\upsilon}_{P/\mathrm{O}} + \vec{\upsilon}_{\mathrm{O}/\mathrm{O}'} = \vec{\upsilon}_{P/\mathrm{O}} - \vec{\upsilon}_{\mathrm{O}'/\mathrm{O}} = \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon} = 0$$

Αυτό το σύστημα αναφοράς το ονομάζουμε σύστημα ηρεμίας. Σε αυτό το σύστημα το σωματίδιο έχει μηδέν ορμή $\vec{p}\,' = 0$.

Έχουμε δείξει επίσης ότι

$$E^2 - (cp)^2 = \left(mc^2\right)^2 = \sigma\tau\alpha\theta$$

που σημαίνει ότι ανεξάρτητα από το σύστημα αναφοράς στο οποίο μετράμε την ταχύτητα του σωματιδίου και από την οποία μετά υπολογίζουμε την αντίστοιχη ορμή του $\vec{p}\,'$ και την αντίστοιχη ενέργειά του E' σε αυτό το σύστημα αναφοράς, ο συνδυασμός $E'^2 - (cp')^2$ θα έχει αναλλοίωτη τιμή

$$E^2 - (cp)^2 = E'^2 - (cp')^2 = \left(mc^2\right)^2 = \sigma\tau\alpha\theta$$

Άρα η μάζα ενός σωματιδίου ορίζεται γενικώς από την αναλλοιότητα (ή και αναλλοιώτητα) αυτού του συνδυασμού

ορισμός μάζας :

$$m = \frac{\sqrt{E^2 - (cp)^2}}{c^2} = \frac{E_0}{c^2} \qquad (2)$$

Σύστημα δύο (ή και παραπάνω) σωματιδίων

Η μάζα M ενός συστήματος σωμάτων, έστω δύο σωμάτων, δεν ορίζεται από τη σχέση

$$M_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = m_1 + m_2$$

Για να είμαστε συνεπείς, πρέπει να οριστεί ανάλογα με τη μάζα ενός σωματιδίου, δηλαδή μέσω του συνδυασμού $E^2 - (cp)^2$:

$$M = \frac{\sqrt{E^2 - (cp)^2}}{c^2}$$

Όπου

ορμή συστήματος: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$

ενέργεια συστήματος: $E = E_1 + E_2 + U_{12} = m_1c^2 + m_2c^2 + K_1 + K_2 + U_{12}$

Το σύστημα αναφοράς ηρεμίας για ένα σύστημα δύο σωμάτων θα είναι, σε αναλογία με το ένα σωματίδιο, το σύστημα αναφοράς στο οποίο η συνολική ορμή θα είναι μηδέν. Αυτό το σύστημα αναφοράς λέγεται σύστημα κέντρου μάζας.

Σύστημα κέντρου μάζας (CM):

$$\vec{p}\,' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0$$

$$E_0 \equiv E' = E'_1 + E'_2 + U'_{12} = m_1c^2 + m_2c^2 + K_1' + K_2' + U_{12}$$

Η δυναμική ενέργεια είναι η ίδια στα δύο συστήματα αναφοράς επειδή εξαρτάται μόνο από τη σχετική απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων η οποία δεν αλλάζει. Η ενέργεια ηρεμίας E_0 για ένα σύστημα ονομάζεται και εσωτερική ενέργεια.

Άρα η μάζα ενός συστήματος σωμάτων θα δίνεται από τον τύπο

$$M = \frac{\sqrt{E^2 - (cp)^2}}{c^2} = \frac{\sqrt{E'^2 - (cp')^2}}{c^2} = \frac{E_0}{c^2} = \frac{m_1c^2 + m_2c^2 + K'_1 + K'_2 + U_{12}}{c^2}$$

$$M = m_1 + m_2 + \frac{\left(K'_1 + K'_2 + U_{12}\right)}{c^2}$$

Η μάζα ενός συστήματος σωμάτων δεν είναι ίση με το άθροισμα των μαζών των σωμάτων που το αποτελούν!

Το άθροισμα $\frac{K'_1 + K'_2 + U_{12}}{c^2}$ που είναι καθαρή ενέργεια, μπορεί να είναι είτε αρνητικό είτε θετικό ανάλογα με το αν η δύναμη μεταξύ των σωματιδίων είναι ελκτική ή απωστική.

Ας δούμε το πρωτόνιο από το οποίο αποτελούνται οι πυρήνες οι οποίοι μαζί με τα ηλεκτρόνια φτιάχνουν τα άτομα τα οποία συνδυάζονται σε μόρια.
Η μάζα ενός πρωτονίου είναι ίση με

$$m_p = 1,672\,6219237 \times 10^{-27} \simeq 1,673 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

Το πρωτόνιο αποτελείται από δύο άνω (u) και ένα κάτω (d) κουάρκ. Οι μάζες των κουάρκ είναι περίπου ίσες με

$$m_u \simeq 4,10 \times 10^{-30}\,\mathrm{kg}$$

$$m_d \simeq 8,55 \times 10^{-30}\,\mathrm{kg}$$

$$2m_u + m_d = 16,75 \times 0^{-30}\,\mathrm{kg}$$

Το ποσοστό της μάζας του πρωτονίου που είναι καθαρή ενέργεια αλληλεπίδρασης των κουάρκ που το αποτελούν είναι

$$\frac{\Delta m}{m_p} = \frac{m_p - (2m_u + m_d)}{m_p} = \frac{1,673 \times 10^{-27} - 16,75 \times 10^{-30}}{1,673 \times 10^{-27}} = 1 - 0,010012 = 0,989988 \simeq 99\% \quad !!!!$$

Η μάζα μας είναι κατά 99% καθαρή ενέργεια!

Ενέργεια δέσμευσης

Η διαφορά

$$B = (m_1 + m_2)c^2 - Mc^2 = -(K'_1 + K'_2 + U_{12})$$

ονομάζεται ***ενέργεια δέσμευσης*** ή ***έλλειμα μάζας.***

$$Mc^2 + B = m_1c^2 + m_2c^2$$

Αν είναι θετική, δηλαδή η μάζα του συστήματος είναι μικρότερη από τη μάζα των συστατικών του, τότε η B είναι η ενέργεια που πρέπει να δαπανήσω για να χωρίσω (διασπάσω) το σύστημα στα συστατικά του. Αυτό σημαίνει ότι η δύναμη είναι ελκτική, αφού πρέπει να δαπανήσω ενέργεια για να απομακρύνω τα σωματίδια.
Αν είναι αρνητική τότε η μάζα του συστήματος είναι μεγαλύτερη από τη μάζα των συστατικών του και η B είναι ίση με την ενέργεια που θα απελευθερωθεί όταν το σύστημα διασπαστεί στα συστατικά του. Δεν χρειάζεται να δαπανήσω ενέργεια. Τα σωματίδια απομακρύνονται από μόνα τους άρα η δύναμη είναι απωστική. Το έλλειμα μάζας B γίνεται η κινητική τους ενέργεια όταν αποχωριστούν.

Η πυρηνική δύναμη μεταξύ των νουκλεονίων (πρωτόνια και νετρόνια) είναι ελκτική (όταν είναι σχετικά κοντά και απωστική όταν είναι πάρα πολύ κοντά) . Η μάζα ενός σταθερού πυρήνα είναι πάντα μικρότερη από τη μάζα των πρωτονίων και των νετρονίων που τον αποτελούν. Ένας πυρήνας με μάζα μεγαλύτερη από τα συστατικά του δεν ζει πάρα πολύ και σύντομα διασπάται στα συστατικά του. Τέτοιοι πυρήνες ονομάζονται ραδιενεργοί. Η διαφορά μάζας μεταξύ των πυρήνων και των νουκλεονίων τους είναι πολύ μικρή όμως αρκετά μεγάλη για να μετρηθεί. Στις πυρηνικές αντιδράσεις δεν ισχύει η διατήρηση της μάζας μεταξύ αντιδρώντων και προϊόντων.

Οι πυρήνες με τα ηλεκτρόνια έλκονται με την ηλεκτροστατική δύναμη Coulomb και φτιάχνουν τα άτομα. Το άτομο (σύστημα) που θα φτιάξουν έχει μικρότερη μάζα από το άθροισμα της μάζας του πυρήνα συν τις μάζες των ηλεκτρονίων. Η διαφορά όμως είναι πάρα πολύ μικρή για να μετρηθεί ως έλλειμα μάζας. Στη χημεία ισχύει η διατήρηση της μάζας μεταξύ προϊόντων και αντιδρώντων. Όμως αν και απειροελάχιστη σαν ποσοστό σχετικά με τις μάζες των αντιδρώντων η ενέργεια αυτή παρατηρείται ως η ενέργεια που απελευθερώνεται στις εξώθερμες αντιδράσεις ή απαιτείται στις ενδόθερμες αντιδράσεις.

Διαφορά μάζας μεταξύ ζεστού - κρύου

Έστω ένα μακροσκοπικό σώμα. Ένα ακίνητο ποτήρι νερό. Το σώμα δεν έχει ορμή. Η ενέργειά του είναι:

$$E_0 = \sum_{i=1}^{N} m_i c^2 + \sum_{i=1}^{N} K_i' + \sum_{\substack{(ij)\\ i\neq j}}^{N} U_{ij} = \sum_{i=1}^{N} m_i c^2 + K' + U$$

και η μάζα του

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i + \frac{K' + U}{c^2}$$

Οι δυνάμεις μεταξύ των μορίων αν και αδύναμες είναι ελκτικές. Όταν αυξάνονται οι αποστάσεις μεταξύ των μορίων η δυναμική ενέργεια αυξάνεται.

Έστω ότι θερμαίνουμε το σώμα δίνοντάς του θερμότητα Q. Οι μάζες των μορίων δεν θα αλλάξουν. Η πρόσθετη ενέργεια θα αυξήσει τις κινητικές ενέργειες των μορίων καθώς και τις δυναμικές τους (όταν θερμαίνονται τα σώματα διαστέλλονται).

Η ενέργεια του συστήματος θα αυξηθεί κατά :

$$\Delta E = Q \Rightarrow E = E_0 + \Delta E = E_0 + Q$$

και άρα και η μάζα του θα αυξηθεί

$$M' = M + \frac{Q}{c^2}$$

Συμπέρασμα: ένα ζεστό ποτήρι νερό είναι πιο βαρύ από ένα κρύο ποτήρι νερό.

Συντηρητικές δυνάμεις και εκφράσεις για τη δυναμική ενέργεια

Μια δύναμη μεταξύ δύο σωμάτων 1 και 2 ονομάζεται συντηρητική ή διατηρητική όταν το έργο της μπορεί να γραφτεί ως το αντίθετο της μεταβολής μιας ποσότητας που ονομάσαμε δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης:

$$-W_{12} \equiv \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \Delta U_{12}$$

όπου : $\vec{F}$ η δύναμη της αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο σωμάτων
$\Delta\vec{r}$ η μεταβολή της σχετικής τους απομάκρυνσης

Δεν δείχνουμε άλλο τους δείκτες 1, 2 των σωμάτων.

$$W \equiv \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = -\Delta U$$

Το στοιχειώδες έργο ($\Delta\vec{r} \to 0$) είναι

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU$$

Αυτό σημαίνει ότι το έργο από μια αρχική θέση (σχετική θέση των δύο σωμάτων) έως μια τελική δεν εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολούθησε το σύστημα αλλά μόνο από την αρχική και την τελική θέση

$$\int_{\vec{r}_{αρχ}}^{\vec{r}_{τελ}} dW = \int_{\vec{r}_{αρχ}}^{\vec{r}_{τελ}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow$$

$$W(\vec{r}_{αρχ} \to \vec{r}_{τελ}) = -\int_{\vec{r}_{αρχ}}^{\vec{r}_{τελ}} dU \Rightarrow$$

$$W(\vec{r}_{αρχ} \to \vec{r}_{τελ}) = U(\vec{r}_{αρχ}) - U(\vec{r}_{τελ})$$

Αυτό επίσης σημαίνει ότι το έργο για μια κλειστή διαδρομή θα είναι μηδέν

$$W(\vec{r}_{αρχ} \to \vec{r}_{τελ}) = U(\vec{r}_{αρχ}) - U(\vec{r}_{τελ}) = 0$$

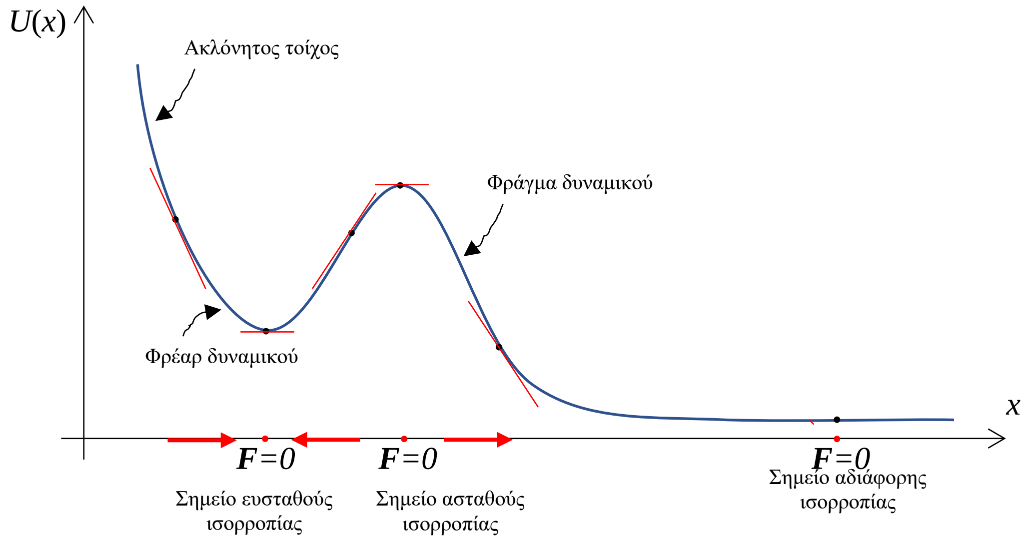
Άρα μόνο οι διαφορές της δυναμικής ενέργειας από ένα σημείο σε κάποιο άλλο μας ενδιαφέρουν, καθώς η διαφορά είναι που αντιστοιχεί σε κάποιο φυσικό μέγεθος, στο έργο.
Έτσι θέτουμε αυθαίρετα την δυναμική ενέργεια ίση με το μηδέν $U(\vec{r}_0) = 0$ σε κάποιο σημείο αναφοράς, εκεί που μας βολεύει κάθε φορά και η δυναμική ενέργεια κάθε άλλου σημείου $\vec{r}$ ορίζεται ως **το έργο της δύναμης για να πάει το σώμα (σύστημα) από την τυχαία θέση στη θέση αναφοράς :**

$$\boxed{U(\vec{r}) - \cancel{U(\vec{r}_0)} = W(\vec{r} \to \vec{r}_0) \Rightarrow \quad U(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

Αντίστροφα η δύναμη συνδέεται με τη δυναμική ενέργεια ως εξής:
για μονοδιάστατα προβλήματα, έχουμε $Fdx = -dU$, οπότε παίρνουμε

$$\boxed{F = -\frac{dU}{dx}}$$

Η δύναμη δείχνει αντίθετα από την κλίση της γραφικής παράστασης $U(x)$



Για τρισδιάστατα προβλήματα, από $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU$ παίρνουμε

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} U}$$

Το αντικείμενο $\vec{\nabla} U(x, y, z)$ που ονομάζεται κλίση ή βαθμίδα της βαθμωτής συνάρτησης $U(x, y, z)$ των τριών μεταβλητών x, y, z της θέσης, είναι ένα διάνυσμα που κατασκευάζεται από τις μερικές παραγώγους της U:

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}$$

και είναι στην κατεύθυνση στην οποία η συνάρτηση U μεταβάλλεται κατά το μέγιστο, χωρικά.
Π.χ. έστω

$$U = \frac{x^2 z}{y} \quad \text{τότε} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 2x\frac{z}{y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} x^2 z, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{x^2}{y} \quad \text{και}$$

$$\vec{\nabla} U = \left(\frac{2xz}{y} \right) \hat{x} + \left(-\frac{x^2 z}{y^2} \right) \hat{y} + \left(\frac{x^2}{y} \right) \hat{z} = \left(\frac{2xz}{y}, -\frac{x^2 z}{y^2}, \frac{x^2}{y} \right)$$

Ο τελεστής $\vec{\nabla}$ που δρα πάνω σε μια συνάρτηση παραγωγίζοντάς την

$$\vec{\nabla} = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

ονομάζεται ανάδελτα ή del.

Το παραπάνω προκύπτει ως εξής. $dU_x = \frac{\partial U}{\partial x}dx$ είναι η μεταβολή της συνάρτησης $U(x, y, z)$ όταν μόνο το x μεταβληθεί από x σε $x+dx$ (κατ' αναλογία με τη μεταβολή μιας συνάρτησης $f(x)$ μιας μεταβλητής $df = \frac{df}{dx}dx$)

Μεταβολές της U όμως, που εξαρτάται και από το y και από το z, προκύπτουν και αν μεταβληθεί και το y ή το z

Όταν το διάνυσμα θέσης μεταβληθεί από

$$\vec{r} = (x, y, z) \xrightarrow{\sigma\varepsilon} \vec{r}\,' = (x', y', z') = (x+dx, y+dy, z+dz) = (x, y, z) + (dx, dy, dz) = \vec{r} + d\vec{r}$$

η συνολική μεταβολή της U θα είναι

$$dU = dU_x + dU_y + dU_z = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = \vec{\nabla}U \cdot\ d\vec{r}$$

Μπορείτε εύκολα να αποδείξετε ότι για κάθε βαθμωτή συνάρτηση φ ισχύει η διανυσματική ταυτότητα :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0$$

Φανταστείτε το σαν το εξωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος με τον εαυτό του το οποίο είναι μηδέν.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right) = 0$$

Αφού $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}$, κλπ. , δηλαδή η σειρά της παραγώγισης δεν έχει σημασία.

Π.χ. για την $U = \frac{x^2 z}{y}$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x\frac{z}{y}\right) = -2\frac{xz}{y^2},$$

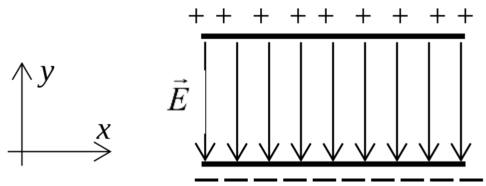
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{y^2}x^2 z\right)0 = -2\frac{xz}{y^2},$$

Η βαρυτική και η ηλεκτροστατική δύναμη είναι διατηρητικές. Για τη βαρυτική δύναμη, της οποίας την ένταση θεωρούμε σταθερή κοντά στην επιφάνεια της Γης και με κατεύθυνση προς τα κάτω ($\vec{g} = -g\hat{y}$), η δυναμική ενέργεια θα είναι :

$$U_G = \int_{\vec{r}}^{0}(-mg\hat{y}) \cdot\ \left(\hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz\right) = -mgy\Big|_y^0 \Rightarrow U_G = mgy$$

Όπου θεωρούμε την δυναμική ενέργεια ίση με μηδέν στην επιφάνεια της Γης $U_G(y=0) = 0$ όπου y είναι το ύψος του σώματος από την επιφάνεια. Βλέπουμε ότι η δυναμική ενέργεια εξαρτάται μόνο από το υψόμετρο y και όχι από τις δύο άλλες συντεταγμένες x και z

Ακριβώς παρόμοια σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο (π.χ. επίπεδος πυκνωτής), του οποίου η ένταση επίσης κατευθύνεται προς τα κάτω ($\vec{E} = -E\hat{y}$), θα ισχύει για την ηλεκτροστατική ενέργεια



$$U_E = \int_{\vec{r}}^{0} \vec{F}_E \cdot \, d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{0} (-qE\hat{y}) \cdot \, \left(\hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz\right) = -qEy\Big|_y^0 \Rightarrow U_E = qEy$$

Όπου θέτουμε την δυναμική ενέργεια ίση με μηδέν στην αρνητική πλάκα $U_E(y=0)=0$. Ένα θετικό φορτίο ($q>0$) θα «πέσει» προς τα κάτω όπου η δυναμική ενέργεια ελαττώνεται. Προς τα εκεί δηλαδή που δείχνει το ηλεκτρικό πεδίο. Αντίθετα, προς τα πάνω, θα κινηθεί ένα αρνητικό φορτίο επίσης όμως μειώνοντας τη δυναμική του ενέργεια κινούμενο προς μεγαλύτερα y και άρα κάνοντας πιο αρνητική τη δυναμική του ενέργεια.

Γενικά οι **σταθερές** δυνάμεις αποδεικνύεται ότι είναι διατηρητικές αφού το έργο τους δεν εξαρτάται από τη διαδρομή αλλά μόνο από το αρχικό και τελικό σημείο :

$$W(A \to O) = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_O} \vec{F} \cdot \, d\vec{r} = \vec{F} \cdot \, \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_O} d\vec{r} = \vec{F} \cdot \, (\vec{r}_O - \vec{r}_A)$$

Οπότε θέτοντας ως το σημείο αναφοράς όπου η δυναμική ενέργεια είναι ίση με μηδέν, την αρχή των αξόνων $U(\vec{r}_O = 0) = 0$

$$U(\vec{r}) - \cancel{U(\vec{r}_O = 0)} = W(\vec{r} \to \, 0) = \int_{\vec{r}}^{0} \vec{F} \cdot \, d\vec{r} = \vec{F} \cdot \, \int_{\vec{r}}^{0} d\vec{r} = \vec{F} \cdot \, (0 - \vec{r}) \Rightarrow U(\vec{r}) = -\vec{F} \cdot \, \vec{r}$$

Η ***μαγνητική δύναμη δεν παράγει ποτέ έργο*** καθώς είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητα

$$\vec{F}_B = q\vec{\upsilon} \times \vec{B}$$

και υπό αυτήν την έννοια μπορεί να θεωρηθεί διατηρητική.

Μια μονοδιάστατη ***δύναμη επαναφοράς*** (π.χ. ελατήριο που ακολουθεί το νόμο του Hooke)

$$F_s = -kx$$

είναι επίσης διατηρητική με δυναμική ενέργεια :

$$U_s(x) = \int_x^0 (-kx)dx \Rightarrow \quad U_s(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

όπου x είναι η επιμήκυνση (x>0) ή η συσπείρωση (x<0) του ελατηρίου από τη θέση ισορροπίας του (x=0, η άκρη του ελατηρίου στο φυσικό του μήκος).
Μια ***μη ισοτροπική δύναμη επαναφοράς*** έχει διαφορετικό k σε κάθε διεύθυνση :

$$\vec{F}_s(x,y,z) = -k_x x\,\hat{x} - k_y y\,\hat{y} - k_z z\,\hat{z}$$

$$U_s(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{0} (-k_x x\hat{x} - k_y y\hat{y} - k_z z\hat{z}) \cdot \, (dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}) = -k_x \int_x^0 xdx - k_y \int_y^0 ydy - k_z \int_z^0 zdx \Rightarrow$$

$$U_s(x,y,z) = \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 + \frac{1}{2}k_z z^2$$

Τέλος δείχνουμε ότι και ***οι κεντρικές δυνάμεις είναι διατηρητικές***:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$$

δηλαδή το έργο τους εξαρτάται μόνο από το αρχικό σημείο Α και από το τελικό σημείο Β που βρίσκονται στις θέσεις $\vec{r} = \vec{a}$ και $\vec{r} = \vec{b}$ αντίστοιχα και όχι από τη διαδρομή (καμπύλη) C που ακολουθούμε για να πάμε από το ένα στο άλλο. Μάλιστα εξαρτάται μόνο από τις αποστάσεις τους από την αρχή των αξόνων r_A και r_B και όχι από τις κατευθύνσεις τους.

Για να το δείξουμε αυτό πρέπει να γράψουμε τη στοιχειώδη μετατόπιση σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, φ, θ) αντί για καρτεσιανές (x, y, z):

$$d\vec{r} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z} = dr\ \hat{r} + r\sin\theta d\varphi\ \hat{\varphi} + rd\theta\ \hat{\theta}$$

Δείτε τι είναι οι σφαιρικές συντεταγμένες στο παράρτημα στο τέλος :

$$W(A \to B) = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot\ d\vec{r}_C$$

Ο δείκτης C δηλώνει ότι οι μετατοπίσεις γίνονται πάνω στην καμπύλη C που είναι η τροχιά του σωματιδίου.

$$W(A \to B) = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} f(r)\hat{r} \cdot \left(\hat{r}\ dr + \hat{\varphi}\ r_C \sin\theta_C d\varphi + \hat{\theta}\ r_C d\theta\right)$$

Επειδή η δύναμη είναι κεντρική μόνο το ακτινικό $\hat{r}$ κομμάτι της διαδρομής, δηλ. του $d\vec{r}_C$, θα συνεισφέρει στο ολοκλήρωμα ανεξάρτητα από τη διαδρομή δηλ.

$$\hat{r} \cdot d\vec{r}_C = \hat{r} \cdot \left(\hat{r}\ dr + \hat{\theta}\ r_C d\theta + \hat{\varphi}\ r_C \sin\theta_C d\varphi\right) = \hat{r} \cdot \hat{r} dr = dr$$

αφού $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0, \quad \hat{r} \cdot \hat{\varphi} = 0$ επειδή είναι κάθετα.

Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται ένα ορισμένο μονοδιάστατο ολοκλήρωμα στη μεταβλητή r που εξαρτάται μόνο από τα όριά του :

$$W(A \to B) = \int_{r_A}^{r_B} f(r)dr = U(r_A) - U(r_B)$$

όπου $\dfrac{dU(r)}{dr} = -f(r)$

Η ηλεκτροστατική δύναμη (Coulomb) καθώς και η βαρυτική δύναμη του Νεύτωνα είναι κεντρικές δυνάμεις,

$$\vec{F}_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\hat{r}\,, \qquad \vec{F}_G = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$$

που τείνουν στο μηδέν όταν τα σωματίδια είναι πολύ απομακρυσμένα $r \to \infty$. Έτσι, θέτουμε το σημείο αναφοράς μηδενικής δυναμικής ενέργειας στο άπειρο $U(r = \infty) = 0$. Οπότε οι δυναμικές ενέργειες είναι :

$$U_E(r) - U_E(\infty) = W_E(r \to \infty) \Rightarrow U_E(r) = W_E(r \to \infty) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r'^{(-2+1)}}{-2+1}\right)_r^\infty \Rightarrow$$

$$\boxed{U_E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r}}$$

$$U_G(r) - U_G(\infty) = W_G(r \to \infty) \Rightarrow U_G(r) = W_G(r \to \infty) = -GMm\int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} = -GMm\left(\frac{r'^{(-2+1)}}{-2+1}\right)_r^\infty \Rightarrow$$

$$\boxed{U_G(r) = -\frac{GMm}{r}}$$

Κοντά στην επιφάνεια της Γης, δηλαδή για μικρά ύψη y από την επιφάνειά της, $y << R_\Gamma = 6.371\text{km}$, θέτοντας $\delta = \dfrac{y}{R_\Gamma}$ και χρησιμοποιώντας την διωνυμική προσέγγιση $(1+\delta)^n = 1 + n\delta + O(\delta^2) \approx 1 + n\delta$, που ισχύει για $\delta << 1$ παίρνουμε

$$U_G(y) = -\frac{G\,M_\Gamma m}{R_\Gamma + y} = -\frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma(1 + y/R_\Gamma)} = -\frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma}(1+\delta)^{-1} = -\frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma}\left(1 - \delta + O(\delta^2)\right)$$

$$\simeq -\frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma}\left(1 - \frac{y}{R_\Gamma}\right) = -\frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma} + m\left(\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma^2}\right)y$$

$$U_G(y) = U_G(R_\Gamma) + mgy \qquad \text{όπου } g = \frac{G_\Gamma M_\Gamma}{R^2}$$

Καθώς ενδιαφερόμαστε πάντα για διαφορές δυναμικής ενέργειας μπορούμε να παραλείψουμε τον σταθερό όρο και να θέτουμε για τη δυναμική ενέργεια μιας μάζας m σε μικρό ύψος y πάνω από την επιφάνεια της Γης:

$$\boxed{U_G = mgy}$$

όπως βρήκαμε και πριν για σταθερό βαρυτικό πεδίο

Κεντρική δύναμη είναι και μια τρισδιάστατη ***ισοτροπική δύναμη επαναφοράς***

$$\vec{F}_s = -k\vec{r}$$

Αυτή η δύναμη αντιστοιχεί σε ένα σημειακό ελατήριο στην αρχή των αξόνων. Μόνο τραβάει προς το κέντρο.

$$U_s(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{0} (-k\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -k\int_{r}^{0} rdr \Rightarrow U_s(\vec{r}) = \frac{1}{2}kr^2$$

Και οι δυνάμεις που ασκούν τα φυσικά ελατήρια είναι συντηρητικές

<u>Αν το ελατήριο έχει φυσικό μήκος ℓ_0 και το ένα άκρο του είναι ακλόνητα στερεωμένο στην αρχή των αξόνων τότε η δύναμη που ασκεί είναι :</u>

$$\vec{F}_s = -k(r - \ell_0)\hat{r} = -k\,s\,\hat{r}$$

Το ακτινικό μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{r}$ είναι κατά μήκος του ελατηρίου από το κέντρο προς τα έξω, ενώ $s = r - \ell_0$ είναι η παραμόρφωση του ελατηρίου: συσπείρωση $s < 0$ ή επιμήκυνση $s > 0$. Το «σημείο» ισορροπίας ή φυσικού μήκους είναι τώρα όλη η σφαίρα με ακτίνα ℓ_0. Συμβολίζουμε αυτά τα σημεία με $\vec{r}_S$ και ισχύει $r_S = \ell_0$. Αν το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου βρεθεί μέσα σε αυτή τη σφαίρα $s = r - \ell_0 < 0$, το ελατήριο θα είναι συμπιεσμένο και άρα θα σπρώχνει μακριά από το κέντρο στην ακτινική κατεύθυνση $\hat{r}$. Αν το ελεύθερο άκρο του είναι έξω από τη σφαίρα φυσικού μήκους τότε θα είναι τεντωμένο $r - \ell_0 > 0$ και θα τραβάει προς το κέντρο δηλαδή προς τη διεύθυνση $-\hat{r}$.

Το έργο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και ορίζεται δυναμική ενέργεια:

$$U_s(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_S} \left[-k(r - \ell_0)\hat{r}\right] \cdot d\vec{r} = -k\int_{r}^{r_S = \ell_0} (r - \ell_0)dr = -k\int_{s}^{0} sds \Rightarrow$$

$$U_s(\vec{r}) = \frac{1}{2}ks^2 = \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2$$

Όπου στο τέλος κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $s = r - \ell_0 \Rightarrow dr = ds,\ \ s = 0$ για $r = \ell_0$

<u>Αν το στερεωμένο άκρο του ελατηρίου δεν βρίσκεται στο κέντρο των αξόνων αλλά στο $\vec{r}_0$ ενώ το ελεύθερο άκρο του βρίσκεται σε μια τυχαία θέση $\vec{r}$, τότε το διάνυσμα</u>

$$\vec{\ell} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

είναι κατά μήκος του ελατηρίου με κατεύθυνση από το στερεωμένο προς το ελεύθερο άκρο του. Το μέτρο του είναι ίσο με το μήκος του ελατηρίου

$$\ell = |\vec{r} - \vec{r}_0|$$

Αν το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι ℓ_0 τότε η παραμόρφωσή του είναι

$$s = |\vec{r} - \vec{r}_0| - \ell_0 = \ell - \ell_0$$

Η δύναμη που ασκεί το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου

θα είναι στην διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος κατά μήκος του ελατηρίου

$$\hat{\ell} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|},$$

θα είναι ανάλογη (k) στην παραμόρφωση s και

θα είναι απωστική (στη φορά του $\hat{\ell}$) για συμπίεση $s < 0$ και ελκτική (αντίθετη στη φορά του $\hat{\ell}$) για επιμήκυνση $s > 0$

Άρα η δύναμη που ασκεί το ελατήριο δίνεται από τον τύπο

$$\vec{F}_s = -k\, s\, \hat{\ell}$$

Αυτόν τον τύπο θα χρησιμοποιείτε στη VPython για δύναμη ελατηρίου.

Το «σημείο» ισορροπίας ή φυσικού μήκους είναι τώρα η σφαίρα με κέντρο $\vec{r}_0$ και ακτίνα ℓ_0. Συμβολίζουμε τα σημεία αυτής της σφαίρας με $\vec{r}_S$ και ισχύει $\left|\vec{r}_S - \vec{r}_0\right| = \ell_0$.

Για να υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια κάνουμε πρώτα την αλλαγή μεταβλητής

$\vec{\ell} = \vec{r} - \vec{r}_0 \Rightarrow d\vec{r} = d\vec{\ell}, \quad \vec{\ell} = \vec{r}_S - \vec{r}_0$ για $\vec{r} = \vec{r}_S$

και μετά την αλλαγή μεταβλητής

$s = \ell - \ell_0 \Rightarrow ds = d\ell, \quad s = 0$ για $\ell = \ell_0 = \left|\vec{r}_S - \vec{r}_0\right|$

$$U_s(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_S} \left(-k\, s\, \hat{\ell}\right) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}-\vec{r}_0}^{\vec{r}_S-\vec{r}_0} \left(-k\, s\, \hat{\ell}\right) \cdot d\vec{\ell} = -k \int_{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}^{\left|\vec{r}_S-\vec{r}_0\right|} s\, d\ell = -k \int_{\ell}^{\ell_0} s\, d\ell = -k \int_{s}^{0} s\, ds \Rightarrow$$

$$U_s(\vec{r}) = \frac{1}{2} k s^2 = \frac{1}{2} k \left(\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right| - \ell_0\right)^2$$

Οι δυνάμεις των ελατηρίων είναι συντηρητικές και η δυναμική ενέργεια είναι πάντα ίση με :

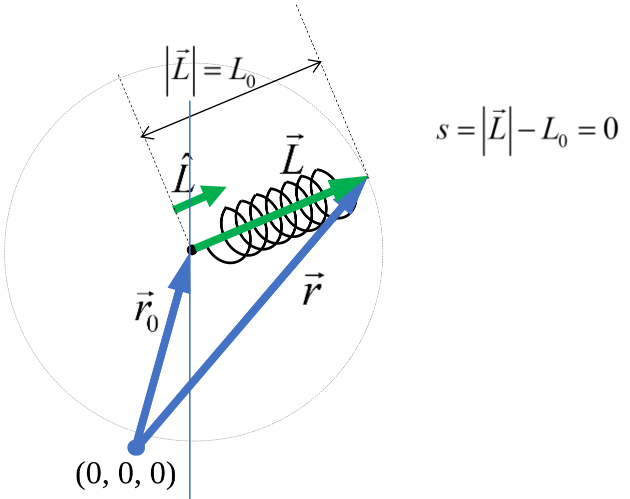
$$\frac{1}{2} \times (\text{σταθερά ελατηρίου}) \times (\text{παραμόρφωση})^2$$

Δείτε σχήμα στην επόμενη σελίδα.

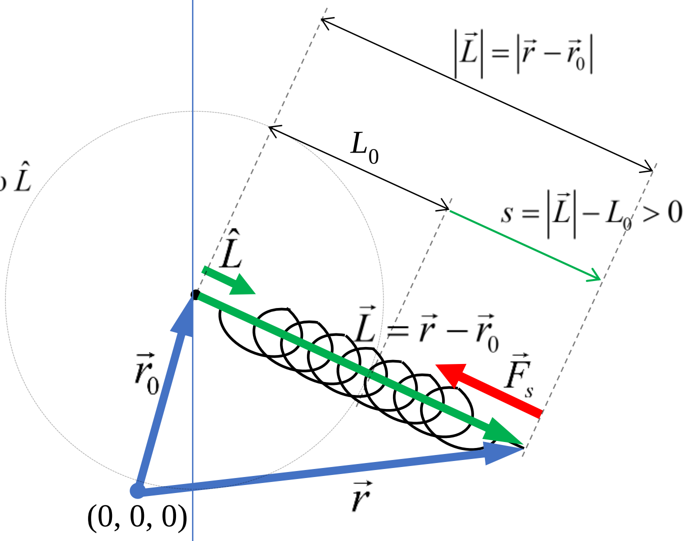
Δύναμη ελατηρίου

$$\vec{F}_s = -k\, s\, \hat{L}$$

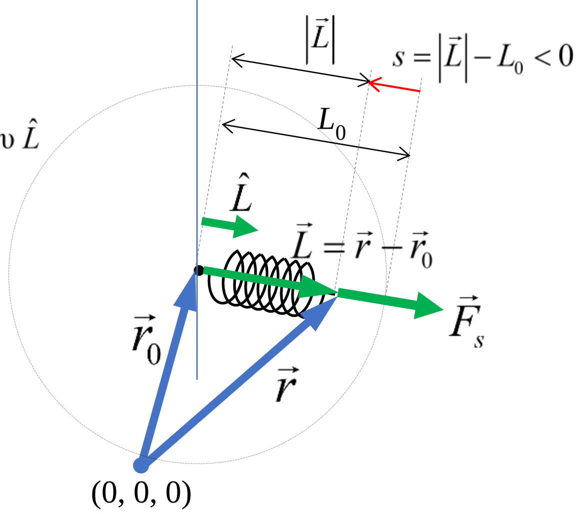
Φυσικό μήκος
Δεν ασκεί δύναμη
$s = 0 \Rightarrow \vec{F}_s = 0$



Επιμήκυνση
$s > 0 \Rightarrow \vec{F}_s = -k\, s\, \hat{L}$ αντίροπη του $\hat{L}$
Τραβάει προς το κέντρο $\vec{r}_0$



Συσπείρωση
$s < 0 \Rightarrow \vec{F}_s = -k\, s\, \hat{L}$ ομμόροπη του $\hat{L}$
Σπρώχνει από το κέντρο $\vec{r}_0$



Μη συντηρητικές δυνάμεις

Για να καταλάβετε τη διαφορά ας υπολογίσουμε το έργο μιας μη συντηρητικής δύναμης της **τριβής ολίσθησης** ή **κινητικής τριβής (**kinetic friction). Η κινητική τριβή έχει σταθερό μέτρο $\mu_k N$ και κατεύθυνση πάντα αντίθετη από την ταχύτητα του σώματος δηλαδή $-\hat{\upsilon}$:

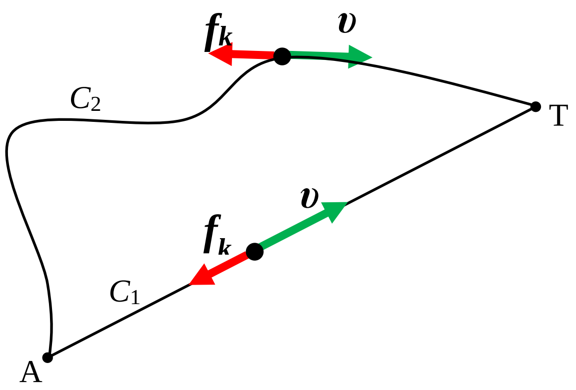
$$\overrightarrow{f_k} = -\mu_k N \hat{\upsilon}$$

Η στοιχειώδης μετατόπιση $d\vec{r}$ είναι πάνω στην τροχιά και άρα παράλληλη με την ταχύτητα $\hat{\upsilon}$ και με μέτρο ίσο με το στοιχειώδες μήκος ή τόξο της τροχιάς ds

$$d\vec{r} = ds\hat{\upsilon}$$

$$W_f(A \to T) = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_T} \overrightarrow{f}_k \cdot \, d\vec{r} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_T} (-\mu_k N \hat{\upsilon}) \cdot \, (ds\hat{\upsilon}) = -\mu_k N \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_T} ds$$

Το ολοκλήρωμα είναι απλώς το μήκος της διαδρομής $s_C(A \to T)$ που κάλυψε το σώμα από το αρχικό σημείο Α ως το τελικό σημείο Τ ανάλογα με την τροχιά C που ακολούθησε. Όμως το μήκος της διαδρομής εξαρτάται από την τροχιά που ακολούθησε το σώμα και όχι μόνο από το αρχικό και τελικό σημείο. Π.χ. οι δύο διαδρομές του παρακάτω σχήματος που περιγράφονται από της καμπύλες C_1 και C_2 έχουν διαφορετικό μήκος. Η C_2 έχει μεγαλύτερο μήκος και άρα η τριβή θα κάνει μεγαλύτερο έργο (σε απόλυτη τιμή).
Όταν έχουμε τριβή διαλέγουμε τη συντομότερη διαδρομή για να μη χάσουμε πολλή ενέργεια.



Το έργο της κινητικής τριβής είναι πάντα αρνητικό και ίσο με

$$\boxed{W_f(A \to T) = -\mu_k N \, s_C}$$

όπου s_C το μήκος της διαδρομής που εξαρτάται από την καμπύλη C που διατρέχουμε.

Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και με την οπισθέλκουσα. Επειδή η οπισθέλκουσα είτε γραμμική είτε τετραγωνική θα είναι πάντα αντίθετη με την ταχύτητα, η οποία είναι εφαπτόμενη στην τροχιά, το έργο της θα εξαρτάται από την καμπύλη που ακολουθεί η τροχιά :

$$\vec{F}_D = -b\vec{\upsilon}$$

$$W_D(A \to T) = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_T} \vec{F}_D \cdot \, d\vec{r} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_T} (-b\vec{\upsilon}) \cdot \, (ds\hat{\upsilon}) = -b\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_T} \upsilon ds$$

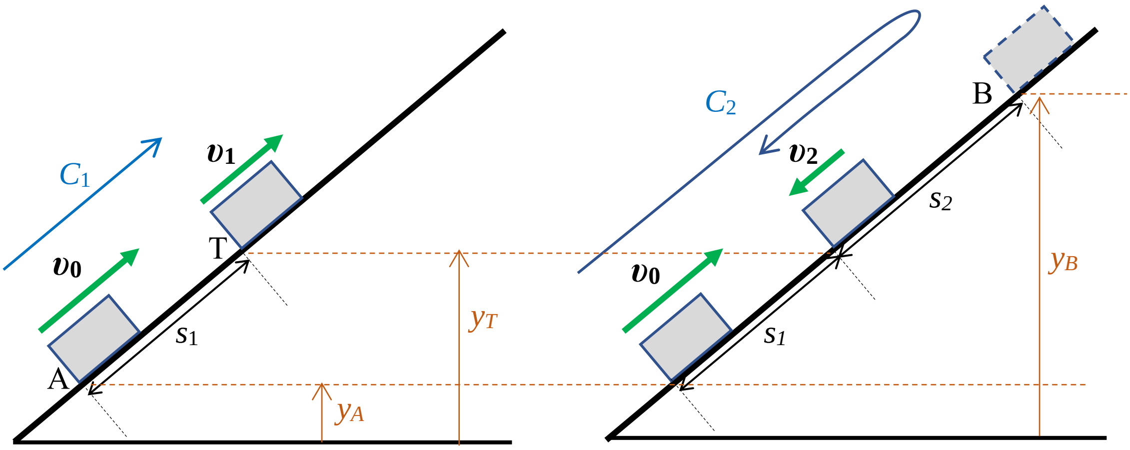
$$\vec{F}_D = -c\upsilon^2 \hat{\upsilon}$$

$$W_D(A \to T) = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_T} \vec{F}_D \cdot \, d\vec{r} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_T} (-c\upsilon^2 \hat{\upsilon}) \cdot \, (ds\hat{\upsilon}) = -c\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_T} \upsilon^2 ds$$

Τα ολοκληρώματα εξαρτώνται από τη συγκεκριμένη κάθε φορά καμπύλη της τροχιάς.

Παράδειγμα. Πόσο είναι το έργο της κινητικής τριβής όταν το σώμα που εκτοξεύσαμε στο κεκλιμένο επίπεδο με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0 πάει από το σημείο Α στο σημείο Τ, που βρίσκεται σε απόσταση s_1

πιο πάνω, με δύο διαφορετικές διαδρομές. Τη μια φορά απευθείας ανεβαίνοντας και τη δεύτερη φορά αφού έχει ανέβει στο σημείο μέγιστου ύψους Β επιστρέφοντας. Ποιο είναι το αντίστοιχο έργο του βάρους; Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος στο σημείο Τ από τις δύο διαδρομές;
Αριθμητική εφαρμογή: m=10,00 kg, θ=53,13°, μ_k=0,4000, g= 9,800 N/kg, υ_0 = 10,00 m/s, s_1=2,000 m

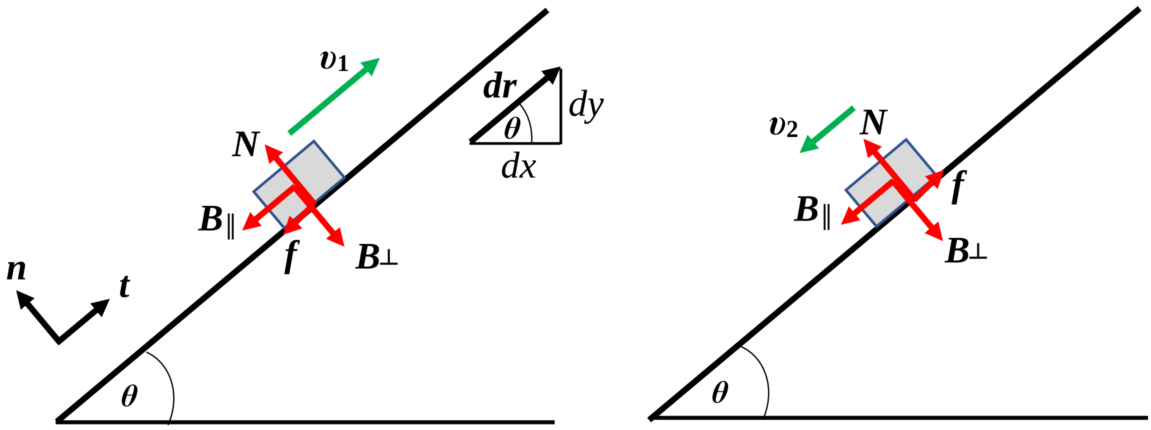


Οι δύο διαδρομές C_1 και C_2

Το κάνω πολύ αναλυτικά και με διανύσματα. Οι διαδρομές είναι ευθείες και μπορούμε να περιγράψουμε εύκολα μαθηματικώς, τα εφαπτόμενα και κάθετα σε αυτές διανύσματα.
Το κεκλιμένο επίπεδο ανεβαίνει στην κατεύθυνση : $\hat{t} = \cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}$
Το κάθετο διάνυσμα στο κεκλιμένο επίπεδο είναι : $\hat{n} = -\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}$
(Ελέγξτε ότι $\hat{t}\cdot\hat{t} = 1 = \hat{n}\cdot\hat{n}$ και $\hat{n}\cdot\hat{t} = 0$)
Η μετατόπιση και η ταχύτητα είναι παράλληλες στο κεκλιμένο επίπεδο και δίνονται από :

$$\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{t} = \mathrm{sgn}(\upsilon)|\upsilon|\hat{t}\,, \qquad d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt\,\hat{t} = \mathrm{sgn}(\upsilon)|\upsilon|dt\,\hat{t} = \mathrm{sgn}(\upsilon)\,ds\,\hat{t}$$

Όταν το σώμα ανεβαίνει έχει θετική ταχύτητα: $\mathrm{sgn}(\upsilon) = +1$ άνοδος
και όταν κατεβαίνει αρνητική: $\mathrm{sgn}(\upsilon) = -1$ κάθοδος
Το διάστημα είναι πάντα θετικό $ds \geq 0$
[sgn είναι η συνάρτηση που δίνει το πρόσημο (sign) ενός αριθμού. Παίρνει μόνο τις δύο τιμές ± 1. Π.χ. $\mathrm{sgn}(-3) = -1$, $\mathrm{sgn}(18) = +1$. Ισχύει $\mathrm{sgn}^2(x) = 1$. Κάθε πραγματικός αριθμός γράφεται: $x = \mathrm{sgn}(x)|x| \Leftrightarrow |x| = \mathrm{sgn}(x)x$.]
Η μετατόπιση μπορεί επίσης να γραφτεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες: $d\vec{r} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y}$



Δυνάμεις και μετατόπιση

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που δρουν στο σώμα. Αυτές είναι το βάρος $\vec{B}$, η κάθετη αντίδραση του δαπέδου $\vec{N}$ και η κινητική τριβή $\vec{f}$. Αν χρειάζεται τις αναλύουμε σε συνιστώσες παράλληλες ($\|$) και κάθετες ($\perp$) στο κεκλιμένο επίπεδο. Μόνο το βάρος χρειάζεται ανάλυση.

$\vec{B} = -mg\,\hat{y}$

$B_{\|} = \vec{B}\cdot\,\hat{t} = (-mg\,\hat{y})\cdot\,(\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}) = -mg\sin\theta = -(10)(9,8)(0,800) = -78,4\,\mathrm{N}$

$B_{\perp} = \vec{B}\cdot\,\hat{n} = (-mg\,\hat{y})\cdot\,(-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}) = -mg\cos\theta = -(10)(9,8)(0,600) = -85,8\,\mathrm{N}$

$\vec{B} = B_{\|}\hat{t} + B_{\perp}\hat{n} = -78,4\hat{t} - 85,8\hat{n}\ \mathrm{N}$

Κάθετα στο κεκλιμένο επίπεδο το σώμα ισορροπεί. Άρα η κάθετη αντίδραση N είναι αντίθετη από την κάθετη συνιστώσα του βάρους B: $N = -B_{\perp} = mg\cos\theta = 85,8\ \mathrm{N}$

$\vec{N} = mg\cos\theta\,\hat{n} = 85,8\hat{n}\ \ \mathrm{N}$

Η κάθετη αντίδραση δεν παράγει έργο επειδή είναι πάντα κάθετη στη μετατόπιση:

$$\vec{N}\cdot\,d\vec{r} = (mg\cos\theta\,\mathrm{sgn}\,\upsilon\,ds)\hat{n}\cdot\,\hat{t} = 0$$

Το μέτρο της κινητικής τριβής δίνεται από τον τύπο $\left|\vec{f}\right| = \mu_k\left|\vec{N}\right|$ και η κατεύθυνσή της είναι πάντα αντίθετη της ταχύτητας:

$\vec{f} = -\mathrm{sgn}(\upsilon)\,\mu_k mg\cos\theta\,\hat{t} = -\mathrm{sgn}(\upsilon)(0,4)(10)(9,8)(0,600)\,\hat{t} = -\mathrm{sgn}(\upsilon)\,23,52\,\hat{t}\ \ \mathrm{N}$

Το έργο της τριβής για κάθε διαδρομή είναι:

Διαδρομή C_1 από το Α στο Τ απευθείας, μόνο άνοδος, sgn (υ) = +1

$W_f(A\to T) = \int_{C_1}\vec{f}\cdot\,d\vec{r} = \int_0^{s_1}(-\mathrm{sgn}(\upsilon)\,\mu_k mg\cos\theta\,\hat{t})\cdot\,(\mathrm{sgn}(\upsilon)\,ds\,\hat{t}) = -\mu_k mg\cos\theta\int_0^{s_1}ds = -\left|\vec{f}_k\right|s_1 \Rightarrow$

$W_f(A\to T) = -(23,52)(2) = -47,04\ \mathrm{J}$

Διαδρομή C_2 από το Α στο Τ μέσω του Β. Χωρίζουμε τη διαδρομή σε δύο μέρη επειδή η ταχύτητα αλλάζει πρόσημο. Από Α σε Β άνοδος άρα sgn (υ) = +1, το σώμα καλύπτει διαδρομή μήκους $s_1 + s_2$. Από Β σε Τ κάθοδος άρα sgn (υ) = –1, το σώμα καλύπτει διαδρομή μήκους s_2:

$W_f(A\to B\to T) = W_f(A\to B) + W_f(B\to T) = \int_{A\,C_2}^{B}\vec{f}\cdot\,d\vec{r} + \int_{B\,C_2}^{T}\vec{f}\cdot\,d\vec{r} =$

$= \int_0^{s_1+s_2}(-\mathrm{sgn}(\upsilon)\,\mu_k mg\cos\theta\,\hat{t})\cdot\,(\mathrm{sgn}(\upsilon)\,ds\,\hat{t}) + \int_0^{s_2}(-\mathrm{sgn}(\upsilon)\,\mu_k mg\cos\theta\,\hat{t})\cdot\,(\mathrm{sgn}(\upsilon)\,ds\,\hat{t}) =$

$= -\mu_k mg\cos\theta\int_0^{s_1+s_2}ds - \mu_k mg\cos\theta\int_0^{s_2}ds$

$= -\mu_k mg\cos\theta\,(s_1 + 2s_2)$

Σαφώς το έργο της τριβής είναι διαφορετικό για τις δύο διαδρομές. Τη δεύτερη φορά το έργο της τριβής είναι μεγαλύτερο (κατά απόλυτη τιμή) επειδή το μήκος που διένυσε το σώμα είναι μεγαλύτερο κατά $2s_2$.

Για να βρούμε την απόσταση s_2, χρησιμοποιούμε την αρχή της ενέργειας, ξέροντας ότι στο σημείο Β το σώμα έχει μηδέν ταχύτητα άρα και μηδέν κινητική ενέργεια. Για την άνοδο από το Α στο Β έχουμε

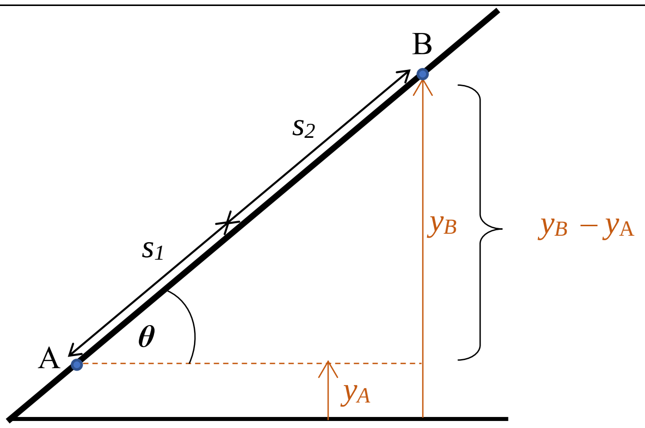
$\Delta E = W \Rightarrow (\cancel{mc^2} + \cancel{K_B}) - (\cancel{mc^2} + K_A) = W_B + \cancel{W_N} + W_f \Rightarrow -K_A = W_B - \mu_k mg\cos\theta\,(s_1 + s_2)$

Το έργο του βάρους μπορούμε να το υπολογίσουμε με δύο τρόπους.

Είτε με απευθείας υπολογισμό είτε αφού είναι συντηρητική δύναμη ως διαφορά δυναμικών ενεργειών

$W_B(A\to B) = U_G(A) - U_G(B) = mgy_A - mgy_B = -mg\left(y_B - y_A\right)$

Από το σχήμα έχουμε $\left(y_B - y_A\right) = (s_1 + s_2)\sin\theta$



$W_B(A \to B) = -mg(s_1 + s_2)\sin\theta$

Ισοδύναμα από τον ορισμό του έργου (με καρτεσιανές συντεταγμένες)

$$W_B(A \to B) = \int_{A\ C_2}^{B} \vec{B}\cdot\ d\vec{r} = \int_{A\ C_2}^{B} (-mg\hat{y})\cdot\ (dx\ \hat{x} + dy\ \hat{y}) = -mg\int_{y_A}^{y_B} dy = -mg\left(y_B - y_A\right) = -mg(s_1 + s_2)\sin\theta$$

Ισοδύναμα από τον ορισμό του έργου (με τις πλάγιες συντεταγμένες και $\mathrm{sgn}(\upsilon) = +1$ άνοδος)

$$W_B(A \to B) = \int_{A\ C_2}^{B} \vec{B}\cdot\ d\vec{r} = \int_{A\ C_2}^{B} (B_{\parallel}\hat{t} + B_{\perp}\hat{n})\cdot\ (\mathrm{sgn}(\upsilon)\,ds\ \hat{t}) = B_{\parallel}\int_{0}^{s_1+s_2} ds = -mg\sin\theta(s_1 + s_2)$$

Οπότε έχουμε

$$-K_A = W_B - \mu_k mg\cos\theta(s_1 + s_2) \Rightarrow \cancel{-}\frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon_0^2 = \cancel{-}\cancel{m}g(s_1 + s_2)\sin\theta\cancel{-}\mu_k\cancel{m}g\cos\theta(s_1 + s_2) \Rightarrow$$

$$\upsilon_0^2 = 2g(\sin\theta + \mu_k g\cos\theta)(s_1 + s_2) \Rightarrow$$

$$s_1 + s_2 = \frac{\upsilon_0^2}{2g(\sin\theta + \mu_k g\cos\theta)} = \frac{10^2}{2(9,8)[0,8 + (0,4)(0,6)]} = 4,906 \Rightarrow$$

$$s_2 = 4,906 - s_1 = 2,906\ \mathrm{m}$$

Οπότε

$$W_f(A \to B \to T) = -\mu_k mg\cos\theta(s_1 + 2s_2) = -(0,4)(10)(9,8)(0,6)[2 + (2)(2,906)] = -178,1\ \mathrm{J}$$

Το έργο του βάρους είναι το ίδιο και στις δύο περιπτώσεις αφού σημασία έχουν μόνο τα τελικά σημεία

$$W_B(A \to T) = W_B(A \to B \to T) = U_G(A) - U_G(T) \Rightarrow$$

$$W_B(A \to T) = W_B(A \to B \to T) = -mg\left(y_T - y_A\right) = -mgs_1\sin\theta = -(10)(9,8)(2)(0,8) = -156,8\ \mathrm{J}$$

Μπορούμε να το υπολογίσουμε για τη δεύτερη διαδρομή ώστε να δείτε ότι όταν το σώμα ανεβαίνει από Τ στο Β το έργο που κάνει το βάρος (αρνητικό) είναι ακριβώς αντίθετο από αυτό που κάνει όταν το σώμα κατεβαίνει από το Β στο Τ. Έτσι τα δύο αυτά έργα αθροίζουν μηδέν.

$$W_B(A \to B \to T) = \int_{A\ C_2}^{T} \vec{B}\cdot\ d\vec{r} + \int_{T\ C_2}^{B} \vec{B}\cdot\ d\vec{r} + \int_{B\ C_2}^{T} \vec{B}\cdot\ d\vec{r} =$$

$$= \int_{0\ \alpha\nu o\delta}^{s_1} (B_{\parallel}\hat{t} + B_{\perp}\hat{n})\cdot\ (\mathrm{sgn}\,\upsilon\,ds\ \hat{t}) + \int_{0\ \alpha\nu o\delta}^{s_2} (B_{\parallel}\hat{t} + B_{\perp}\hat{n})\cdot\ (\mathrm{sgn}\,\upsilon\,ds\ \hat{t}) + \int_{0\ \kappa\alpha\theta o\delta}^{s_2} (B_{\parallel}\hat{t} + B_{\perp}\hat{n})\cdot\ (\mathrm{sgn}\,\upsilon\,ds\ \hat{t}) =$$

$$= B_{\parallel}\int_{0\ \alpha\nu o\delta}^{s_1} \mathrm{sgn}\,\upsilon\,ds\ + B_{\parallel}\int_{0\ \alpha\nu o\delta}^{s_2} \mathrm{sgn}\,\upsilon\,ds\ + B_{\parallel}\int_{0\ \kappa\alpha\theta o\delta}^{s_2} \mathrm{sgn}\,\upsilon\,ds$$

Το βάρος δεν αλλάζει είτε το σώμα ανεβαίνει είτε κατεβαίνει όμως στη διαδρομή της καθόδου από Β σε Τ (τρίτο ολοκλήρωμα) αλλάζει το πρόσημο της ταχύτητας :

$$W_B(A \to B \to T) = B_{\parallel}\int_0^{s_1} ds\ + \cancel{B_{\parallel}\int_0^{s_2} ds}\ - \cancel{B_{\parallel}\int_0^{s_2} ds}\ = -mg\sin\theta\, s_1 = -156,8\ \mathrm{J}$$

Τις ταχύτητες τις βρίσκουμε από την αρχή της ενέργειας

$$\Delta E(A \to T) = W(A \to T) \Rightarrow$$

$$(\cancel{mc^2} + K_T) - (\cancel{mc^2} + K_A) = W_B(A \to T) + \cancel{W_N} + W_f(A \to T) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -mg\sin\theta\, s_1 - \mu_k mg\cos\theta\, s_1 \Rightarrow$$

$$\upsilon_1^2 = \upsilon_0^2 - 2g(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)\, s_1 \Rightarrow$$

$$\upsilon_1^2 = 10^2 - 2(9,8)[(0,8) + (0,4)(0,6)](2) = 100 - 40,768 = 59,232 \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 = 7,696 \text{ m/s}$$

$$\Delta E(A \to B \to T) = W(A \to B \to T) \Rightarrow \ (\cancel{mc^2} + K_T) - (\cancel{mc^2} + K_A) = W_B(A \to T) + \cancel{W_N} + W_f(A \to B \to T) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -mg\sin\theta\, s_1 - \mu_k mg\cos\theta(s_1 + 2s_2) \Rightarrow$$

$$\upsilon_2^2 = \upsilon_0^2 - 2g(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)\, s_1 - 4\mu_k g\cos\theta\, s_2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_2^2 = 59,232 - 4(0,4)(9,8)(0,6)(2,906) = 59,232 - 27,340 = 31,892 \Rightarrow$$

$$\upsilon_2 = 5,647 \text{ m/s}$$

Δυναμικό

Εκτός από τη δυναμική ενέργεια ενός σώματος μάζας m (ή φορτίου q) μέσα στο πεδίο που δημιουργεί η μάζα M (ή το φορτίο Q) ορίζεται και η έννοια του δυναμικού ως η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα μάζας (ή ανά μονάδα φορτίου) του συγκεκριμένου σημείου του πεδίου.

Η ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια ανά μονάδα ηλεκτρικού φορτίου ονομάζεται ηλεκτρικό δυναμικό :

$$V = \frac{U_E}{q}$$

Το ηλεκτροστατικό δυναμικό μετριέται σε J/C που ονομάζεται βολτ: V = J/C.
Άρα το ηλεκτροστατικό δυναμικό του πεδίου που δημιουργεί σημειακό φορτίο Q είναι:

$$\boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}}$$

Το δυναμικό χαρακτηρίζει το συγκεκριμένο σημείο του πεδίου και εξαρτάται από τη θέση του σημείου σε σχέση με το φορτίο πηγή Q και από την τιμή του ηλεκτρικού φορτίου Q που δημιουργεί το ηλεκτρικό πεδίο. Γνωρίζοντας το δυναμικό ενός σημείου μπορούμε να βρούμε τη δυναμική ενέργεια που θα αποκτήσει οποιοδήποτε δοκιμαστικό φορτίο q τοποθετηθεί σε εκείνο το σημείο: $U_E = qV$

Το βαρυτικό δυναμικό σημειακής μάζας M είναι αντίστοιχα

$$\boxed{\phi(r) = -\frac{GM}{r}}$$

και η δυναμική ενέργεια $U_G = m\phi$

Οι εντάσεις των πεδίων

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q}$$

εξαρτώνται από το δυναμικό όπως η δύναμη από τη δυναμική ενέργεια

$$\vec{F}_E = -\vec{\nabla}U_E \qquad \vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$\vec{F}_G = -\vec{\nabla}U_G \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

Μια διανυσματική ταυτότητα

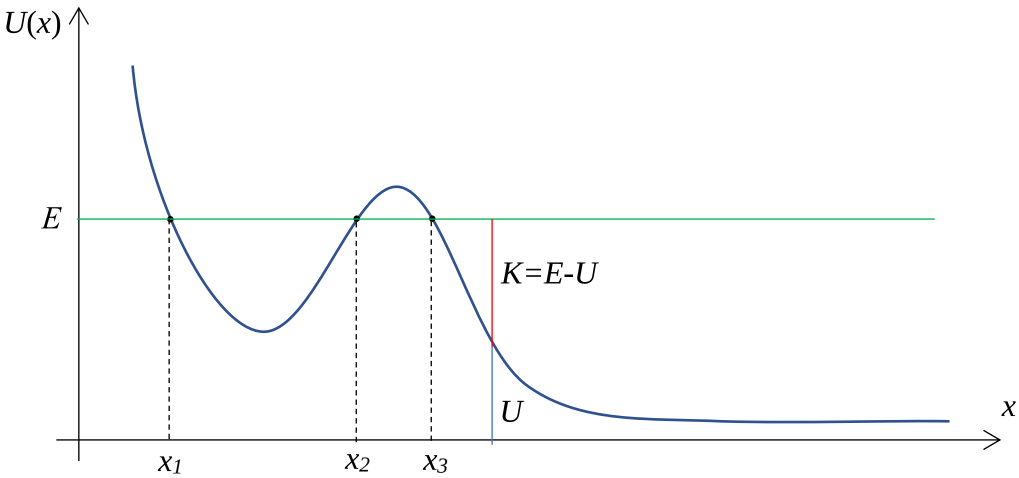
Επειδή για κάθε βαθμωτή συνάρτηση f ισχύει η ταυτότητα $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f = 0$, για τις διατηρητικές δυνάμεις που προκύπτουν από μια βαθμωτή συνάρτηση U, τη δυναμική ενέργεια, ως $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ θα ισχύει ότι :

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{F}=0}$$

Αντίστοιχα για τις εντάσεις των πεδίων ισχύει : $\vec{\nabla}\times\vec{g}=0$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$$

Κίνηση σε πεδίο δύναμης



Επειδή η κινητική ενέργεια είναι πάντα μια θετική ποσότητα, η κίνηση σώματος με ενέργεια E θα περιορίζεται στις θέσεις x για τις οποίες ισχύει : $E-U(x)\geq 0$.

Στα σημεία όπου $E=U(x)$ η κινητική ενέργεια και άρα η ταχύτητα μηδενίζεται. Τα σημεία αυτά ονομάζονται **σημεία τροπής** ή αψίδες και αποτελούν τα όρια της επιτρεπόμενης κίνησης.

Αν το σώμα με ενέργεια E βρισκόταν αρχικά κάπου μεταξύ των σημείων x_1 και x_2 θα εκτελεί ταλάντωση μεταξύ αυτών των δύο θέσεων.

Αν το σώμα με ενέργεια E βρισκόταν αρχικά δεξιότερα του x_3 τότε αν το προσέγγιζε θα το φτάσει με διαρκώς μειούμενη ταχύτητα μέχρι να σταματήσει στη θέση x_3 και στη συνέχεια θα αναστρέψει ταχύτητα και θα απομακρυνθεί για πάντα.

Ισχύς

Ο ρυθμός παραγωγής έργου ονομάζεται ισχύς P : $P\equiv\dfrac{dW}{dt}$

και επειδή είναι $dW=dK$ η ισχύς είναι ίση και με το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας : $P=\dfrac{dK}{dt}$

Στη μεταφορική κίνηση η στιγμιαία ισχύς παίρνει τη μορφή: $P=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}$

$$dW/dt=\vec{F}\cdot d\vec{r}/dt=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}$$

ενώ στην περιστροφική τη μορφή $P=\vec{\tau}\cdot\ \vec{\omega}$

$$dW/dt=\vec{\tau}\cdot\ d\vec{\theta}/dt=\tau\omega$$

Ισοδύναμα το έργο μπορεί να υπολογιστεί από : $W=\int Pdt$

Όταν όλες οι δυνάμεις είναι διατηρητικές : $dW=-dU$ τότε είναι και : $P=-\dfrac{dU}{dt}$ οπότε προκύπτει η διατήρηση της ενέργειας :

$$\frac{dE}{dt}=\frac{dK}{dt}+\frac{dU}{dt}=P-P=0$$

Αν κάποιες από τις δυνάμεις είναι μη-διατηρητικές (non-conservative, dissipative) τότε έχουμε:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{dW^{\mu\sigma}}{dt}$$

δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής (απώλειας) της ενέργειας είναι ίσος με την ισχύ των μη συντηρητικών δυνάμεων

Εφαρμογή: Μελέτη της ισχύος στην εξαναγκασμένη ταλάντωση

Δυνάμεις : $F_s = -kx$, $F_D = -b\upsilon$, $F_{stim} = F\sin(\omega t)$

Παράμετροι: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $\beta = \dfrac{b}{2m}$, $\gamma = \dfrac{F}{m}$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Οι τύποι που ισχύουν στη μόνιμη κατάσταση είναι:

$$x_{\mu o\nu}(t) = A(\omega)\sin(\omega t - \delta(\omega)) \qquad \upsilon_{\mu o\nu}(t) = B(\omega)\cos(\omega t - \delta(\omega))$$

με

$$A(\omega) = \frac{\gamma}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_r^2)^2 + 4\beta^2\omega_d^2}}$$

$$B(\omega) = \omega A(\omega) = \frac{\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\left(\omega - \omega_0^2/\omega\right)^2 + 4\beta^2}}$$

$$\tan\delta(\omega) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{με } \ 0 < \delta < \pi$$

Η στιγμιαία ισχύς που παρέχει η διεγείρουσα δύναμη στον ταλαντωτή στη μόνιμη κατάσταση δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται από τη χρονική στιγμή

$$P_{in}(t) = F_{stim}(t)\cdot\ \upsilon_{\mu o\nu}(t) = F\sin\omega t\cdot\ B(\omega)\cos(\omega t - \delta(\omega))$$

Το ίδιο ισχύει και για την καταναλισκόμενη ισχύ από την οπισθέλκουσα

$$P_{out}(t) = F_D(t)\cdot\ \upsilon_{\mu o\nu}(t) = -b\upsilon^2 = -bB^2(\omega)\cos^2(\omega t - \delta(\omega))$$

Το μέγεθος που ενδιαφέρει είναι η μέση τιμή της ισχύος στη διάρκεια μιας περιόδου $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$:

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$$

Οι μέσες ισχύες $\bar{P}_{in}$, $\bar{P}_{out}$ θα πρέπει να είναι σταθερές, αφού τα πράγματα επαναλαμβάνονται πανομοιότυπα κάθε περίοδο και μάλιστα αντίθετες αφού το σύστημα κάνει αμείωτη ταλάντωση χωρίς απώλεια ενέργειας

$$\bar{P}_{in} + \bar{P}_{out} = 0$$

Για να τις υπολογίσουμε θα χρησιμοποιήσουμε τις γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$, $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\quad \sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\quad \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

και το γεγονός ότι : $\displaystyle\int_0^{4\pi}\cos x dx = 0 = \int_0^{4\pi}\sin x dx$

Η μέση εισερχόμενη (παραγόμενη) ισχύς είναι :

$$\bar{P}_{in} = \frac{1}{T}\int_0^T FB(\omega)\sin\omega t\cos(\omega t - \delta(\omega))dt = \frac{FB}{T}\int_0^T \left[\sin\omega t\cos(\omega t-\delta)\right]dt =$$

Το ολοκλήρωμα είναι

$$=\int_0^T \sin\omega t\left[\cos(\omega t)\cos(\delta)+\sin(\omega t)\sin(\delta)\right]dt = \cos(\delta)\int_0^T \sin\omega t\cos(\omega t)dt + \sin(\delta)\int_0^T \sin^2\omega t dt =$$

$$=\cos\delta\int_0^T \frac{\sin 2\omega t}{2}dt + \sin\delta\int_0^T \frac{1-\cos 2\omega t}{2}dt = \sin\delta\frac{T}{2}$$

επειδή τα ολοκληρώματα του ημιτόνου και συνημιτόνου είναι μηδέν

$$\int_0^T \sin 2\omega t dt = \int_0^T \sin 2\frac{2\pi}{T}t dt = \frac{T}{4\pi}\int_0^{4\pi}\sin\tau d\tau = -\frac{T}{4\pi}\cos\tau\Big|_0^{4\pi} = -\frac{T}{4\pi}\left(\cos(4\pi)-\cos(0)\right) = -\frac{T}{4\pi}(1-1)=0$$

με την αλλαγή μεταβλητής : $\tau = \frac{4\pi}{T}t, \quad dt = \frac{T}{4\pi}d\tau, \quad \tau = 0$ για $t=0, \quad \tau = 4\pi$ για $t=T$

$$\int_0^T \cos 2\omega t dt = \int_0^T \cos 2\frac{2\pi}{T}t dt = \frac{T}{4\pi}\int_0^{4\pi}\cos\tau d\tau = -\frac{T}{4\pi}\sin\tau\Big|_0^{4\pi} = -\frac{T}{4\pi}\left(\sin(4\pi)-\sin(0)\right) = -\frac{T}{4\pi}(0-0)=0$$

με την αλλαγή μεταβλητής : $\tau = \frac{4\pi}{T}t, \quad dt = \frac{T}{4\pi}d\tau, \quad \tau = 0$ για $t=0, \quad \tau = 4\pi$ για $t=T$

Άρα $\bar{P}_{in} = \frac{FB(\omega)}{T}\sin\delta(\omega)\frac{T}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{\bar{P}_{in}(\omega) = \frac{1}{2}FB(\omega)\sin\delta(\omega) > 0 \qquad \text{επειδή } 0<\delta<\pi}$$

Η μέση εξερχόμενη (καταναλισκόμενη) ισχύς είναι :

$$\bar{P} = -bB^2(\omega)\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t-\delta)dt = -bB^2(\omega)\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1+\cos 2(\omega t-\delta)}{2}dt = -bB^2(\omega)\frac{1}{T}\frac{T}{2}$$

Επειδή πάλι το ολοκλήρωμα του συνημιτόνου είναι μηδέν

$$\int_0^T \cos(2\omega t - 2\delta)dt = \int_0^T \cos\left(\frac{4\pi}{T}t-2\delta\right)dt = \frac{T}{4\pi}\int_{-2\delta}^{4\pi-2\delta}\cos\tau d\tau = -\frac{T}{4\pi}\sin\tau\Big|_{-2\delta}^{4\pi-2\delta} =$$

$$= -\frac{T}{4\pi}\left[\sin(4\pi-2\delta)-\sin(-2\delta)\right] = -\frac{T}{4\pi}\left[-\sin(2\delta)+\sin(2\delta)\right]=0$$

με την αλλαγή μεταβλητής : $\tau = \frac{4\pi}{T}t - 2\delta, \quad dt = \frac{T}{4\pi}d\tau, \quad \tau = -2\delta$ για $t=0, \quad \tau = 4\pi-2\delta$ για $t=T$

$$\boxed{\bar{P}_{out}(\omega) = -\frac{1}{2}bB^2(\omega)}$$

Για να παραμένει η ενέργεια ταλάντωσης σταθερή οι δύο ισχύες πρέπει να αθροίζουν μηδέν. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\bar{P}_{in}(\omega)+\bar{P}_{out}(\omega) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}FB(\omega)\sin\delta(\omega) = \frac{1}{2}bB^2(\omega) \Rightarrow F\sin\delta(\omega) = bB(\omega) \Rightarrow \sin\delta = \frac{bB}{F} \Rightarrow$$

$$\sin^2\delta = \frac{b^2B^2}{F^2} = \frac{b^2}{F^2}\frac{\gamma^2\omega^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\beta^2\omega^2} = \frac{b^2}{\cancel{F^2}}\frac{\omega^2\,\cancel{F^2}/m^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\beta^2\omega^2} = \frac{4\omega^2\left(b/2m\right)^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\beta^2\omega^2} = \frac{4\beta^2\omega^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}$$

Διαιρούμε και τον αριθμητή και τον παρονομαστή με $\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2$ και χρησιμοποιούμε την

$$\tan\delta(\omega) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$$\sin^2\delta = \frac{4\beta^2\omega^2 \big/ \left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}{1+4\beta^2\omega^2 \big/ \left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2} = \frac{\tan^2\delta}{1+\tan^2\delta}$$

που ισχύει επειδή είναι τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\frac{\tan^2\delta}{1+\tan^2\delta} = \frac{\dfrac{\sin^2\delta}{\cos^2\delta}}{1+\dfrac{\sin^2\delta}{\cos^2\delta}} = \frac{\dfrac{\sin^2\delta}{\cancel{\cos^2\delta}}}{\dfrac{\cos^2\delta+\sin^2\delta}{\cancel{\cos^2\delta}}} = \frac{\sin^2\delta}{\cos^2\delta+\sin^2\delta} = \frac{\sin^2\delta}{1}$$

Άρα πράγματι η ενέργεια που παρέχει η διεγείρουσα δύναμη εξισορροπεί την ενέργεια που χάνεται λόγω αντιστάσεων και μπορούμε να χρησιμοποιούμε για την εισερχόμενη ισχύ αμφότερες τις εκφράσεις :

$$\bar{P}_{in} = \frac{1}{2}FB\sin\delta = \frac{1}{2}bB^2$$

Η ενέργεια που παρέχεται στον ταλαντωτή στο διάστημα μιας περιόδου υπολογίζεται από :

$$\bar{W} = \bar{P}_{in}\cdot\ T = \frac{1}{2}bB^2\,\frac{2\pi}{\omega} = bA^2\omega^2\,\frac{\pi}{\omega} = \pi bA^2\omega$$

Στο συντονισμό και το πλάτος της ταχύτητας B και το $\sin\delta$ παίρνουν τις μέγιστες τιμές τους

$$\omega = \omega_0$$

$$\delta(\omega_0) = \tan^{-1}\left(\frac{2\beta\omega_0}{\omega_0^2-\omega_0^2}\right) = \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\delta = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

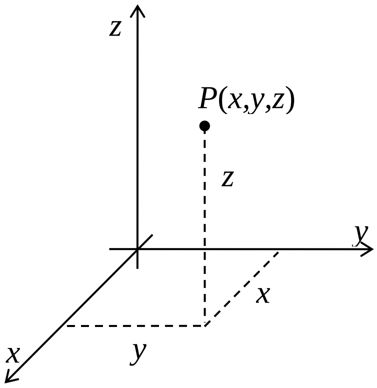
$$B(\omega) = \frac{\gamma}{\sqrt{\cancel{\left(\omega_0-\omega_0^2/\omega_0\right)^2}+4\beta^2}} = \frac{\gamma}{2\beta} = B_{\max}$$

οπότε στο συντονισμό το σύστημα λαμβάνει τη μέγιστη ισχύ από τη διεγείρουσα δύναμη

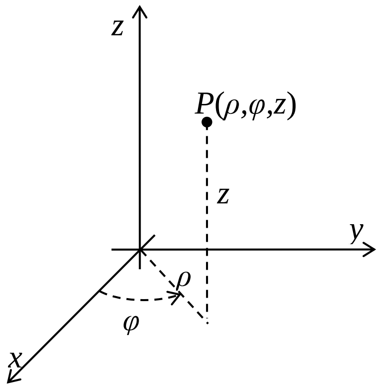
$$\bar{P}_{in}(\omega_0) = \frac{1}{2}FB_{\max} = \frac{1}{2}F\,\frac{F/m}{2b/2m} = \frac{F^2}{2b} = \bar{P}_{in\ \max}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

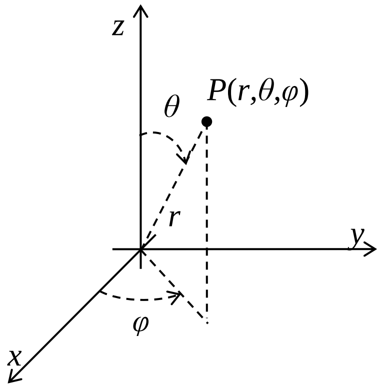
Περιγραφή θέσης σε τρεις διαστάσεις



Καρτεσιανές

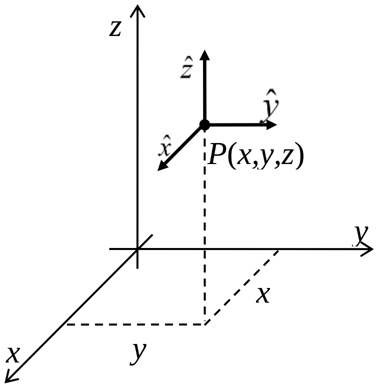


Κυλινδρικές

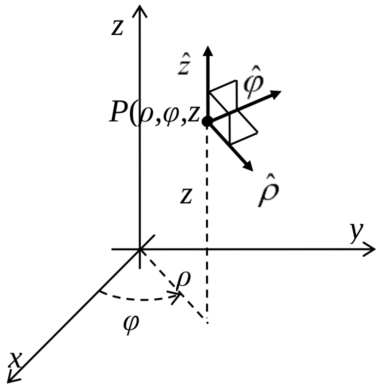


Σφαιρικές

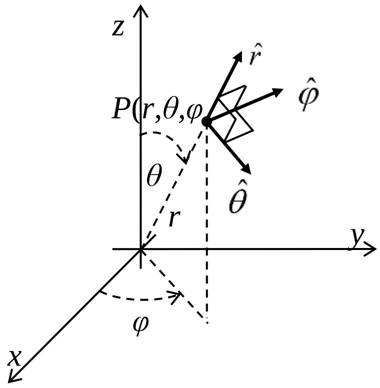
Μοναδιαία διανύσματα



Καρτεσιανές



Κυλινδρικές



Σφαιρικές

Καρτεσιανές συντεταγμένες

Η γενίκευση σε τρεις διαστάσεις των καρτεσιανών συντεταγμένων γίνεται απευθείας προσθέτοντας μια τρίτη διάσταση z (ύψος) στον προσδιορισμό της θέσης:

$$\vec{r} = \left(x, y, z\right) \text{ ή } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} ,$$

Η στοιχειώδης μετατόπιση είναι : $d\vec{r} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$,

Το στοιχειώδες μήκος είναι : $ds^2 = \left|d\vec{r}\right|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$,

Στοιχειώδεις επιφάνειες : $dA_x = dydz$, $dA_y = dzdx$, $dA_z = dxdy$

Ο στοιχειώδης όγκος είναι : $dV = dx\,dy\,dz$,

Το σύστημα είναι ορθοκανονικό

$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$, $\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \hat{z}\cdot\hat{x} = 0$

και δεξιόστροφο

$\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z},\;\; \hat{y}\times\hat{z}=\hat{x}\;,\quad \hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}$

Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ διατηρούν σταθερό τον προσανατολισμό τους όταν το σημείο P κινείται στο χώρο.

Τα κινηματικά μεγέθη ορίζονται με απευθείας γενίκευση από τις δύο διαστάσεις

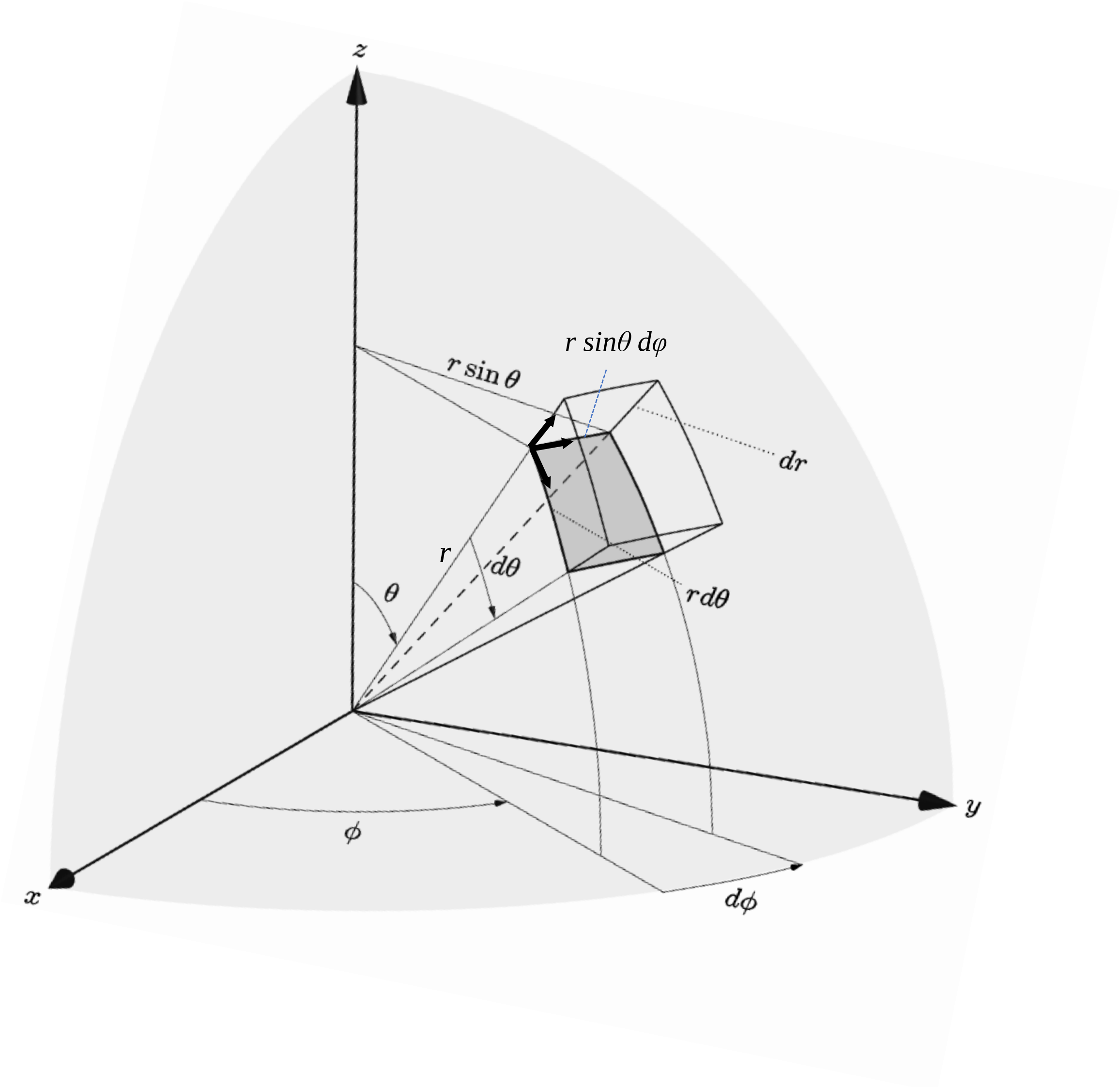
$$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)=\frac{dx}{dt}\hat{x}+\frac{dy}{dt}\hat{y}+\frac{dz}{dt}\hat{z}=\upsilon_x\hat{x}+\upsilon_y\hat{y}+\upsilon_z\hat{z}=(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z)\,,$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\left(\frac{d\upsilon_x}{dt},\frac{d\upsilon_y}{dt},\frac{d\upsilon_z}{dt}\right)=\frac{d\upsilon_x}{dt}\hat{x}+\frac{d\upsilon_y}{dt}\hat{y}+\frac{d\upsilon_z}{dt}\hat{z}=a_x\hat{x}+a_y\hat{y}+a_z\hat{z}=(a_x,a_y,a_z)$$

Σφαιρικές συντεταγμένες

Χρησιμοποιούμε την απόσταση r από την αρχή των αξόνων προσδιορίζοντας έτσι μια σφαίρα ακτίνας r στην οποία βρίσκεται το σημείο. Στη συνέχεια με δύο γωνίες προσδιορίζουμε τη θέση του σημείου πάνω στη σφαίρα (όπως στην επιφάνεια της Γης χρησιμοποιούμε το γεωγραφικό πλάτος και μήκος).

$$\vec{r}=\left(r\sin\theta\cos\varphi,\;\; r\sin\theta\sin\varphi,\;\; r\cos\theta\right),$$



$x = r\sin\theta\cos\varphi \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ακτινική απόσταση

$y = r\sin\theta\cos\varphi \quad \theta = \arctan\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$ πολική γωνία

$z = r\cos\theta \qquad \varphi = \arctan\dfrac{y}{x}$ αζιμουθιακή γωνία

Η στοιχειώδης μετατόπιση είναι : $d\vec{r} = dr\,\hat{r} + r\sin\theta\, d\varphi\,\hat{\varphi} + rd\theta\;\hat{\theta}$,

[οι ακμές του «κύβου» επί το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα]

Το στοιχειώδες μήκος είναι : $ds^2 = \left|d\vec{r}\right|^2 = dr^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 + r^2\, d\theta^2$,

[Πυθαγόρειο στη στοιχειώδη μετατόπιση]

Οι στοιχειώδεις επιφάνειες: $dS_r = r^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta$, $dS_\theta = r\sin\theta\, d\varphi\, dr$, $dS_\varphi = r\, d\theta\, dr$

[τα γινόμενα των ακμών του «κύβου» δίνουν τα εμβαδά των πλευρών]

Ο στοιχειώδης όγκος είναι : $dV = r^2\sin\theta\;d\theta\, d\varphi\, dr$

[το γινόμενο των τριών πλευρών του «κύβου»]

Το σύστημα είναι ορθοκανονικό

$\hat{r}\cdot\hat{r} = \hat{\theta}\cdot\hat{\theta} = \hat{\varphi}\cdot\hat{\varphi} = 1$, $\quad \hat{r}\cdot\hat{\theta} = \hat{\theta}\cdot\hat{\varphi} = \hat{\varphi}\cdot\hat{r} = 0$

και δεξιόστροφο

$\hat{r}\times\hat{\theta} = \hat{\varphi}$, $\quad \hat{\theta}\times\hat{\varphi} = \hat{r}$, $\quad \hat{\varphi}\times\hat{r} = \hat{\theta}$

Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{r},\hat{\theta},\hat{\varphi}$ **ΔΕΝ διατηρούν σταθερό τον προσανατολισμό τους** όταν το σημείο P κινείται στο χώρο.

Κυλινδρικές συντεταγμένες

Απλά προσθέτουμε την τρίτη διάσταση z (ύψος) στις πολικές συντεταγμένες του επιπέδου

$$\vec{r} = \left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z\right),$$

$$x = \rho\cos\varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = \rho\sin\varphi \qquad \varphi = \arctan(y/x)$$

$$z = z \qquad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

Η στοιχειώδης μετατόπιση είναι : $d\vec{r} = d\rho\,\hat{\rho} + \rho d\varphi\,\hat{\varphi} + dz\,\hat{z}$,

Το στοιχειώδες μήκος είναι : $ds^2 = \left|d\vec{r}\right|^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$,

Ο στοιχειώδης όγκος είναι : $dV = d\rho\;\rho d\varphi\; dz$

Το σύστημα είναι ορθοκανονικό

$\hat{\rho}\cdot\hat{\rho} = \hat{\varphi}\cdot\hat{\varphi} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$, $\quad \hat{\rho}\cdot\hat{\varphi} = \hat{\varphi}\cdot\hat{z} = \hat{z}\cdot\hat{\rho} = 0$

και δεξιόστροφο

$\hat{\rho}\times\hat{\varphi} = \hat{z}$, $\quad \hat{\varphi}\times\hat{z} = \hat{\rho} = 0$, $\quad \hat{z}\times\hat{\rho} = \hat{\varphi}$

Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\rho},\hat{\varphi},\hat{z}$ **ΔΕΝ διατηρούν σταθερό τον προσανατολισμό τους** όταν το σημείο P κινείται στο χώρο.

Επιτρόχιο σύστημα

Το μοναδιαίο εφαπτομενικό (tangent) διάνυσμα στην τροχιά και το πρωταρχικό κάθετο (normal), ορίζονται όπως και στις δύο διαστάσεις. Το τρίτο μοναδιαίο διάνυσμα που ονομάζεται δικάθετο (binormal) ορίζεται από το εξωτερικό τους γινόμενο $\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$, $\hat{n} = R\frac{d\hat{t}}{ds}$, $\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}$ όπου $R = \left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right|$ ή στιγμιαία ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς

Η ταχύτητα είναι εφαπτόμενη στην τροχιά

$$\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{t}$$

Η επιτάχυνση έχει πάλι δύο συνιστώσες τη γραμμική και την κεντρομόλο

$$\vec{a} = \frac{d(\upsilon\hat{t})}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\hat{t} + \upsilon\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\hat{t} + \upsilon\frac{d\hat{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\hat{t} + \upsilon\frac{1}{R}\hat{n}\upsilon \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\upsilon}{dt}\hat{t} + \frac{\upsilon^2}{R}\hat{n} = a_t\hat{t} + a_n\hat{n}$$

Το σύστημα είναι ορθοκανονικό

$$\hat{t}\cdot\hat{t} = \hat{n}\cdot\hat{n} = \hat{b}\cdot\hat{b} = 1\ , \quad \hat{t}\cdot\hat{n} = \hat{n}\cdot\hat{b} = \hat{b}\cdot\hat{t} = 0$$

και δεξιόστροφο

$$\hat{t}\times\hat{n} = \hat{b}\ ,\ \ \hat{n}\times\hat{b} = \hat{t}\ ,\ \ \hat{b}\times\hat{t} = \hat{n}$$