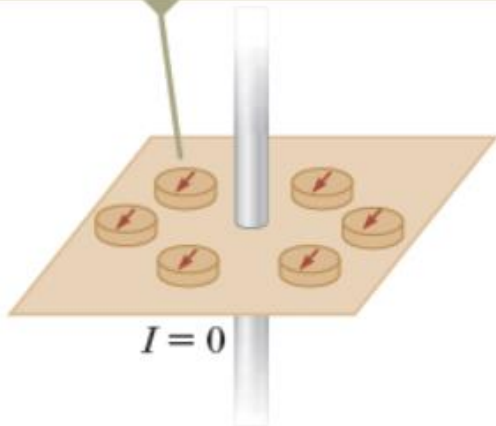


ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

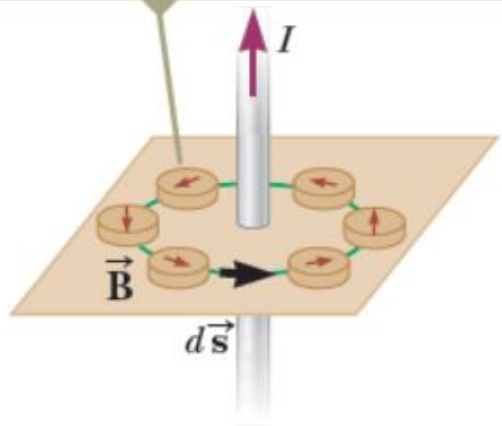
Νόμος Biot-Savart (Μπιό – Σαβάρ), Νόμος Ampere, Νόμος Gauss

When no current is present in the wire, all compass needles point in the same direction (toward the Earth's north pole).



a

When the wire carries a strong current, the compass needles deflect in a direction tangent to the circle, which is the direction of the magnetic field created by the current.



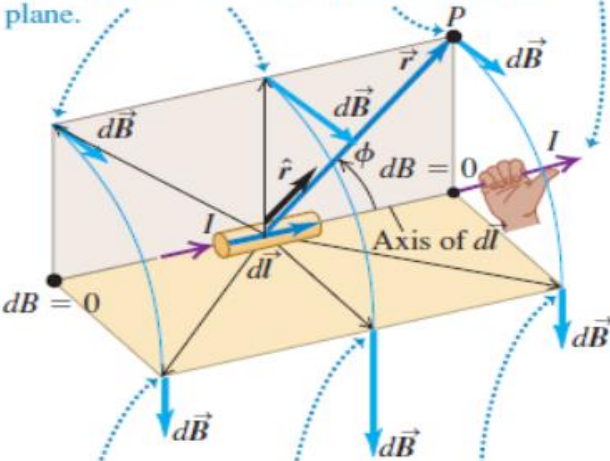
b

Νόμος Biot-Savart : Μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί στοιχείο ρεύματος

(a) Perspective view

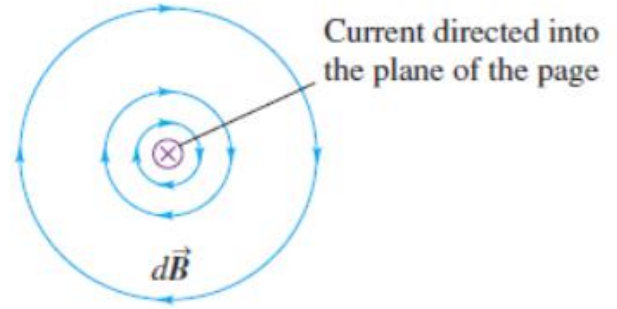
Right-hand rule for the magnetic field due to a current element: Point the thumb of your right hand in the direction of the current. Your fingers now curl around the current element in the direction of the magnetic field lines.

For these field points, \vec{r} and $d\vec{l}$ both lie in the beige plane, and $d\vec{B}$ is perpendicular to this plane.



For these field points, \vec{r} and $d\vec{l}$ both lie in the gold plane, and $d\vec{B}$ is perpendicular to this plane.

(b) View along the axis of the current element



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{C}^2$ ακριβώς, ώστε $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = (299.792.458 \text{ m/s})^2$ ακριβώς

$k_m = \mu_0/4\pi = 10^{-7} \text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{C}^2$

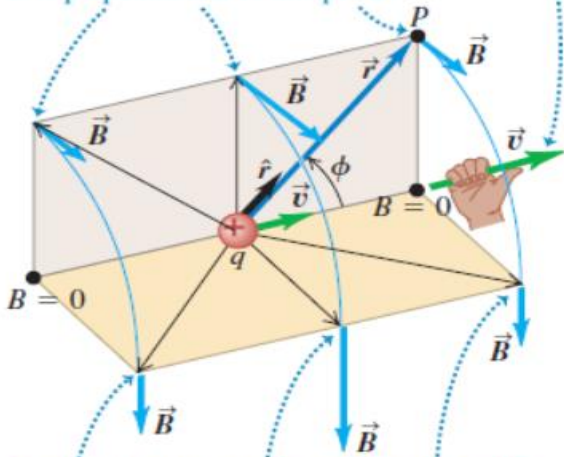
Το μαγνητικό πεδίο μετριέται σε Τ τέσλα και ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για τις μονάδες :

$[B] = \text{T} = \text{N}\cdot\text{s}/\text{C}\cdot\text{m} = \text{N}/\text{A}\cdot\text{m}$ και $[\mu_0] = \text{N}\cdot\text{s}^2/\text{C}^2 = \text{N}/\text{A}^2 = \text{Wb}/\text{A}\cdot\text{m} = \text{T}\cdot\text{m}/\text{A}$

Νόμος Biot-Savart: Μαγνητικό πεδίο σημειακού φορτίου

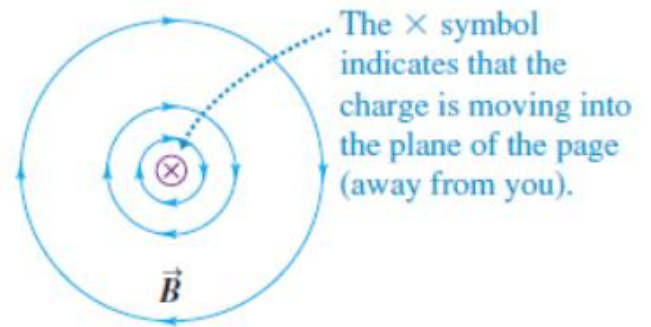
Right-hand rule for the magnetic field due to a positive charge moving at constant velocity: Point the thumb of your right hand in the direction of the velocity. Your fingers now curl around the charge in the direction of the magnetic field lines. (If the charge is negative, the field lines are in the opposite direction.)

For these field points, \vec{r} and \vec{v} both lie in the beige plane, and \vec{B} is perpendicular to this plane.



For these field points, \vec{r} and \vec{v} both lie in the gold plane, and \vec{B} is perpendicular to this plane.

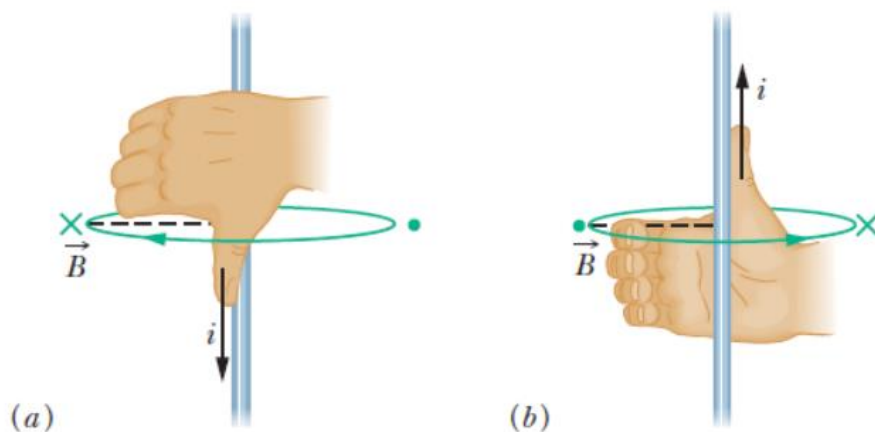
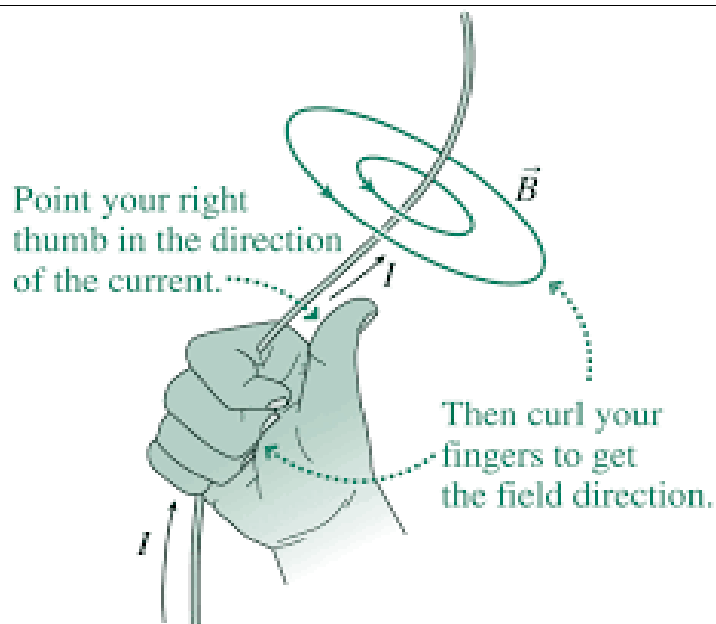
(b) View from behind the charge



The \times symbol indicates that the charge is moving into the plane of the page (away from you).

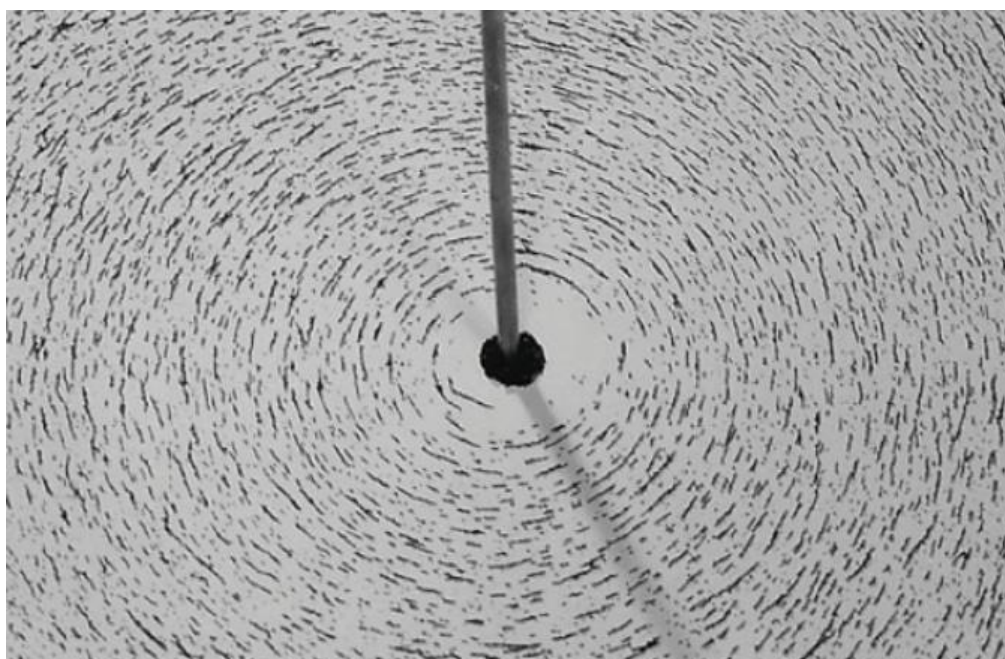
$$I d\vec{\ell} = \frac{q}{dt} d\vec{\ell} = q \frac{d\vec{\ell}}{dt} = q\vec{v}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r^2} \vec{v} \times \hat{r} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{v} \times \vec{E}$$



The thumb is in the current's direction. The fingers reveal the field vector's direction, which is tangent to a circle.

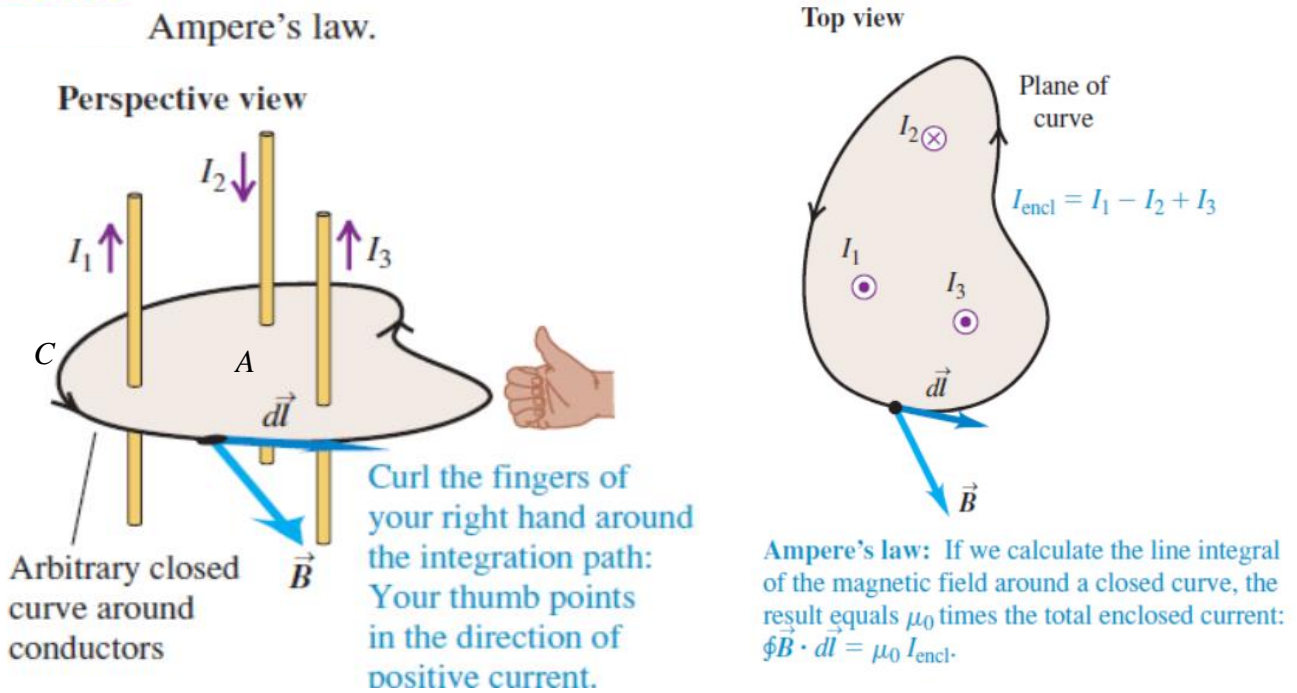
Οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου όπως ορίστηκε παραπάνω είναι κλειστές γραμμές που περικυκλώνουν την τροχιά του στοιχείου ρεύματος ή του κινούμενου φορτίου που τις δημιουργεί.



Νόμος Ampere

Από το νόμο των Biot-Savart προκύπτει ο νόμος του Ampere

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{περικλ}} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$



Stokes: $\int_{C(A)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}$

Πυκνότητα ρεύματος: $I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$ $J = I/A$ $[J] = A/m^2$

Χρησιμοποιούμε Ampere αντί Biot-Savart όταν η διάταξη των ρευμάτων έχει συμμετρία.

Νόμος Gauss

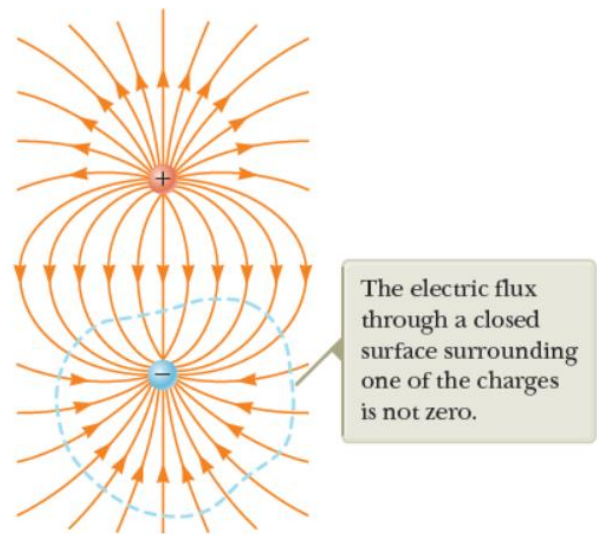
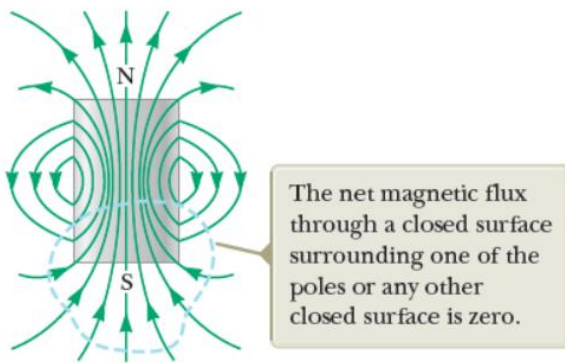
Επειδή το μαγνητικό πεδίο έχει κλειστές δυναμικές γραμμές η ροή του διαμέσου κάθε κλειστής επιφάνειας θα είναι πάντα μηδέν.

$$\int_{A(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

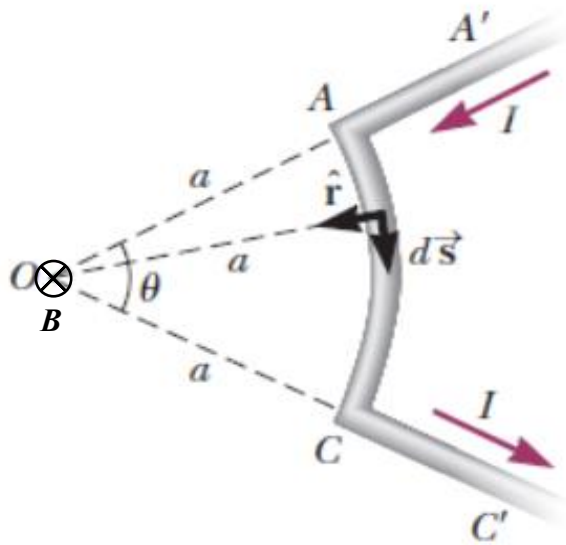
[Από θεώρημα απόκλισης Stokes: $\int_{A(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV$]

Αυτό ισοδυναμεί με το πειραματικό γεγονός ότι δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα και όλα τα μαγνητικά πεδία δημιουργούνται μόνο από κινούμενα φορτία (ρεύματα)

Η παραπάνω είναι η 2^η εξίσωση του Maxwell.



Μαγνητικό πεδίο στο κέντρο λεπτού κυκλικού τόξου (Biot-Savart)



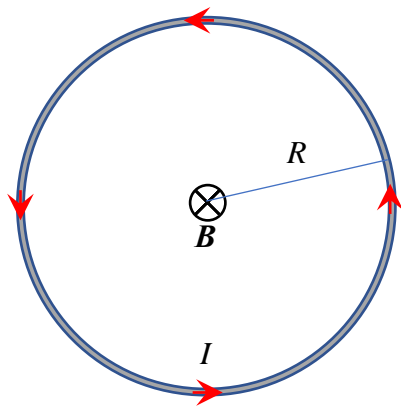
$$B = \frac{\mu_0 I \theta}{4\pi a}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I |d\vec{s} \times \hat{r}|}{4\pi a^2} = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi a^2} = \frac{\mu_0 I d\theta}{4\pi a}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^\theta d\theta \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \theta$$

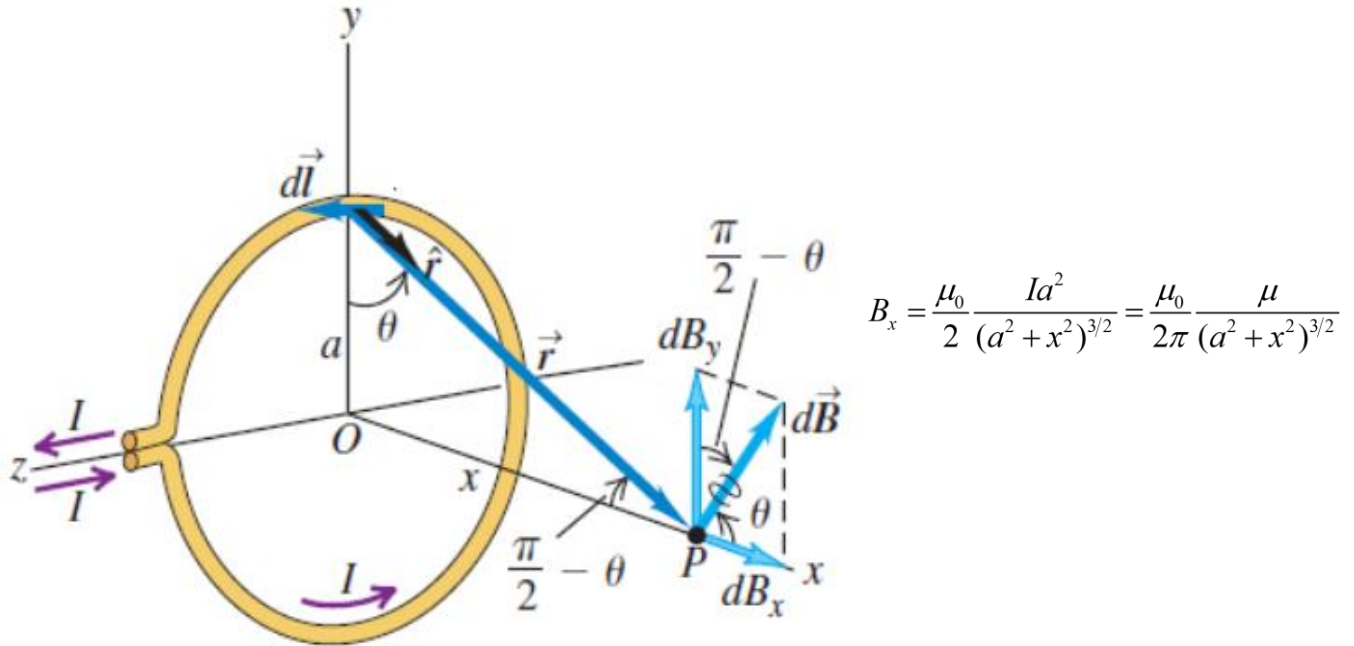
Μαγνητικό πεδίο λεπτού κυκλικού αγωγού (δίπολο) στο κέντρο του (Biot-Savart)

Θέτουμε $\theta=2\pi$

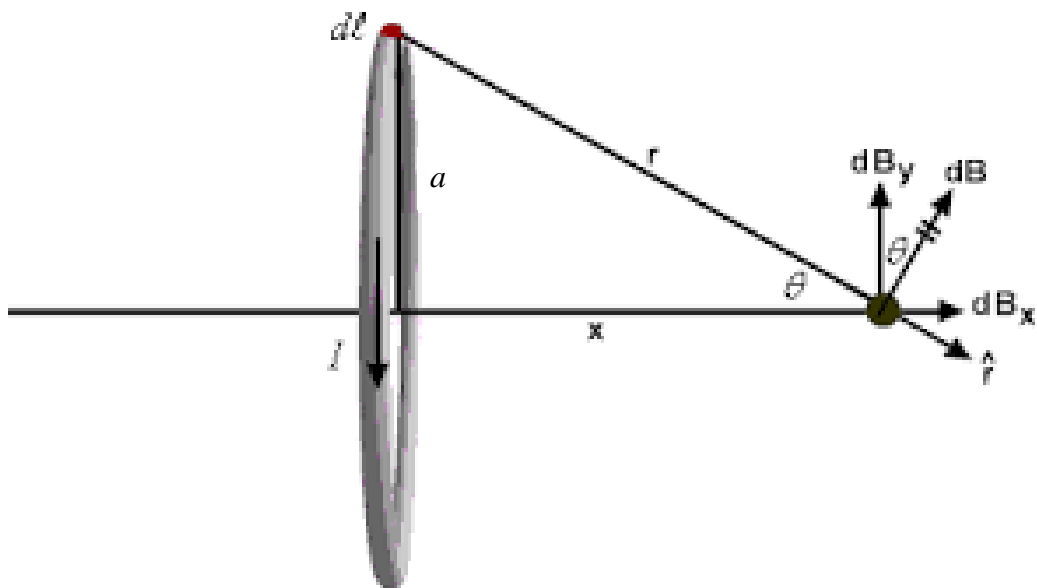


$$B = \frac{\mu_0 I}{2 R}$$

Μαγνητικό πεδίο λεπτού κυκλικού αγωγού (Δίπολο) πάνω στον άξονά του (Biot-Savart)

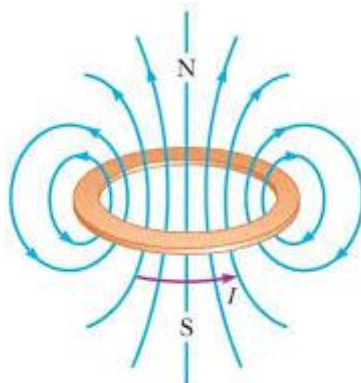


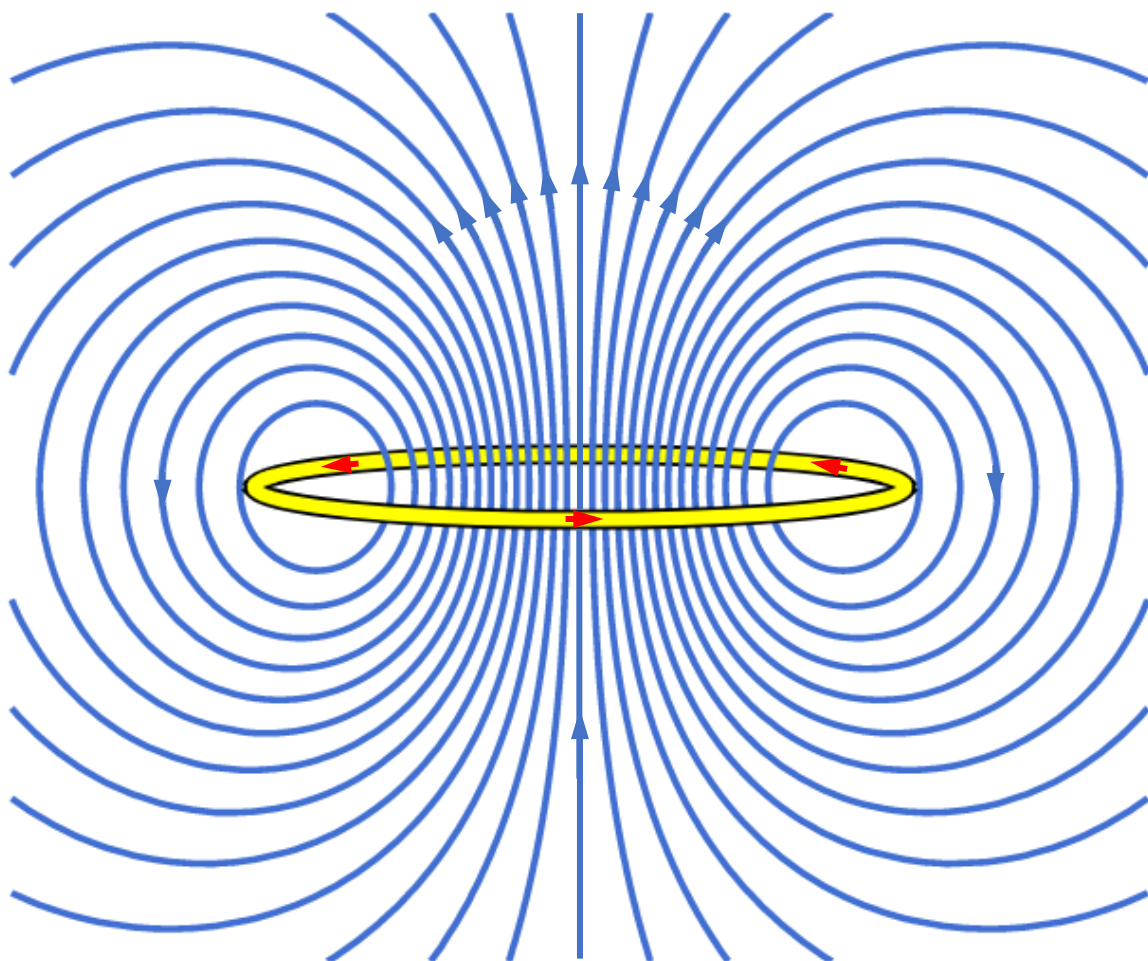
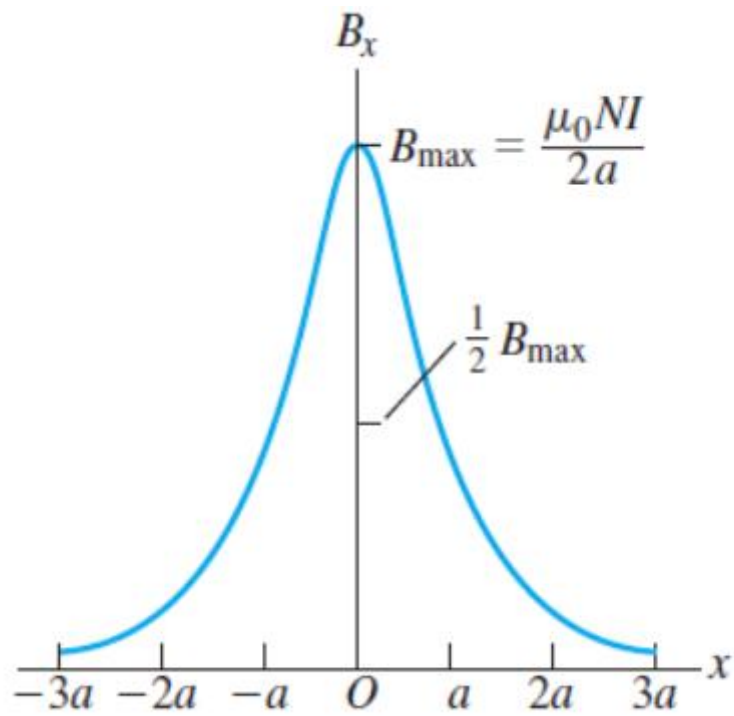
$$B_x = \int dB_x = \int dB \cos \theta = \int_c \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I |d\vec{\ell} \times \hat{r}|}{r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c \frac{d\ell a}{r^2} \frac{a}{r} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3} \int_c d\ell = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3} 2\pi a = \frac{\mu_0 I a^2}{2 r^3}$$



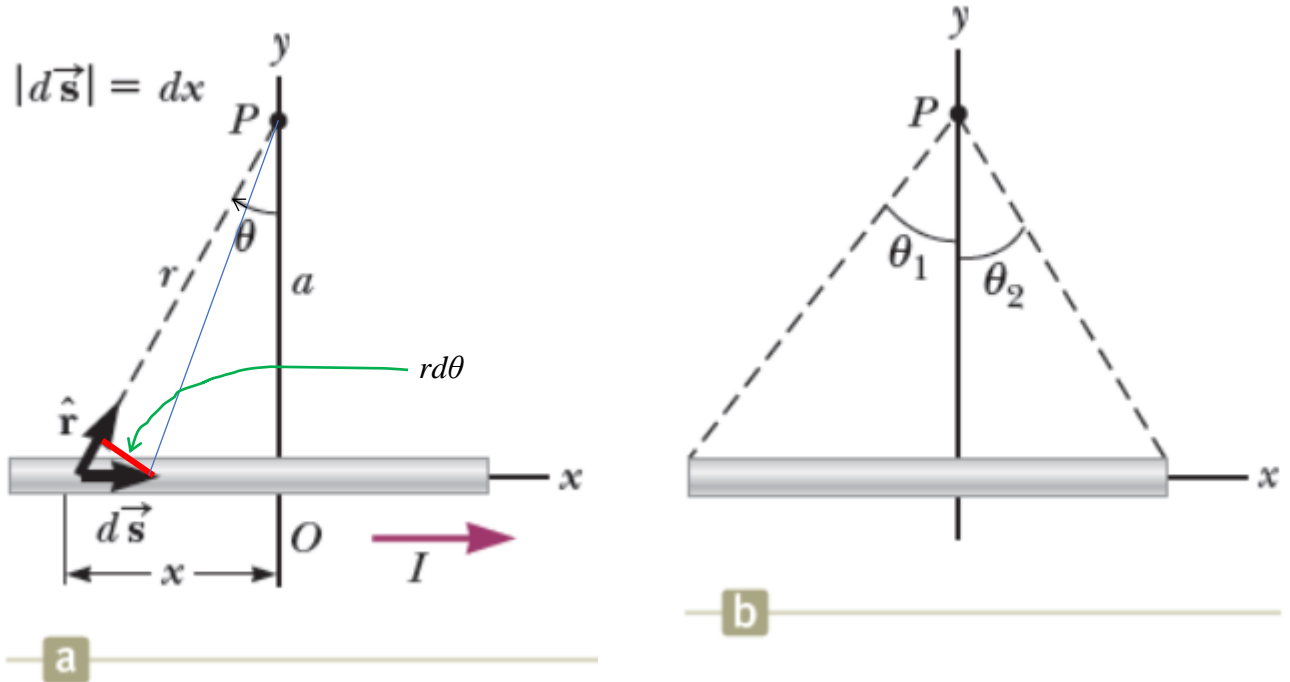
Διπολική ροπή : $\vec{\mu} = I\vec{A} = I\pi a^2 \hat{x}$, Για N σπείρες σφιχτοδεμένες $\vec{\mu} = NI\vec{A} = NI\pi a^2 \hat{x}$

Σε σημεία πολύ μακριά $x \gg a$ και πάνω στον άξονα : $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{r^3}$





Λεπτό Ευθύγραμμο τμήμα (Biot-Savart)



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{s} \times \hat{r}}{4\pi r^2}, \quad |d\vec{s}| = dx, \quad d\vec{s} \times \hat{r} = |d\vec{s} \times \hat{r}| \hat{z} = dx \sin(\pi/2 - \theta) \hat{z} = dx \cos \theta \hat{z}$$

Από το σχήμα :

1) επειδή η γωνία μεταξύ της κάθετης στο r κόκκινης γραμμής και του ds είναι επίσης θ έχουμε

$$dx = -\frac{rd\theta}{\cos \theta} \text{ με το μείον επειδή όταν η } \theta \text{ μεγαλώνει το } x \text{ μεγαλώνει προς τα αρνητικά}$$

2) επίσης $r = \frac{a}{\cos \theta}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I dx \cos \theta}{4\pi r^2} \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{\cos \theta}{a} \right)^2 \left(\frac{-a}{\cos \theta} \frac{d\theta}{\cos \theta} \right) \cos \theta \hat{z} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \theta d\theta \hat{z} \Rightarrow$$

$$\vec{B} = -\hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta \Rightarrow$$

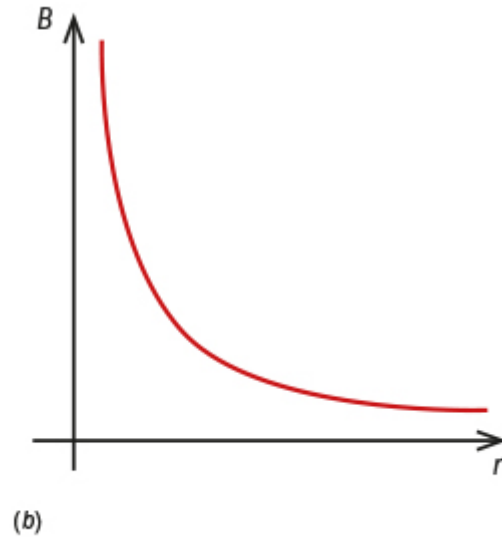
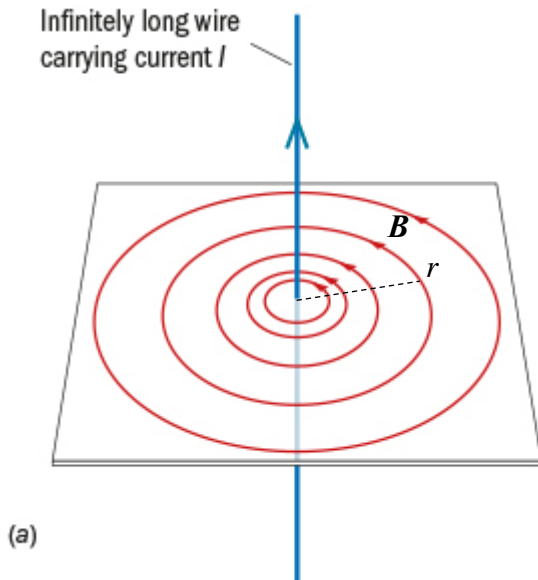
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \hat{z}$$

Λεπτός Ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους (Biot-Savart)

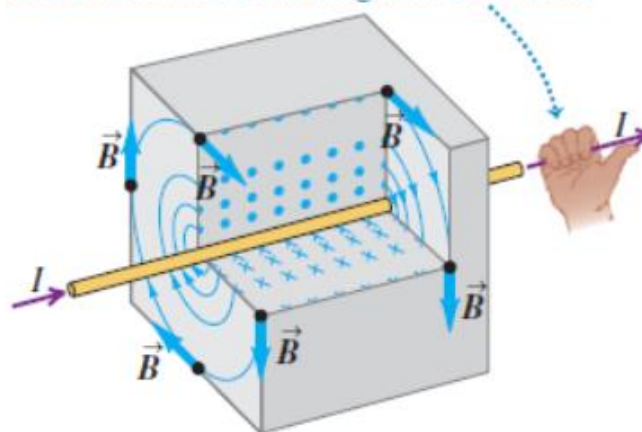
Θέτουμε $\theta_1 = \pi/2$ για $x = -\infty$ και $\theta_2 = -\pi/2$ για $x = +\infty$

Σημείο σε απόσταση r :
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2)) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (1 - (-1)) \Rightarrow$$

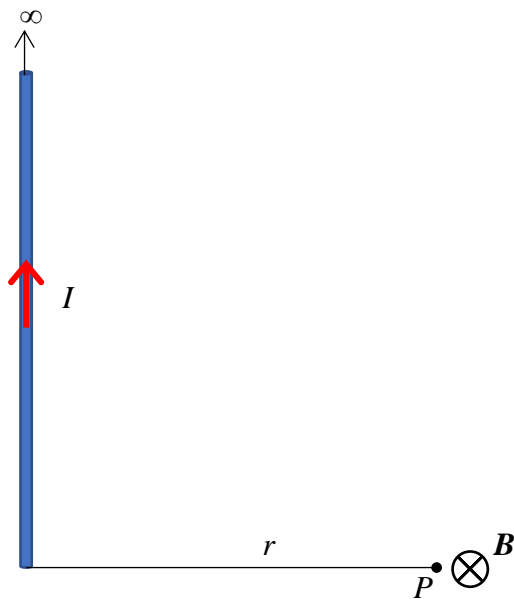
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



Right-hand rule for the magnetic field around a current-carrying wire: Point the thumb of your right hand in the direction of the current. Your fingers now curl around the wire in the direction of the magnetic field lines.



Μισός Λεπτός Ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους



$$B_{\eta\mu\epsilon\upsilon\theta} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi r} = \frac{B_{\epsilon\upsilon\theta}}{2}$$

Σημείο σε απόσταση r στη βάση του αγωγού.

Για ημιευθεία θέτουμε $\theta_1 = \pi/2$ για $x = -\infty$ και $\theta_2 = 0$ για $x = 0$

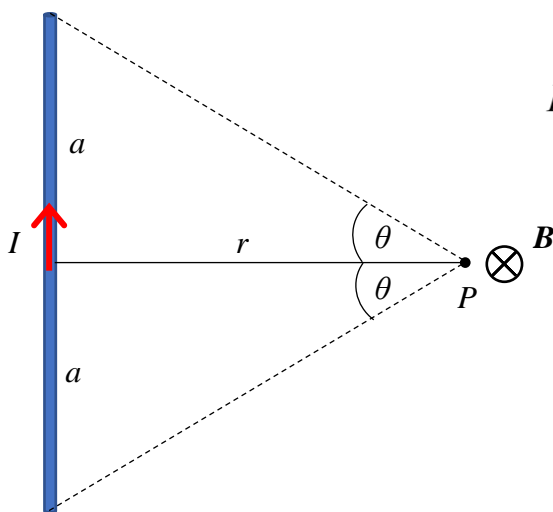
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin(\pi/2) - \sin(0)) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (1 - 0) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}$$

Πεδίο λεπτού ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού πεπερασμένου μήκους πάνω στη μεσοκάθετο

Μήκος αγωγού : $2a$

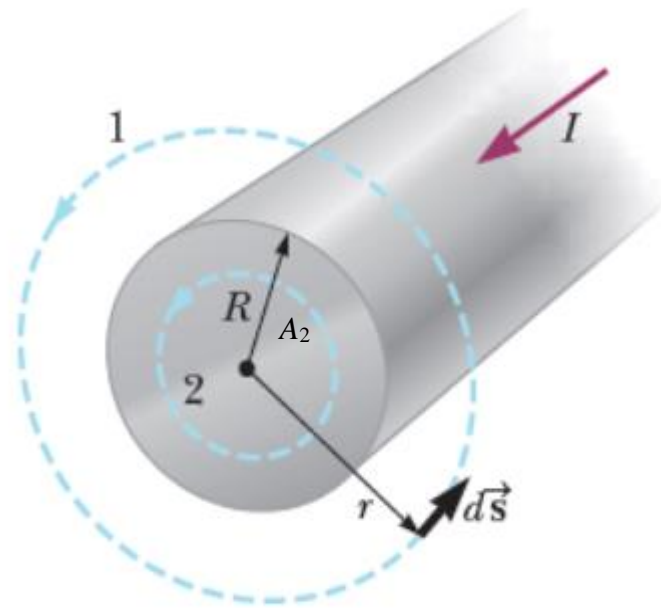
Απόσταση από το κέντρο του αγωγού: r

Θέτουμε $\theta_1 = -\theta_2 = \theta$ με $\sin \theta = \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}}$



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{r\sqrt{r^2 + a^2}}$$

Κυλινδρικός αγωγός ακτίνας R με ομοιόμορφη κατανομή ρεύματος (Ampere)



Από συμμετρία το \vec{B} θα είναι κλειστές κυκλικές γραμμές γύρω από τον άξονα του κυλίνδρου

Πυκνότητα ρεύματος: $J = \frac{I}{A} = \frac{I}{\pi R^2}$

Για $r < R$, κυκλική καμπύλη C_2 περιμέτρου $2\pi r$ και εμβαδού $A_2 = \pi r^2$. Περικλείει μέρος του ρεύματος I .

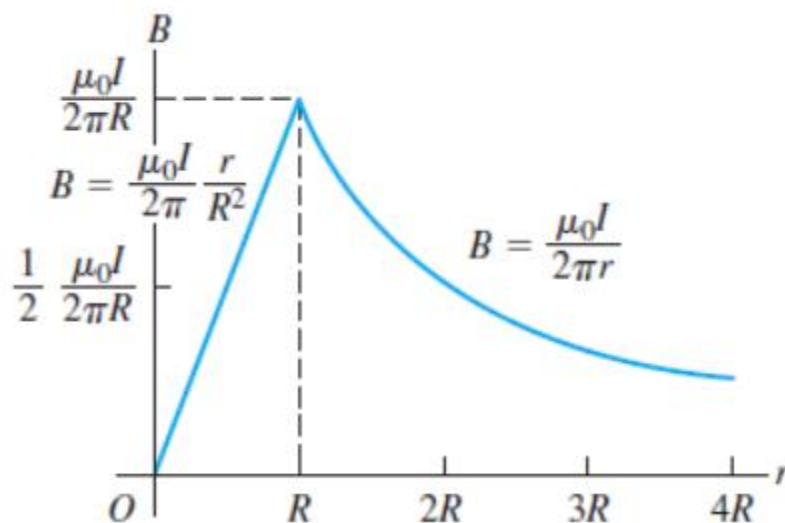
$$\int_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{περικλ}} \Rightarrow \int_{C_2} B d\ell = \mu_0 J A_2 \Rightarrow B \int_{C_2} d\ell = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow$$

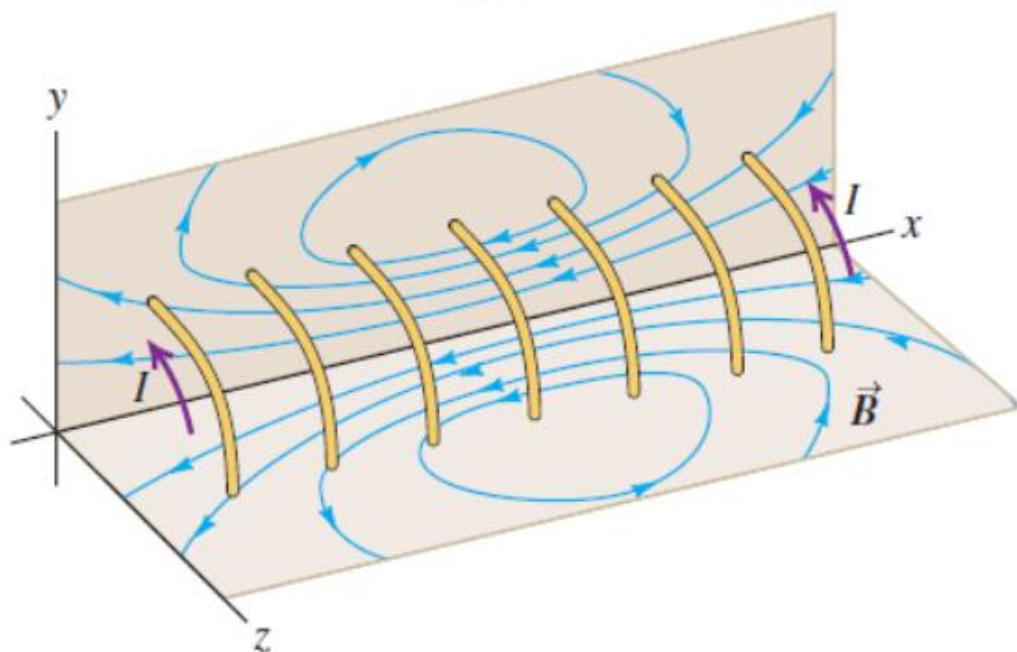
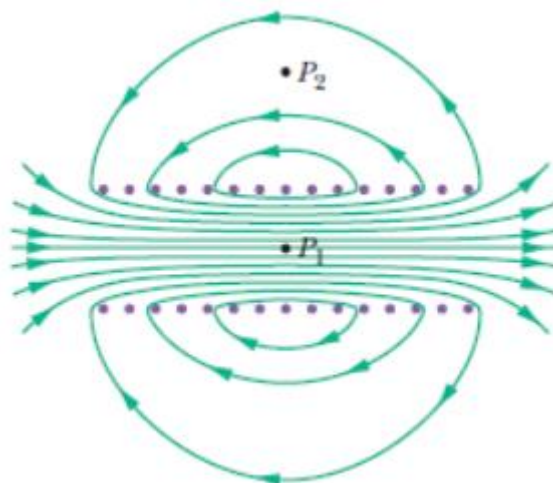
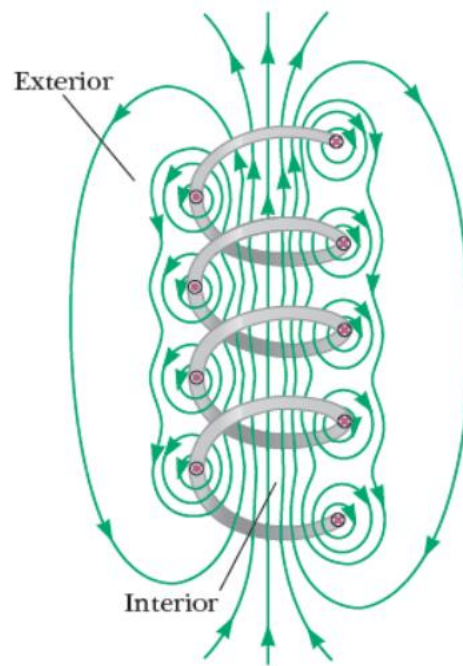
$$B = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \right) r \quad \text{ανάλογο του } r$$

Για $r > R$, κυκλική καμπύλη C_1 περιμέτρου $2\pi r$. Περικλείει όλο το ρεύμα I .

$$\int_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{περικλ}} \Rightarrow \int_{C_1} B d\ell = \mu_0 I \Rightarrow B \int_{C_1} d\ell = \mu_0 I \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow$$

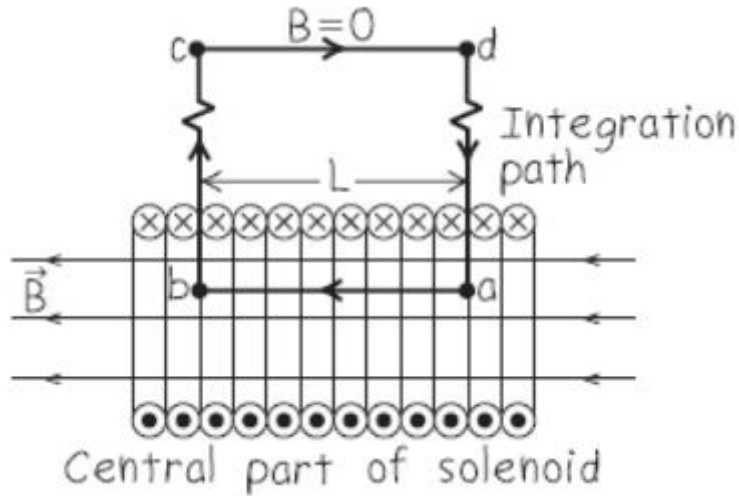
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{ίδιο με του λεπτού αγωγού}$$





Για σφιχτοδεμένο πηνίο με μήκος πολύ μεγαλύτερο από την ακτίνα του θεωρούμε με πολύ καλή προσέγγιση ότι το μαγνητικό πεδίο έξω από το πηνίο σε σημεία (P_2) εκτός άξονα είναι ίσο με μηδέν ενώ μέσα στο πηνίο σε σημεία (P_1) κοντά στο κέντρο του και κοντά στο μέσο του είναι παράλληλο με τον άξονα και έχει σταθερό μέτρο. Αυτό είναι το ιδανικό πηνίο.

Σπείρες ανά μέτρο : $n = \frac{N}{\ell}$



$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \int_a^b ds + 0 + 0 + 0 = BL$$

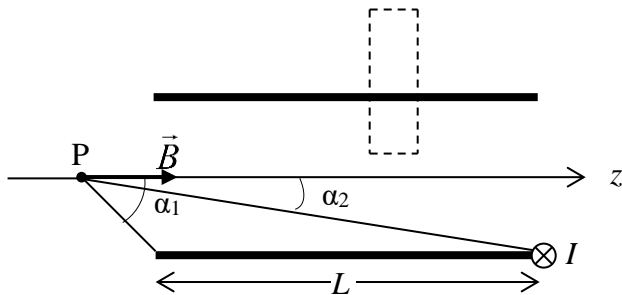
$$\mu_0 I_{\text{περικλ}} = \mu_0 I(nL)$$

$$B = \mu_0 nI$$

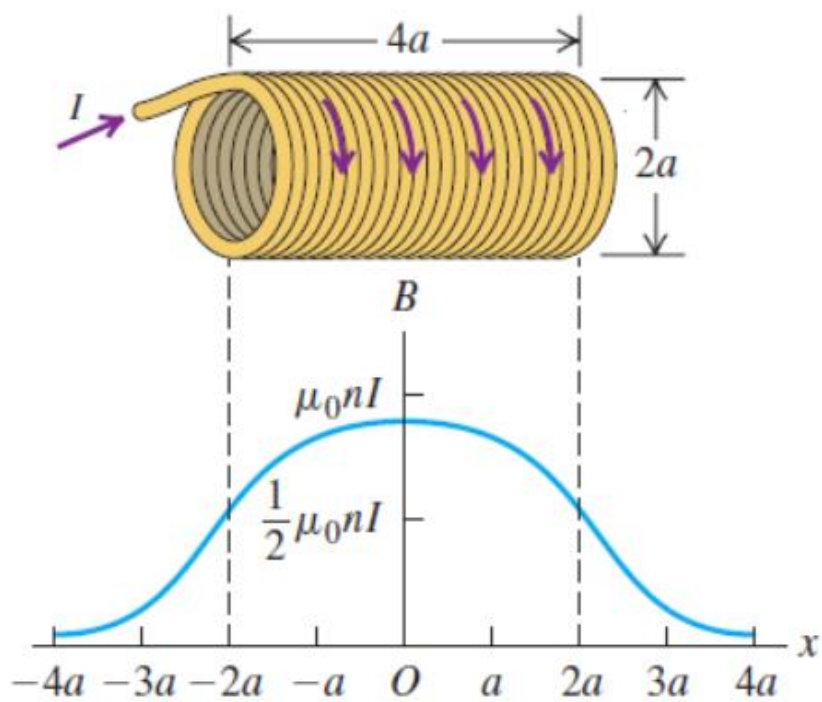
Αν το πηνίο είναι πεπερασμένου μήκους τότε η παραπάνω τιμή για το μαγνητικό πεδίο ισχύει μόνο για τη διατομή στο κέντρο του πηνίου και σε πολύ καλή προσέγγιση για μια μικρή περιοχή κοντά στο κέντρο. Για τα υπόλοιπα σημεία του άξονά του το πεδίο μειώνεται καθώς προχωράμε προς τα άκρα του. Αν το σωληνοειδές είναι πολύ μακρύ σε σχέση με τη διάμετρό του το πεδίο στα άκρα του είναι ακριβώς το μισό από όσο είναι στο κέντρο :

$$B_{\text{άκρα}} = \frac{1}{2} \mu_0 nI$$

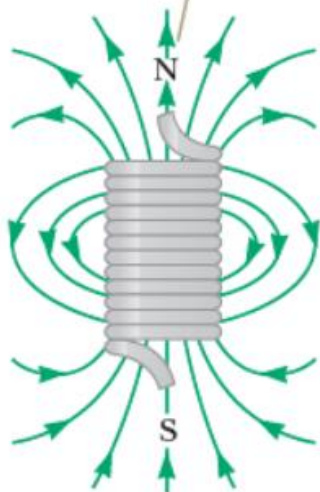
Επίσης από το σύνολο των γραμμών του πεδίου που διαπερνούν την διατομή του στο κέντρο οι μισές βγαίνουν από τα άκρα του ενώ οι άλλες μισές «διαρρέουν» έξω μέσω των σπειρών δια μήκους του πηνίου. Σε τυχαίο σημείο του άξονα του πηνίου το πεδίο είναι (από επαλληλία δακτυλίων):



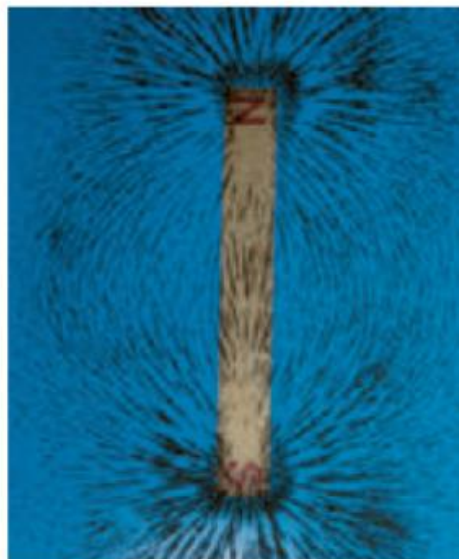
$$B = \frac{\mu_0 IN}{2L} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \hat{z}$$



The magnetic field lines resemble those of a bar magnet, meaning that the solenoid effectively has north and south poles.



a



b

Δύναμη Laplace. Έτσι ονομάζεται η δύναμη που ασκείται σε ένα ρευματοφόρο αγωγό που βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Για ομογενές \vec{B} : $\vec{F} = I \left(\int_A^B d\vec{\ell} \right) \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = I \vec{\ell}_{AB} \times \vec{B}$

Όπου $\vec{\ell}_{AB}$ είναι το διάνυσμα από την αρχή ως το τέλος του αγωγού άσχετα με το ενδιαμέσο σχήμα του.

Αν ο αγωγός είναι κλειστός τότε η συνολική δύναμη από ομογενές μαγνητικό πεδίο θα είναι μηδέν αφού $\vec{\ell}_{AA} = 0$. Παρόλο που η συνισταμένη των μαγνητικών δυνάμεων είναι μηδέν ο αγωγός δέχεται τάσεις καθώς οι δυνάμεις σε κάθε τμήμα του τείνουν να τον συρρικνώσουν.

Αν ο αγωγός είναι ευθύγραμμος τότε $\vec{F} = I \vec{\ell} \times \vec{B}$.

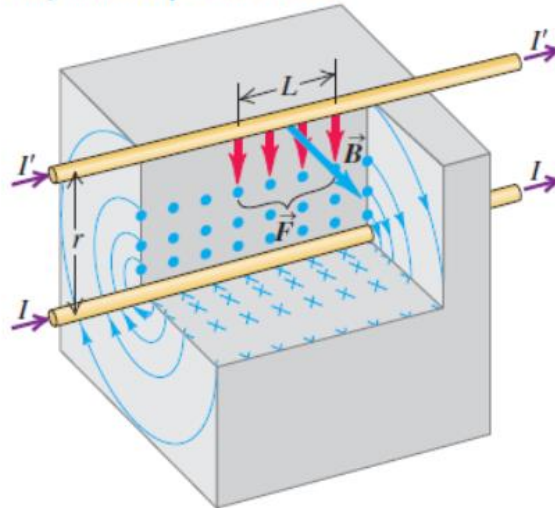
Δύναμη μεταξύ ευθύγραμμων παράλληλων αγωγών

Η δύναμη είναι ελκτική αν τα ρεύματα είναι ομόρροπα και απωστική αν είναι αντίρροπα. Το μέτρο της ανά μονάδα μήκους L είναι:

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r}$$

The magnetic field of the lower wire exerts an attractive force on the upper wire. By the same token, the upper wire attracts the lower one.

If the wires had currents in opposite directions, they would repel each other.



Ροπή σε Μαγνητικό δίπολο

Ένας επίπεδος κλειστός ρευματοφόρος βρόχος μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο δεν θα δεχτεί δύναμη αλλά μόνο ροπή η οποία θα τείνει να τον προσανατολίσει με τις γραμμές του πεδίου. Η ροπή αυτή υπολογίζεται από τον τύπο της δύναμης Laplace και είναι ίση με :

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B},$$

όπου το μέγεθος $\vec{\mu} = I\vec{A}$ ονομάζεται μαγνητική ροπή.

Η ενέργεια του δίπολου θα είναι ελάχιστη όταν η μαγνητική του ροπή θα είναι προσανατολισμένη με το μαγνητικό πεδίο. Η δυναμική του ενέργεια δίνεται από τον τύπο $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

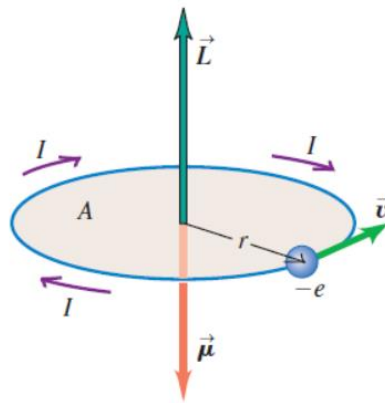
Μέσα σε μη ομογενές μαγνητικό πεδίο στο δίπολο θα ασκηθεί και ροπή αλλά και δύναμη. Το δίπολο θα προσανατολιστεί με το πεδίο και θα ελκυσθεί προς την περιοχή που η ένταση του πεδίο μεγαλώνει. αραιώνουν.

Μαγνητική ροπή φορτισμένου σωματιδίου σε ομαλή κυκλική κίνηση :

Ένα σωματίδιο φορτίου q , που εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας R , με σταθερή ταχύτητα v θα έχει περίοδο $T = 2\pi R/v$. Αυτό ισοδυναμεί με ρευματοφόρο δακτύλιο ρεύματος $I = q/T$, οπότε η μαγνητική ροπή που δημιουργεί θα είναι :

$$\mu = IA = \frac{q}{T} \pi R^2 = \frac{qv}{2\pi R} \pi R^2 = \frac{q}{2m} m\omega R \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{q}{2m} L}$$

όπου $L = m\omega R$ η στροφορμή του σωματιδίου. Στο ατομικό πρότυπο του Bohr τα ηλεκτρόνια κινούνται σε κυκλικές τροχιές γύρω από τον πυρήνα και η στροφορμή τους είναι κβαντισμένη, δηλαδή εμφανίζεται μόνο ως ακέραιο πολλαπλάσιο του $\hbar \equiv h/2\pi = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$: $L = n\hbar$. Έτσι η ποσότητα $\mu_B = \frac{e}{2m_e} \hbar$ που ονομάζεται μαγνητόνη του Bohr, θα αποτελεί τη θεμελιώδη μονάδα της μαγνητικής ροπής και είναι ίση με $\mu_B = 9,274 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$ ή J/T . Τα περισσότερα άτομα είναι μαγνητάκια και οι μαγνητικές ροπές τους είναι αυτής της τάξης μεγέθους.



Δύναμη Lorentz : Η συνολική δύναμη που ασκείται σε ένα φορτισμένο σωματίδιο από ένα ηλεκτρικό και ένα μαγνητικό πεδίο ονομάζεται δύναμη Lorentz και είναι το άθροισμα της ηλεκτρικής $\vec{F}_E = q\vec{E}$ και της μαγνητικής δύναμης $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

όπου \vec{E}, \vec{B} το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο στη θέση που βρίσκεται το σωματίδιο, το οποίο έχει φορτίο q και ταχύτητα \vec{v} .

Κίνηση σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

Η επιτάχυνση είναι: $\vec{F}_E = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} = \text{σταθ}$

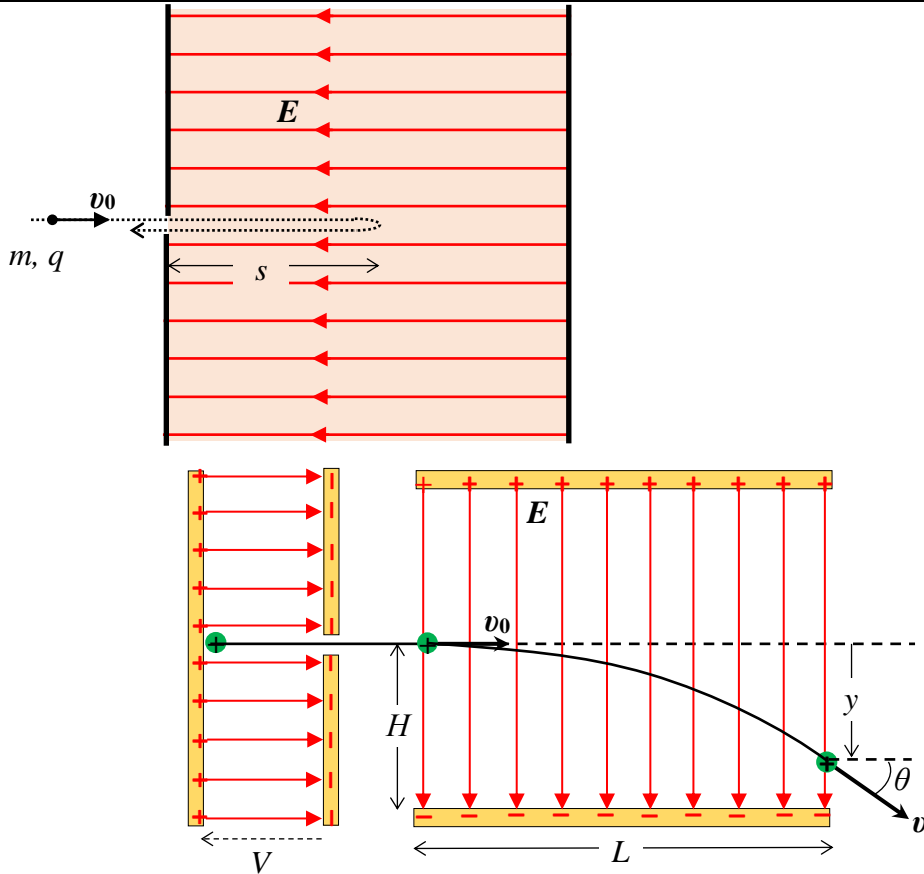
Άρα η ταχύτητα του σωματιδίου θα δίνεται από $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$

Αν το σωματίδιο ξεκινάει από την ηρεμία ή έχει ταχύτητα στη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου τότε:

Εξισώσεις κίνησης : $v = v_0 \pm at, x = v_0t \pm \frac{1}{2} at^2$

Διατήρηση ενέργειας : $\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv_0^2 + qV$

$V = V_{αρχ} - V_{τελ}$



Αν το σωματίδιο έχει και συνιστώσα κάθετη τη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου (έστω y) τότε κάνει πλάγια βολή

Εξισώσεις κίνησης :

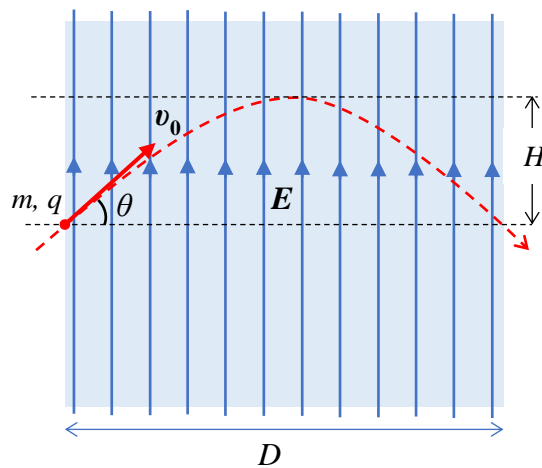
$$v_x = v_{x0} = \sigma \alpha \theta, \quad v_y = v_{y0} \pm at$$

$$x = v_{x0}t, \quad y = v_{y0}t \pm \frac{1}{2}at^2$$

Διατήρηση ενέργειας :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + qV$$

$$V = V_{αρχ} - V_{τελ}$$



Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό πεδίο

Η μαγνητική δύναμη όντας πάντα κάθετη στην ταχύτητα δεν παράγει έργο πάνω σε ένα φορτισμένο σωματίδιο. Μπορεί να αλλάξει μόνο την διεύθυνση της ταχύτητάς του χωρίς να αλλάξει το μέτρο της. Φορτισμένο σωματίδιο που εισέρχεται σε μαγνητικό πεδίο \vec{B} θα ακολουθήσει τροχιά που θα κυκλώνει τις γραμμές του μαγνητικού πεδίου.

Σε ομογενές μαγνητικό πεδίο θα έχουμε :

1) αν η ταχύτητά του είναι κάθετη στις γραμμές του μαγνητικού πεδίου ($v_{\perp} = v \neq 0, v_{\parallel} = 0$) τότε θα εκτελέσει κυκλική κίνηση με τη μαγνητική δύναμη να παίζει το ρόλο της κεντρομόλου :

$$\vec{F}_B = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B} = \vec{\omega} \times \vec{v} \text{ με } \vec{\omega} = -\frac{q}{m} \vec{B}$$

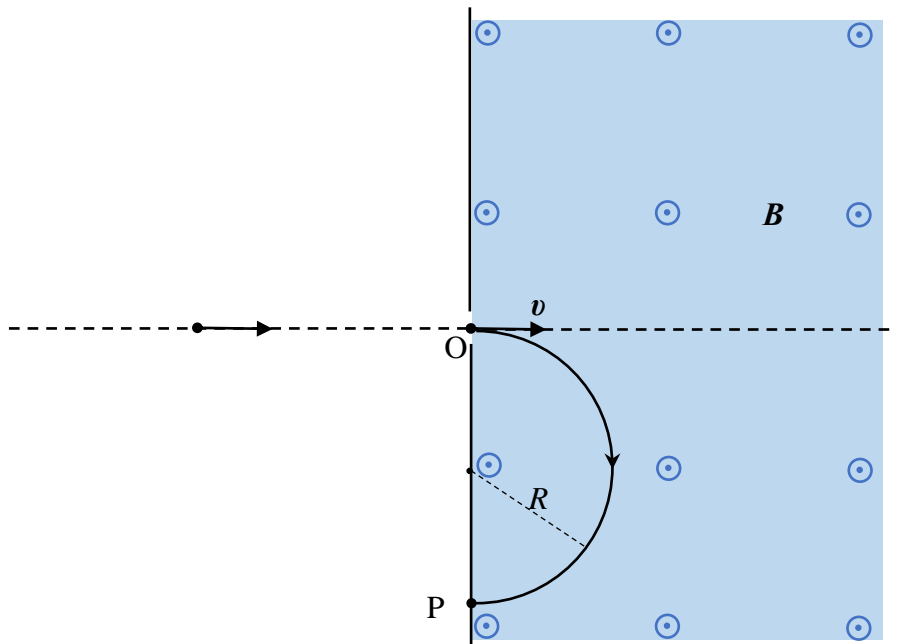
Όμως ξέρουμε ότι η έκφραση $\vec{\omega} \times \vec{v}$ είναι κεντρομόλος επιτάχυνση $\vec{a}_n \equiv \vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v}$ και αφού το \vec{B} είναι σταθερό το σωματίδιο θα κάνει ομαλή κυκλική κίνηση. Στην ακτινική διεύθυνση έχουμε

$$F_B = ma_c \Rightarrow qvB = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB}}$$

Η μέτρηση της ακτίνας της τροχιάς αποτελεί πειραματική μέθοδο μέτρησης της ορμής του σωματιδίου.

Η συχνότητα της περιστροφής προκύπτει ανεξάρτητη της ακτίνας και της ταχύτητας:

$$R = \frac{mv}{qB} \Rightarrow \frac{v}{R} = \frac{qB}{m} \Rightarrow \omega = \frac{qB}{m} \text{ και } f = \frac{qB}{2\pi m}$$



2) αν το σωματίδιο έχει ταχύτητα που σχηματίζει γωνία θ με τις γραμμές του μαγνητικού πεδίου:

$$v_{\perp} = v \sin \theta, \quad v_{\parallel} = v \cos \theta$$

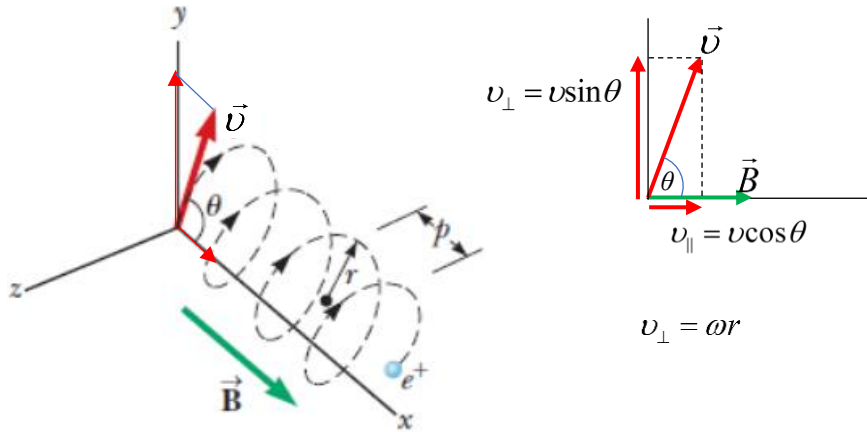
τότε εκτελεί σπειροειδή (ελικοειδή) τροχιά γύρω από τις γραμμές του πεδίου.

Η ακτίνα της σπείρας εξαρτάται από το μέτρο της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας: $R = \frac{mv_{\perp}}{qB}$

Η συχνότητα της περιστροφής είναι πάλι $f = \frac{qB}{2\pi m}$ ενώ η περιστροφή διαρκεί $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi m}{qB}$.

Το βήμα της έλικας (pitch) εξαρτάται από την παράλληλη συνιστώσα της ταχύτητας και είναι

$$p = v_{\parallel} T \Rightarrow p = 2\pi \frac{mv \cos \theta}{qB} \quad (\text{εδώ το } p \text{ δεν είναι η ορμή})$$



3) αν το σωματίδιο έχει ταχύτητα παράλληλη στις γραμμές του μαγνητικού πεδίου τότε δεν επηρεάζεται καθόλου από το μαγνητικό πεδίο επειδή η μαγνητική δύναμη είναι ίση με μηδέν $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} = 0$.

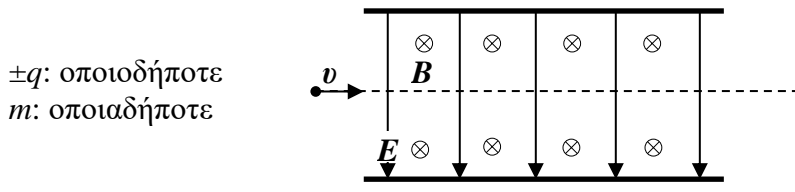
Επιλογέας ταχυτήτων

Το σωματίδιο θα περάσει ανεπηρέαστο μέσα από ένα χώρο με διασταυρούμενα ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο και ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο αν η ταχύτητά του είναι τέτοια ώστε οι δύο δυνάμεις να αλληλοαναιρούνται :

$$F_e = F_m \Rightarrow qE = qvB \Rightarrow \boxed{v = \frac{E}{B}}$$

Αυτό δεν επηρεάζεται από το φορτίο ή τη μάζα του σωματιδίου (εφόσον το βάρος είναι αμελητέο). Κάθε σωματίδιο με αυτήν την ταχύτητα ανεξαρτήτως μάζας και φορτίου θα περάσει ευθεία μέσα από τα δύο πεδία χωρίς να παρεκκλίνει.

Αν το σωματίδιο κάνει την αντίστροφη πορεία (-v) τότε, δεν θα περάσει ευθεία αλλά θα αποκλίνει γιατί η ηλεκτρική δύναμη θα παραμείνει ίδια αλλά η μαγνητική θα αλλάξει φορά.



Προσδιορισμός του λόγου e/m_e με το πείραμα του Thomson

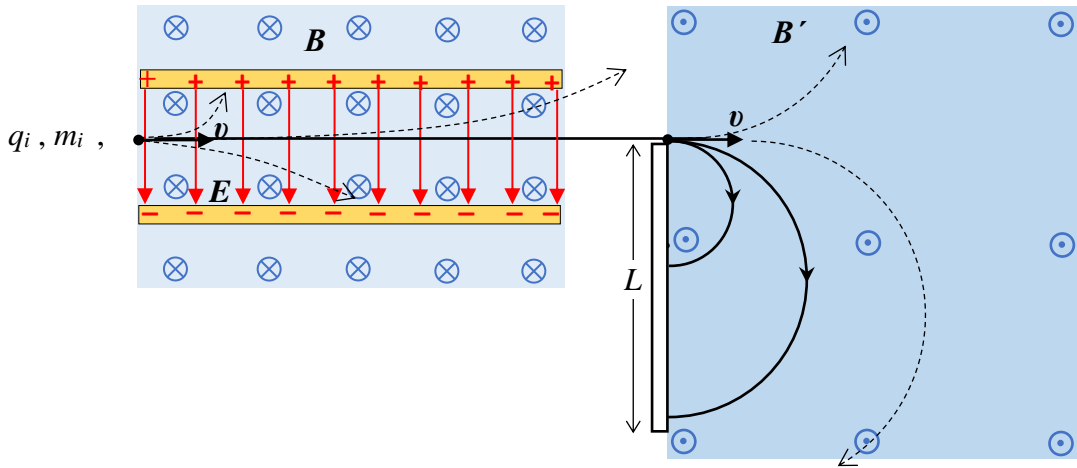
Αν ηλεκτρόνια (ή κάθε είδους φορτισμένα σωματίδια) έχουν επιταχυνθεί μέσω ηλεκτροστατικού δυναμικού V (άρα ξέρουμε την ταχύτητά τους) και στη συνέχεια οδηγηθούν μέσα από επιλογέα ταχυτήτων E/B ώστε να περάσουν χωρίς απόκλιση, τότε μπορεί να καθοριστεί ο λόγος e/m_e του φορτίου προς τη μάζα τους (q/m) :

$$eV = \frac{1}{2} m_e v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{2eV}{m_e} \Rightarrow \frac{E^2}{B^2} = 2V \frac{e}{m_e} \Rightarrow \boxed{\frac{e}{m_e} = \frac{E^2}{2VB^2}}$$

Φασματογράφος μάζας

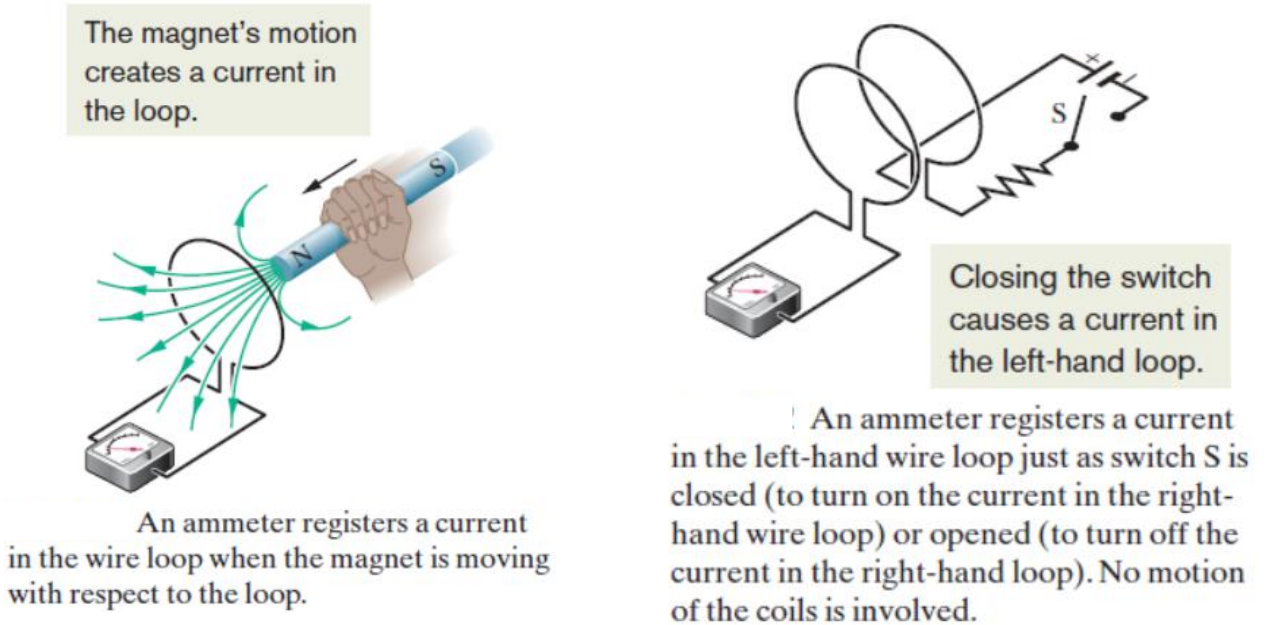
Γνωρίζοντας το φορτίο ενός ιόντος μπορούμε να προσδιορίσουμε τη μάζα του μέσω της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς που εκτελεί σε μαγνητικό πεδίο B' κάθετο στην ταχύτητά του, αν πρώτα έχει περάσει από επιλογέα ταχυτήτων E/B ώστε να είναι γνωστή η ταχύτητά του

$$R = \frac{mv}{qB'} = \frac{m}{qB'} \frac{E}{B} \Rightarrow \boxed{m = \frac{BB'}{E} qR}$$



ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Νόμος Faraday



Όταν η μαγνητική ροή μέσα από κλειστό αγωγικό βρόχο μεταβάλλεται, τότε εμφανίζεται στο βρόχο ηλεκτρεγερτική δύναμη (είναι σαν να συνδέσαμε το βρόχο με μπαταρία)

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

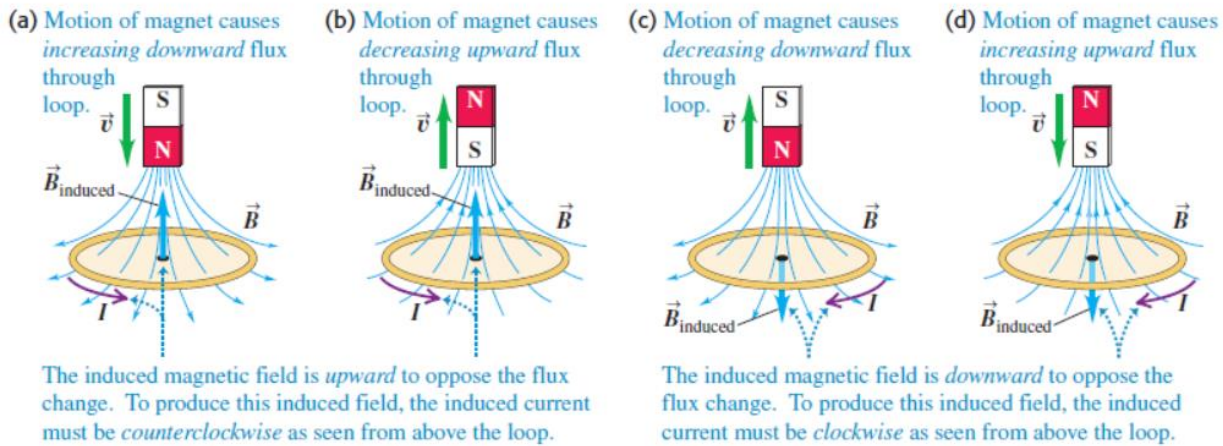
Διαφορά δυναμικού είναι το έργο ηλεκτρικού πεδίου: $\mathcal{E} = \int_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Stokes: $\int_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A}$

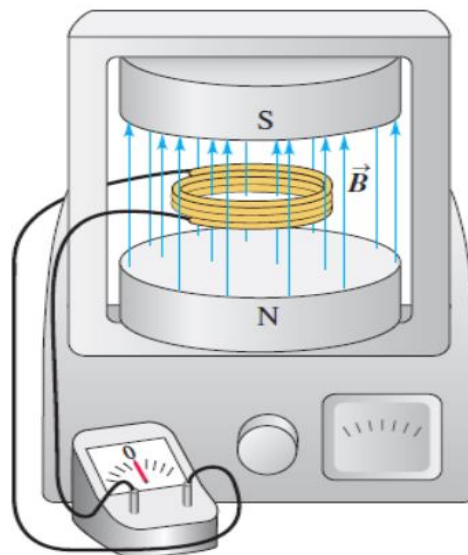
Μαγνητική ροή : $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$

3^η εξίσωση Maxwell : $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$

Νόμος Lenz : Το επαγωγικό αποτέλεσμα τείνει να αναιρέσει την αιτία που το προκάλεσε



A coil in a magnetic field. When the \vec{B} field is constant and the shape, location, and orientation of the coil do not change, no current is induced in the coil. A current is induced when any of these factors change.

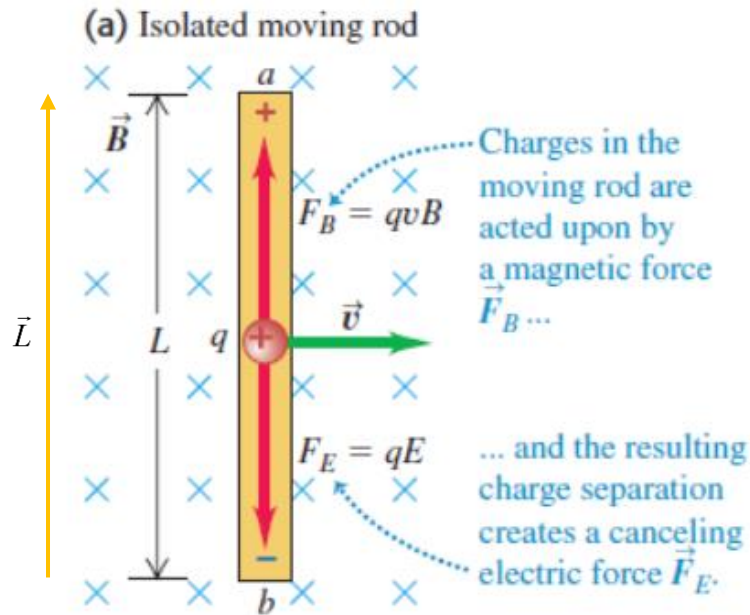


Τρόποι δημιουργίας επαγωγικής τάσης

$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B(\vec{r}, t)A \cos \varphi$

- 1) Να μεταβάλλεται το μαγνητικό πεδίο χρονικά ($\partial \vec{B} / \partial t \neq 0$)
- 2) Το πεδίο να μην είναι ομογενές και ο βρόχος να κινείται. Αλλάζοντας θέση, βρίσκεται σε περιοχή που το πεδίο έχει διαφορετική τιμή και άρα η ροή θα αλλάξει ($\partial \vec{B} / \partial x \neq 0$ κλπ.)
- 3) Να αλλάζει το σχήμα ώστε να μεταβάλλεται το εμβαδόν του βρόχου (A)
- 4) Να αλλάζει ο προσανατολισμός του βρόχου ως προς το πεδίο (η γωνία φ μεταξύ τους)

Επαγωγική τάση από κίνηση



$$F_E = F_B \Rightarrow qE = qvB$$

$$V_{ab} = V_a - V_b = EL$$

$$V_{ab} = BvL$$

Μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι διανυσματικά η σχέση αυτή γράφεται : $V_{ab} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{L}$

Αν η ταχύτητα v της ράβδου είναι παράλληλη με το B δηλαδή δεν «κόβει» δυναμικές γραμμές όπως κινείται τότε δεν δημιουργείται επαγωγική τάση. Αν σχηματίζει γωνία θ με τις δυναμικές γραμμές του B τότε επειδή $F_B = qvB \sin \theta$ θα δημιουργείται επαγωγική τάση ίση με: $V_{ab} = BvL \sin \theta$

Το \vec{L} , το ορίζουμε τυχαία.

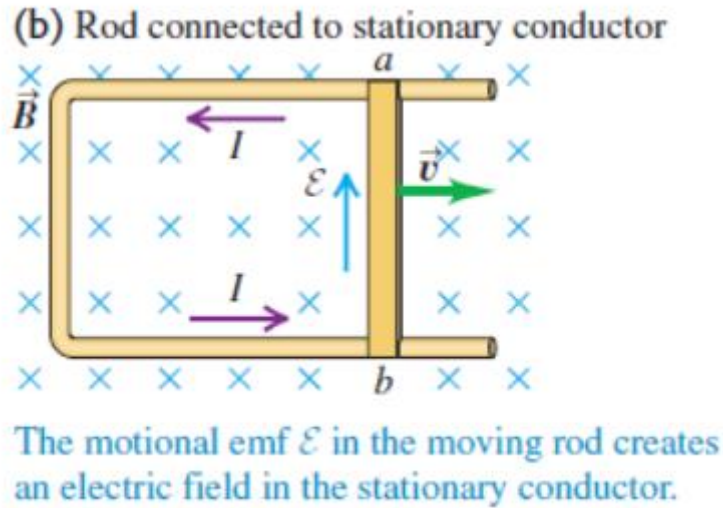
Αν η επαγωγική τάση βγει θετική τότε το \vec{L} δείχνει από τον αρνητικό πόλο προς τον θετικό πόλο ($- \rightarrow +$) όπως στο παραπάνω σχήμα.

Αν η επαγωγική τάση βγει αρνητική τότε το \vec{L} δείχνει από τον θετικό πόλο προς τον αρνητικό πόλο ($+ \rightarrow -$)

Η γενίκευση για μη ευθύγραμμη ράβδο είναι : $d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$

$$\text{και } \mathcal{E} = \int_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

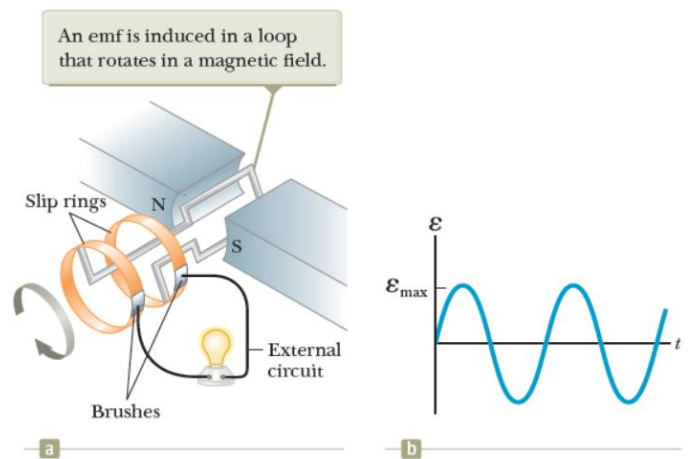
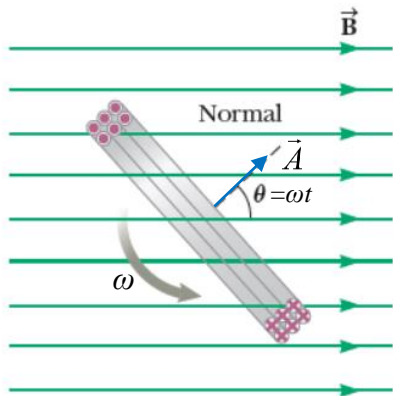
Η κινούμενη ράβδος γίνεται πηγή (μπαταρία) με ΗΕΔ V_{ab} και αν συνδεθεί με αγωγούς θα προκαλέσει ηλεκτρικό ρεύμα στο κύκλωμα. Μέσα στη ράβδο τα θετικά ηλεκτρικά φορτία κινούνται από το χαμηλότερο δυναμικό στο σημείο b στο υψηλότερο δυναμικό στο σημείο a .



Το ίδιο παίρνουμε και από : $\left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{d}{dt}(BLx) = BL \frac{dx}{dt} = BvL$

Ηλεκτρική γεννήτρια εναλλασσόμενου ρεύματος

Ο πιο εύκολος τρόπος να παράγουμε επαγωγική τάση είναι να περιστρέφουμε ένα πλαίσιο μέσα σε ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο B . Το πλαίσιο έχει εμβαδόν A και αποτελείται από N (σπείρες) τυλίγματα. Περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω . Θεωρούμε ως χρονική στιγμή $t=0$ όταν το πλαίσιο είναι κάθετο στο μαγνητικό πεδίο και διαρρέεται από τη μέγιστη μαγνητική ροή.



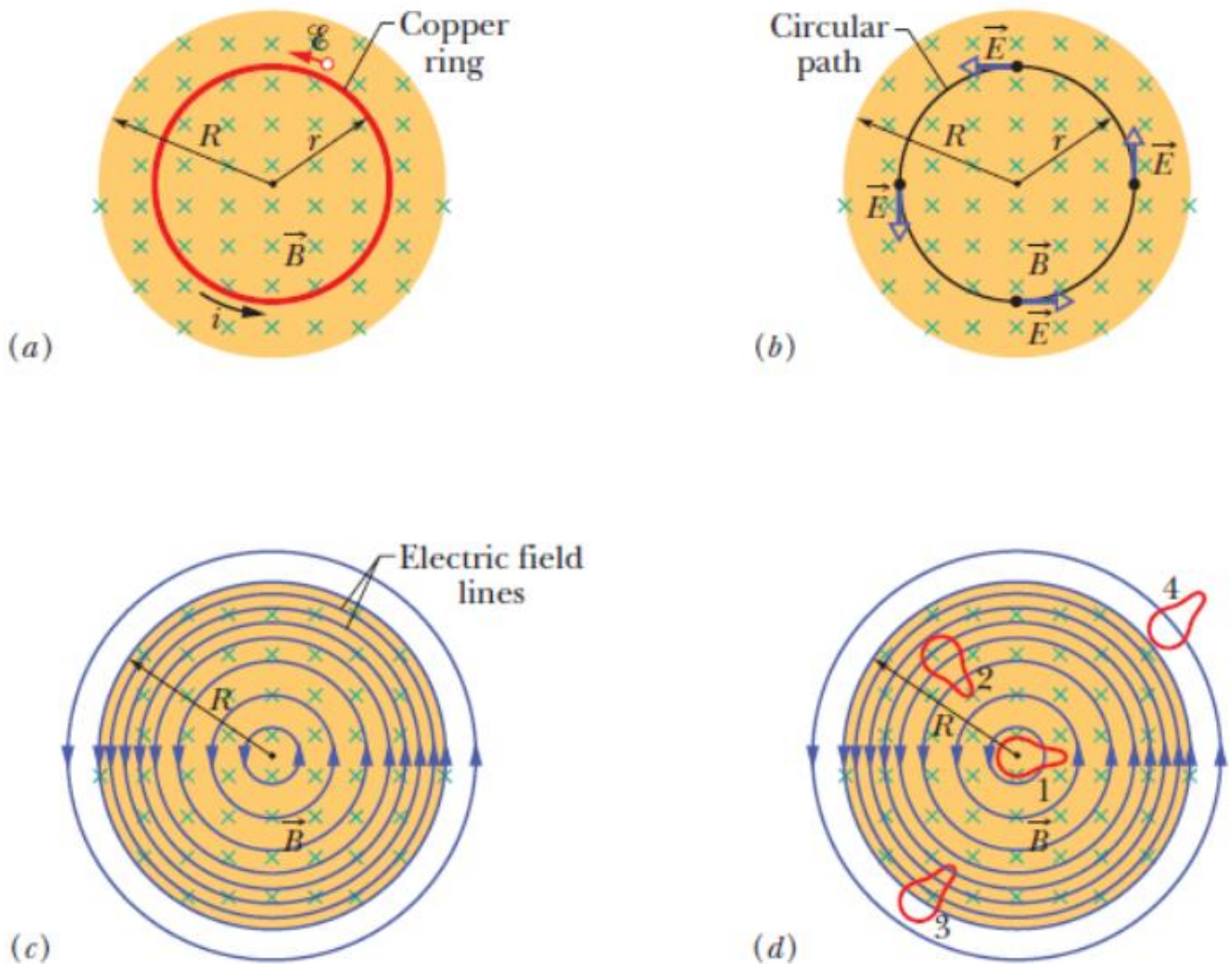
$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = BNA \cos \theta = BNA \cos \omega t$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -BNA \frac{d \cos \omega t}{dt} = BNA \omega \sin \omega t \Rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega t$$

Στις ψήκτρες (brushes) του σχήματος παίρνουμε ημιτονοειδή τάση, αρά μεταβαλλόμενης πολικότητας, που ονομάζεται εναλλασσόμενη τάση. Το πλάτος της είναι : $\mathcal{E}_{\max} = BNA\omega$

Δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου από χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο.

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι εκεί ακόμα και αν δεν υπάρξει αγωγός στον οποίο να προκαλέσει ρεύμα. Το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται (επάγεται) στο χώρο από το μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο σύμφωνα με τον νόμο του Faraday.



$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \int_c E ds = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E \int_c ds = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E 2\pi r = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt} \cdot \frac{1}{r}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο το πήραμε όπως στο σχήμα εφαπτόμενο στον κύκλο (από συμμετρία) με φορά ανθρωπολογιακή και θα πάρουμε την επιφάνεια του κυκλικού δίσκου να δείχνει προς τα έξω αντίθετα από το μαγνητικό πεδίο. Άρα ηλεκτρικό πεδίο και φορά επιφάνειας συνδέονται με τον κανόνα του δεξιού χεριού (δάχτυλα=πεδίο, αντίχειρας=επιφάνεια)

Για $r < R$ η ροή εξαρτάται από την απόσταση r . Έχουμε $\Phi(r) = -B \cdot 4\pi r^2$ για το τμήμα της συνολικής ροής που περνάει από τον κυκλικό δίσκο με ακτίνα r μικρότερης του R και άρα

$$\frac{d\Phi(r)}{dt} = \frac{d}{dt}(-B4\pi r^2) = -4\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

Οπότε μέσα στο χώρο του μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο είναι ανάλογο με την απόσταση δηλαδή με δυναμικές γραμμές που πυκνώνουν προς τα έξω

$$E = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} 4\pi r^2 \frac{dB}{dt} = \left(2 \frac{dB}{dt} \right) \cdot r$$

και στη φορά που το πήραμε ικανοποιεί το νόμο του Lenz. Αν το μαγνητικό πεδίο αυξάνεται το ηλεκτρικό πεδίο έχει τη φορά του σχήματος ώστε να δημιουργήσει ηλεκτρικό ρεύμα που θα μειώσει το μαγνητικό πεδίο

Για οποιοδήποτε $r > R$, περικλείουμε τη μαγνητική ροή όλου του δίσκου που καταλαμβάνει το μαγνητικό πεδίο $\Phi \equiv \Phi(R) = -B \cdot 4\pi R^2$ οπότε η

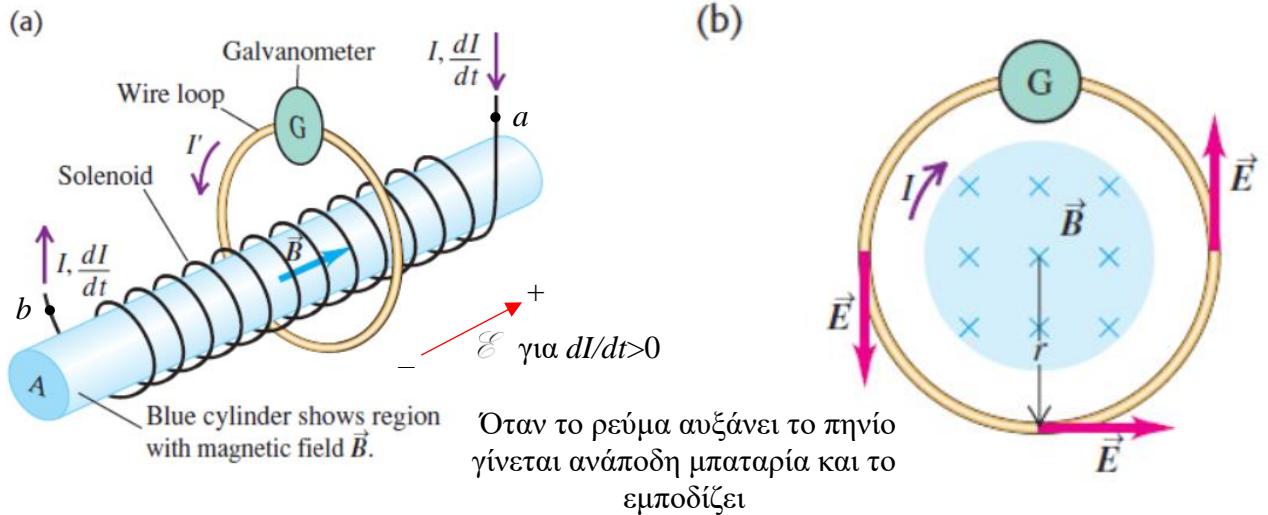
$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(-B4\pi R^2) = -4\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

δεν εξαρτάται από το r

Τότε το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με την απόσταση r από το κέντρο

$$E = \frac{1}{2\pi r} 4\pi R^2 \frac{dB}{dt} = \left(2R^2 \frac{dB}{dt} \right) \cdot \frac{1}{r}$$

Αυτεπαγωγή πηνίου



$$\Phi = BA = \mu_0 nIA$$

$$V_b - V_a = \Delta V_{ab} \equiv \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 nA \frac{dI}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \equiv \text{δείχνει ανάποδα από τη μεταβολή του ρεύματος}$$

$$\text{Η πτώση τάσης είναι : } V_{ab} = V_a - V_b = -\mathcal{E}$$

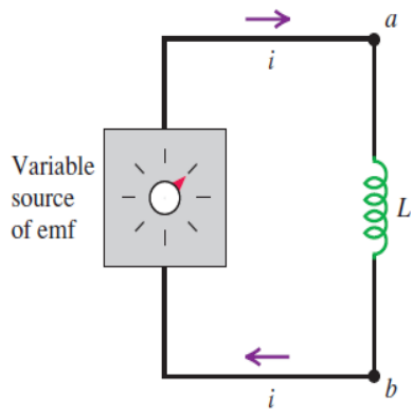
Η σταθερά L ονομάζεται συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου και μετριέται σε χένρι (H):

$$H = \frac{V \cdot s}{A}$$

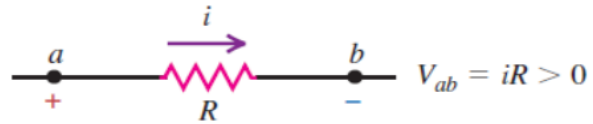
SOS Άσκηση: Δείξτε ότι οι μονάδες της μαγνητικής σταθεράς μ_0 είναι H/m

Άρα σε ένα πηνίο που βρίσκεται μέσα σε ένα κύκλωμα η πτώση τάσης στα άκρα του (που ορίζεται ως το δυναμικό στο σημείο που μπαίνει το ρεύμα μείον το δυναμικό στο σημείο που βγαίνει το ρεύμα) θα δίνεται από τον τύπο :

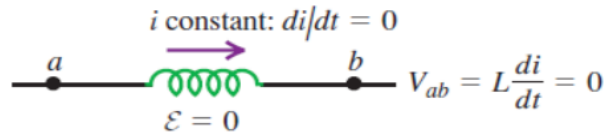
$$V_{ab} = L \frac{dI}{dt}$$



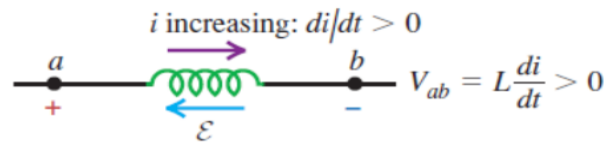
(a) Resistor with current i flowing from a to b : potential drops from a to b .



(b) Inductor with *constant* current i flowing from a to b : no potential difference.



(c) Inductor with *increasing* current i flowing from a to b : potential drops from a to b .



(d) Inductor with *decreasing* current i flowing from a to b : potential increases from a to b .

