ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΥ

Το μαγνητικό πεδίο

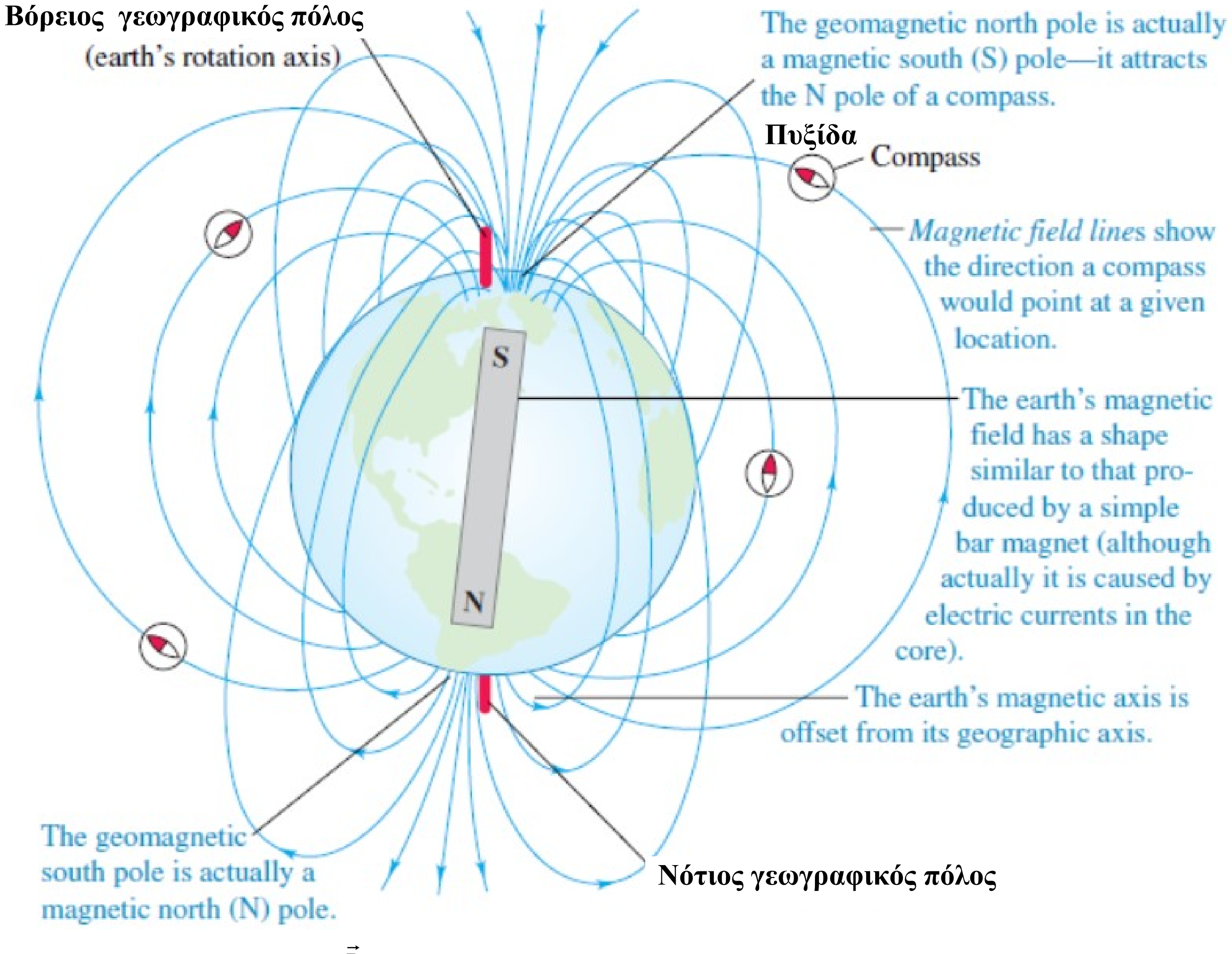
Ανακαλύφθηκε στην αρχαιότητα, στη Μαγνησία της Μικράς Ασίας (Οι Μάγνητες της Θεσσαλίας αποίκισαν την Μικρά Ασία ιδρύοντας δυο πόλεις που φέρουν το όνομα Μαγνησία επί Μαιάνδρω και Μαγνησία επί Σιπύλου).

Κομμάτια του ορυκτού μαγνητίτη της περιοχής (λίθος Μαγνησίας: Fe_3O_4) **ασκούσαν δυνάμεις από απόσταση μεταξύ τους, ελκτικές και απωστικές, και επίσης ασκούσαν έλξη σε σιδερένια αντικείμενα από απόσταση.**

Πρώτη φορά συζητήθηκε από τον Θαλή τον Μιλήσιο (600 π. Χ).

Οι κινέζοι χρησιμοποιούσαν πυξίδες στη ναυσιπλοΐα από τον 12^{o} αιώνα

Η Γη είναι ένας τεράστιος μαγνήτης (Gilbert 1600, *De Magnete*)



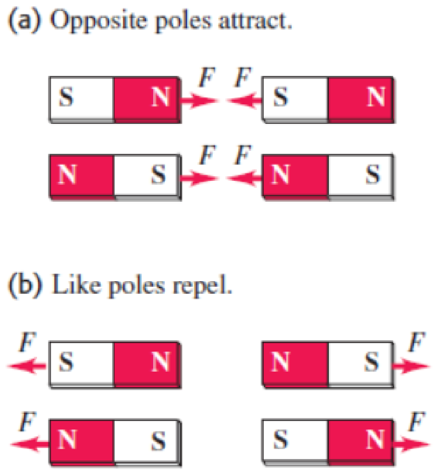
Γραμμές μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$: **είναι οι γραμμές πάνω στις οποίες προσανατολίζονται οι μαγνητικές βελόνες** (πυξίδες).

Έχουν φορά από το μαγνητικό Βορρά προς το μαγνητικό Νότο (N→S).

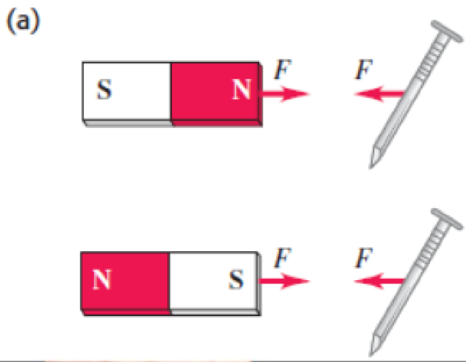
Άρα οι πυξίδες δείχνουν προς τον μαγνητικό νότο.

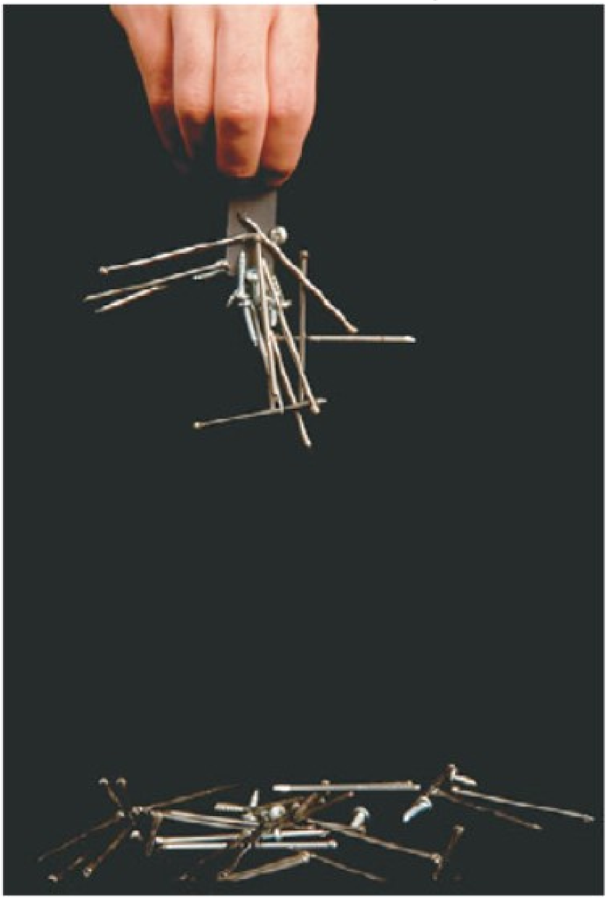
Ο μαγνητικός νότος δεν συμπίπτει ακριβώς με το γεωγραφικό βορρά (υπάρχουν οι λεγόμενες γωνίες μαγνητικής απόκλισης και μαγνητικής έγκλισης)

Δυνάμεις μεταξύ μόνιμων μαγνητών: **Όμοιοι πόλοι απωθούνται – Ανόμοιοι πόλοι έλκονται**

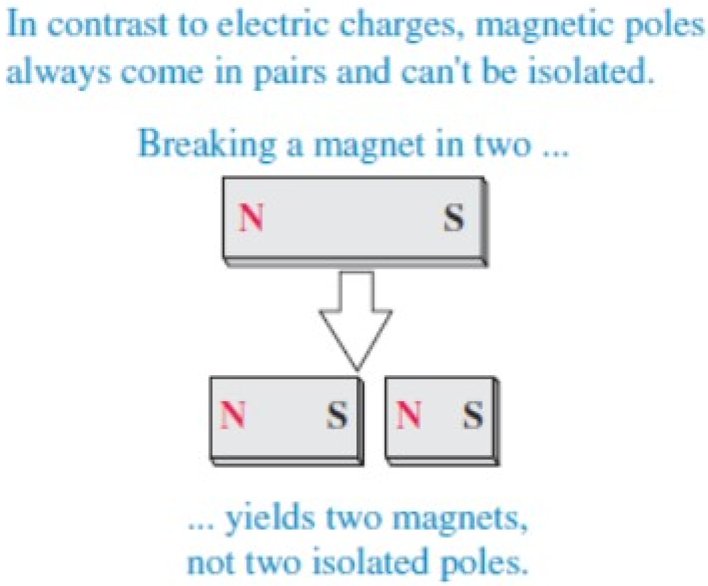


Επίσης αντικείμενα που περιέχουν σίδηρο (Fe), νικέλιο (Ni) και κοβάλτιο (Co) έλκονται από τους μαγνήτες και ονομάζονται σιδηρομαγνητικά υλικά.
Τα υπόλοιπα μέταλλα **ΔΕΝ ΕΛΚΟΝΤΑΙ** από τους μαγνήτες (π.χ. Cu, Al κλπ.)



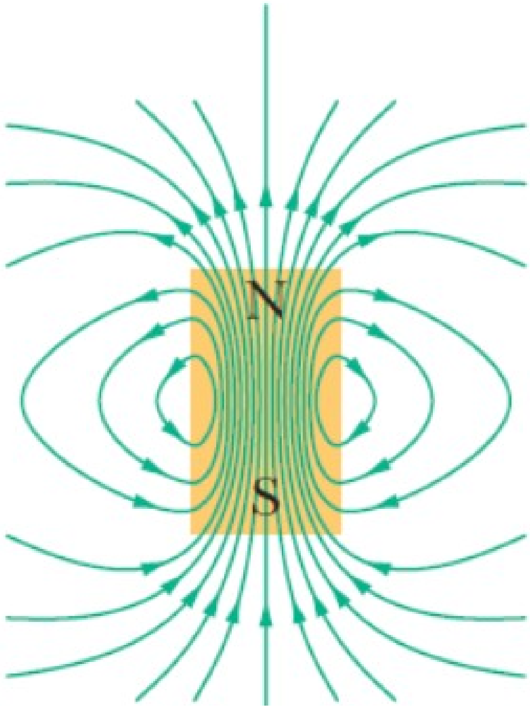


Επειδή εμφανίζονται δύο ειδών δυνάμεις: έλξη και άπωση, ορίζουμε δύο πόλους σε ένα μαγνήτη.
Η μία πλευρά του υλικού είναι ο βόρειος (N) και η άλλη ο νότιος (S) πόλος.
Οι μαγνήτες εμφανίζονται πάντα ως δίπολα. Δεν μπορείς να απομονώσεις ποτέ τον ένα πόλο.



Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα και άρα οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι κλειστές καμπύλες

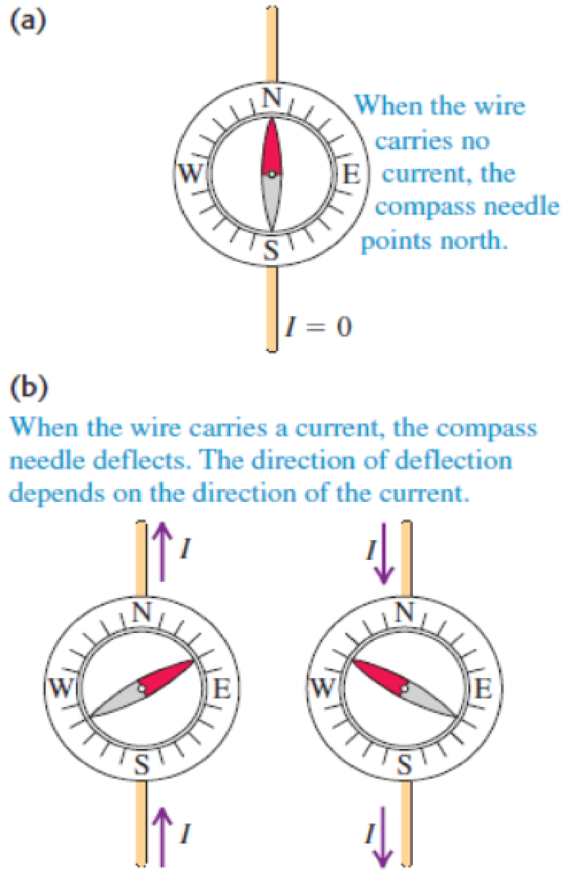
Οι γραμμές διατρέχουν όλο το υλικό του μαγνήτη, βγαίνουν από τη μία πλευρά και μπαίνουν από την άλλη. Από εκεί που βγαίνουν είναι ο βόρειος πόλος (N) και από εκεί που μπαίνουν είναι ο νότιος πόλος (S).

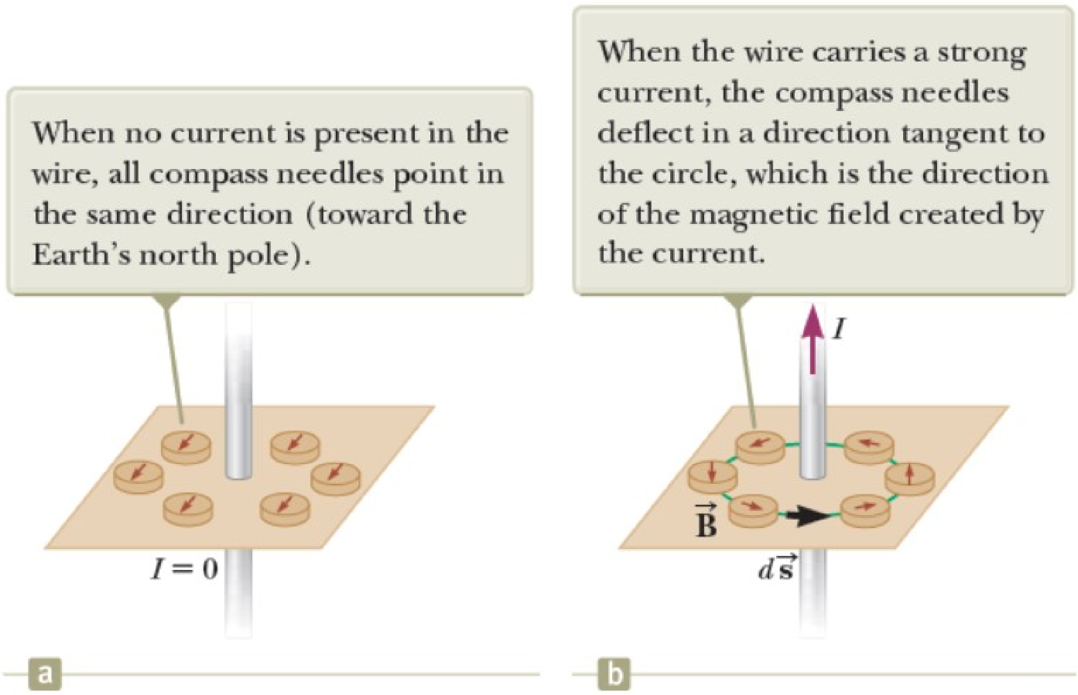


Ραβδοειδής μαγνήτης (bar magnet)

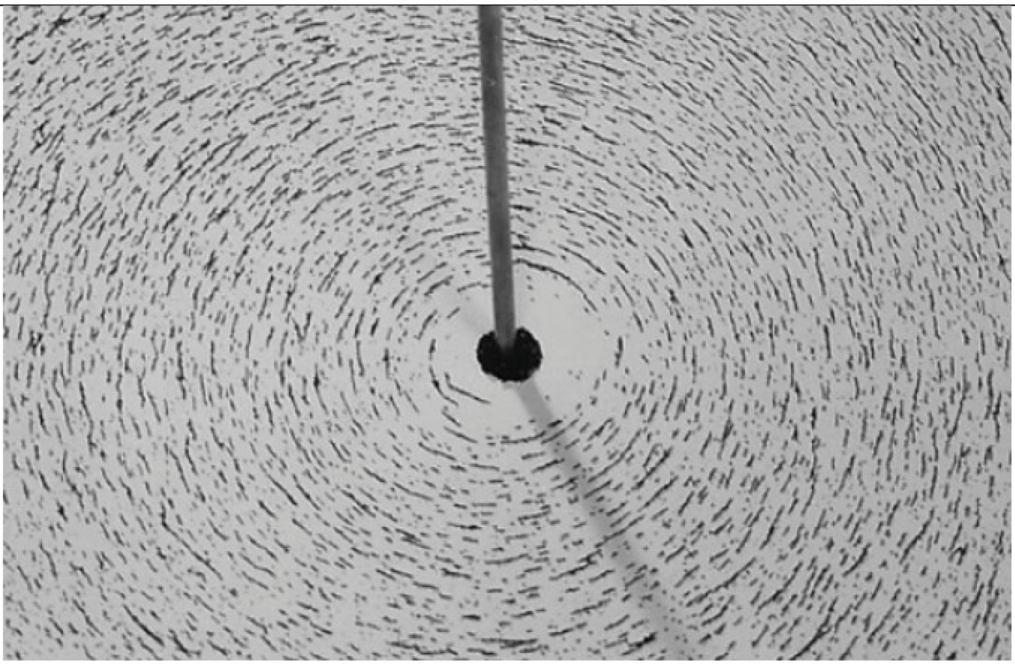
Πηγή (αιτία) του μαγνητικού πεδίου είναι το ηλεκτρικό ρεύμα (Oersted 1820)

Οι μαγνητικές βελόνες (πυξίδες) δέχονται δυνάμεις από ρευματοφόρους αγωγούς, δηλαδή από ηλεκτρικά ρεύματα





Άρα ο ρευματοφόρος αγωγός δημιουργεί γύρω του ένα μαγνητικό πεδίο που επηρεάζει τη μαγνητική βελόνα (πυξίδα).

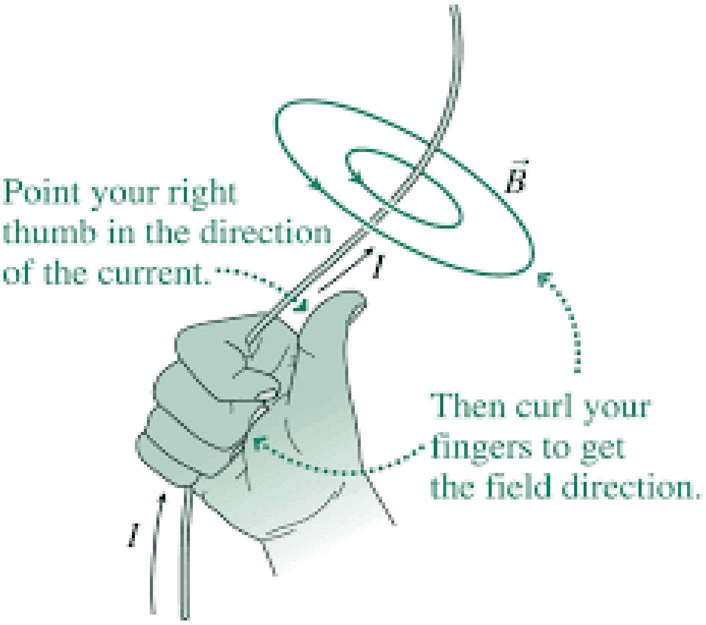


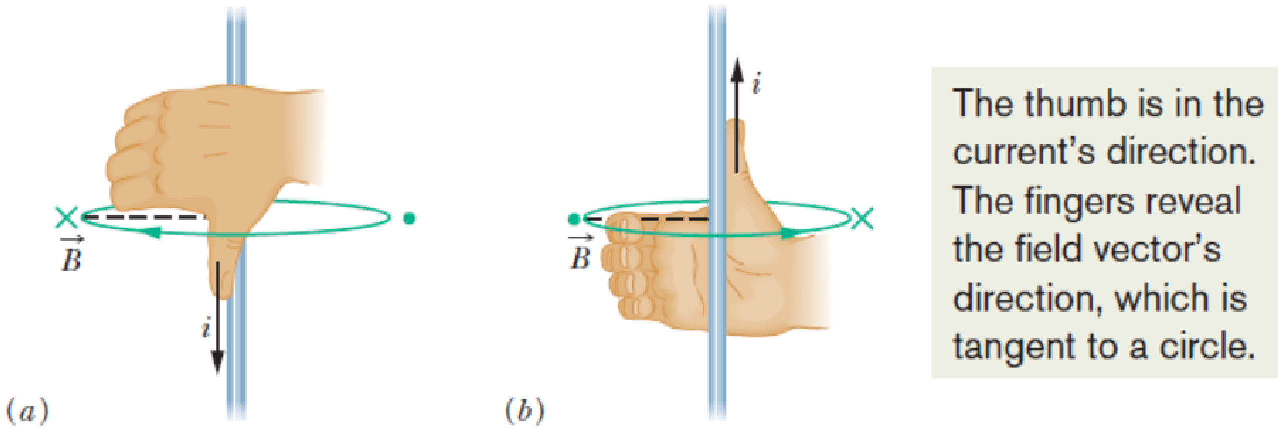
Oersted (1820) : 1) Κατεύθυνση σε κύκλους γύρω από το ρεύμα

2) $B \propto I$

3) $B \propto \frac{1}{r}$

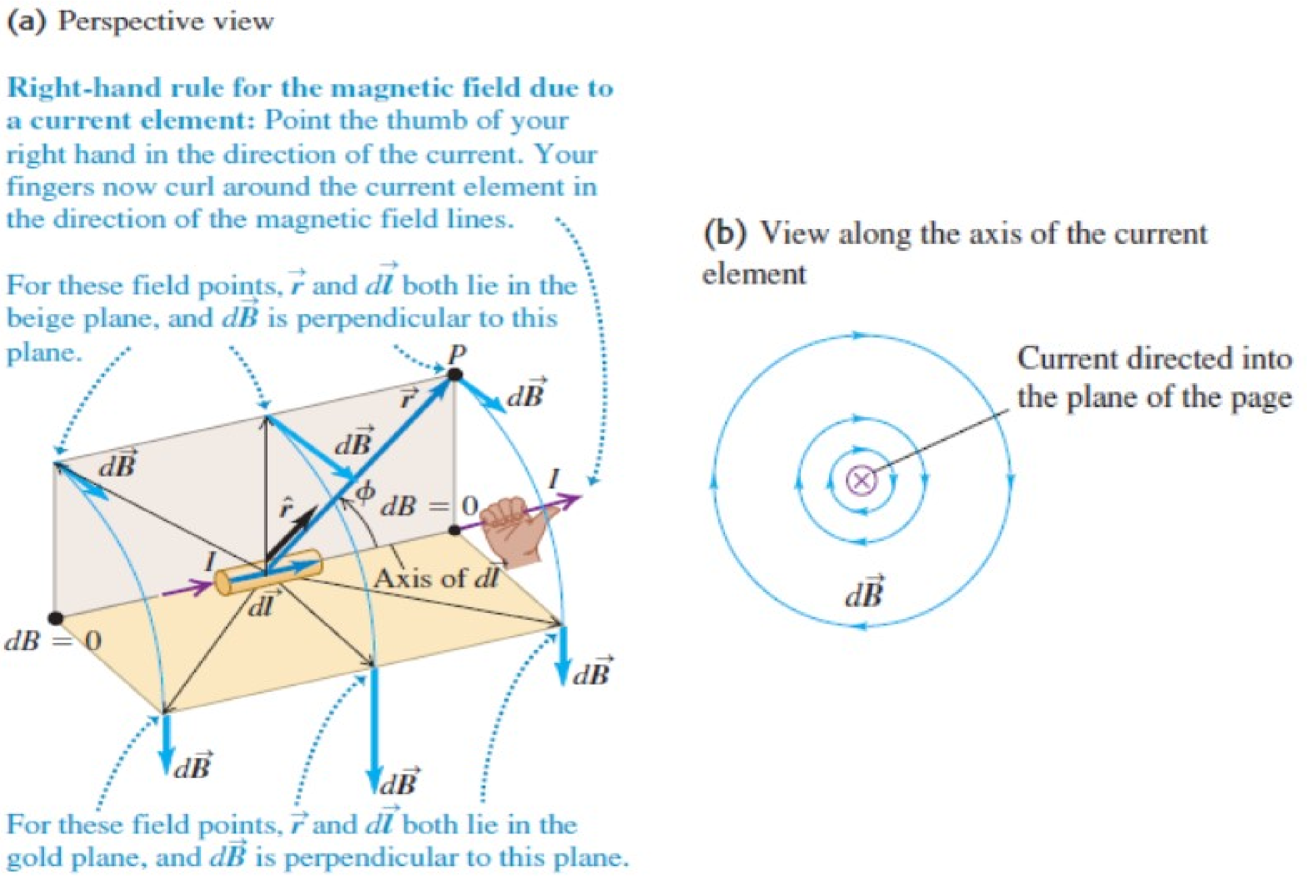
Τα μαγνητικά πεδία δημιουργούνται από ηλεκτρικά ρεύματα





ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Νόμος Biot-Savart **:** ***Μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί στοιχείο ρεύματος***



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}$$

$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ N·s²/C², ώστε $c^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0} = (299.792.458\ \text{m/s})^2$ ακριβώς

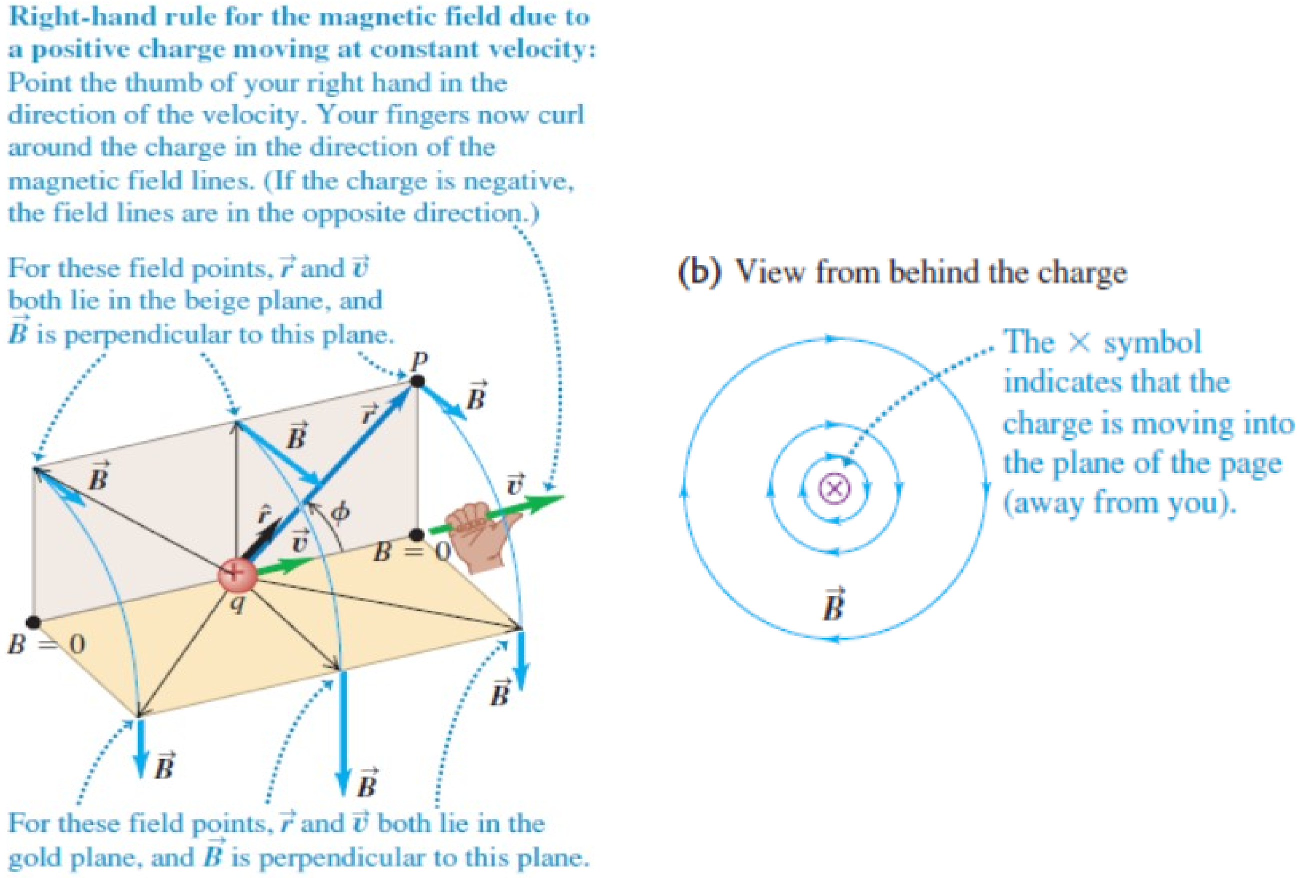
$k_m = \mu_0/4\pi = 10^{-7}$ N·s²/C²

Το μαγνητικό πεδίο μετριέται σε T τέσλα και ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για τις μονάδες :

[B]=T=N·s/C·m=N/A·m και [μ_0] = N·s^2/C^2 = N/A^2=Wb/A·m=T·m/A

τις οποίες θα δείξουμε παρακάτω

***Νόμος Biot-Savart*: Μαγνητικό πεδίο σημειακού φορτίου**



$$Id\vec{\ell} = \frac{q}{dt}d\vec{\ell} = q\frac{d\vec{\ell}}{dt} = q\vec{\upsilon}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{r^2}\vec{\upsilon}\times\hat{r} = \mu_0\varepsilon_0\ \vec{\upsilon}\times\vec{E}}$$

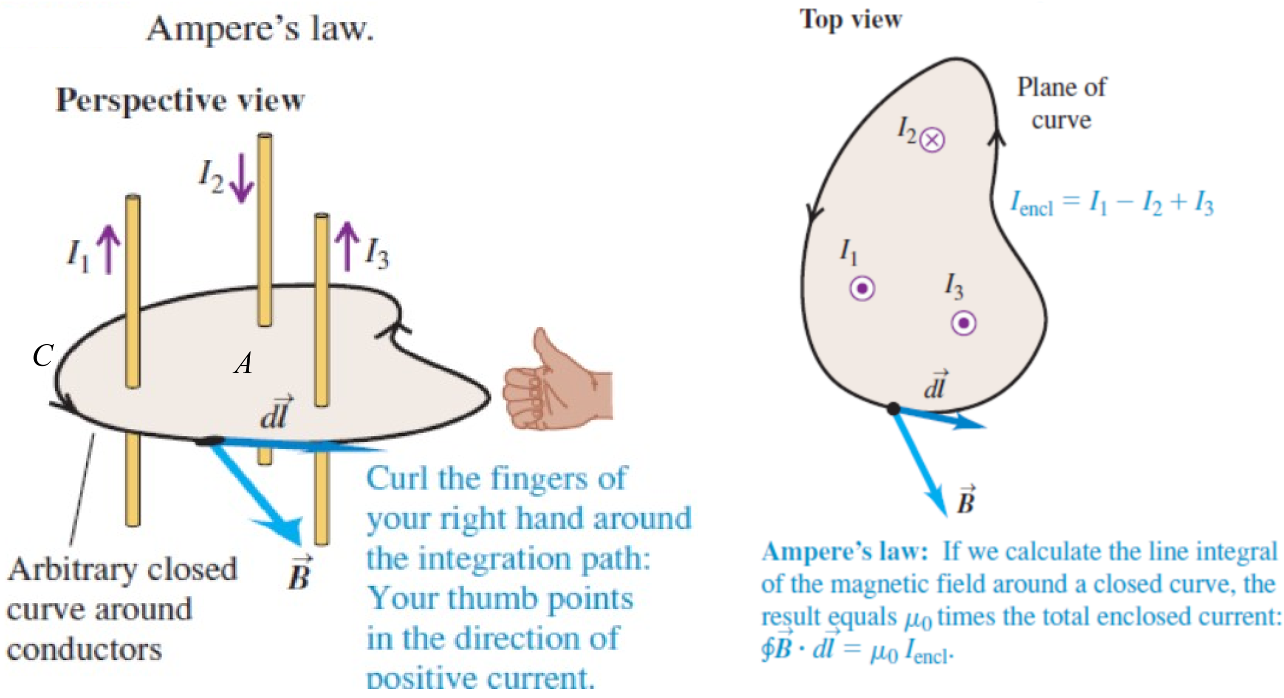
Οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου όπως ορίστηκε παραπάνω είναι κλειστές γραμμές που περικυκλώνουν την τροχιά του στοιχείου ρεύματος ή του κινούμενου φορτίου που τις δημιουργεί.

Νόμος Ampere

Από το νόμο των Biot-Savart προκύπτει ο νόμος του Ampere

$$\boxed{\int_C \vec{B}\cdot\ d\vec{\ell} = \mu_0 I_{περικλ} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}}$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου πάνω σε μια κλειστή καμπύλη *C* είναι ανάλογο με τα ρεύματα που περικλείει η καμπύλη



Stokes: $\int_{C(A)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}$

Πυκνότητα ρεύματος: $I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$ $\qquad J = I/A \qquad [J] = \mathrm{A/m^2}$

Χρησιμοποιούμε Ampere αντί Biot-Savart όταν η διάταξη των ρευμάτων έχει συμμετρία.

Όταν ο νόμος του Ampere συμπληρωθεί κα με το ρεύμα μετατόπισης του Maxwell θα αποτελέσει την 4η εξίσωση του Maxwell.

Νόμος Gauss

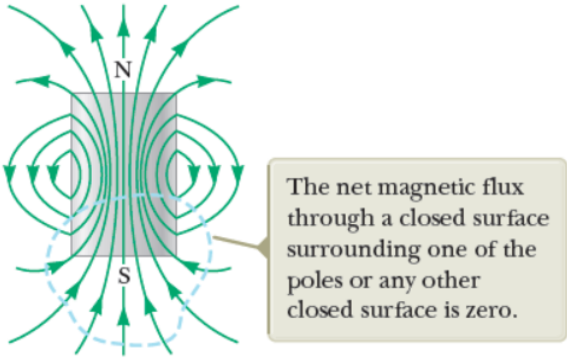
Επειδή το μαγνητικό πεδίο έχει κλειστές δυναμικές γραμμές η ροή του διαμέσου κάθε κλειστής επιφάνειας θα είναι πάντα μηδέν.

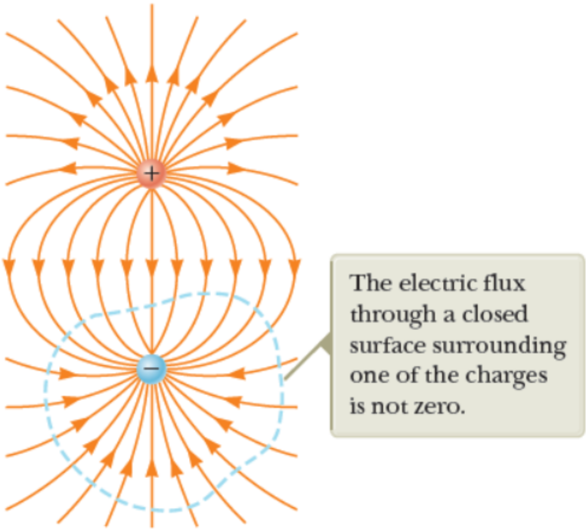
$$\boxed{\int_{A(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

[Από θεώρημα απόκλισης Stokes: $\int_{A(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV$]

Αυτό ισοδυναμεί με το πειραματικό γεγονός ότι δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα και όλα τα μαγνητικά πεδία δημιουργούνται μόνο από κινούμενα φορτία (ρεύματα)

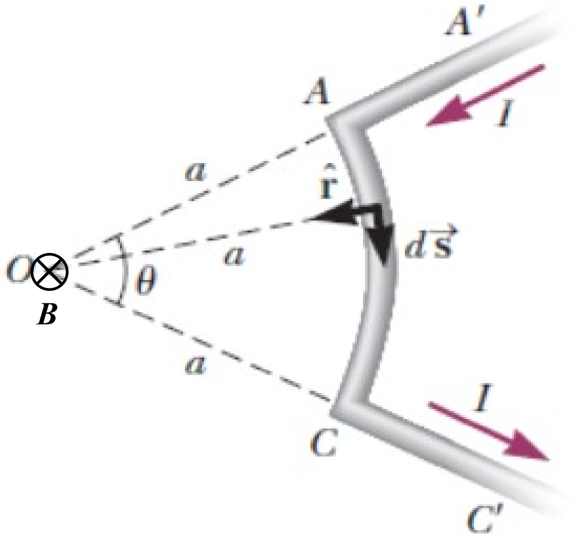
Η παραπάνω είναι η **2η εξίσωση του Maxwell.**





ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ

Μαγνητικό πεδίο στο κέντρο λεπτού κυκλικού τόξου (Biot-Savart)



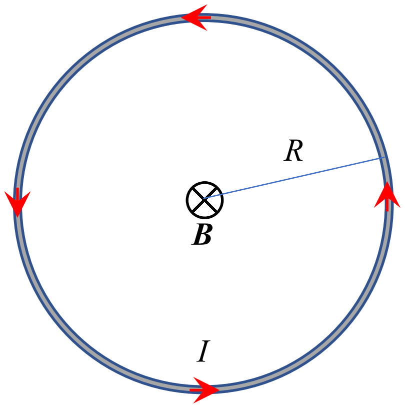
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\theta}{a}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\left|d\vec{s}\times\hat{r}\right|}{a^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ids}{a^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\theta}{a}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}\int_0^{\theta} d\theta \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}\theta$$

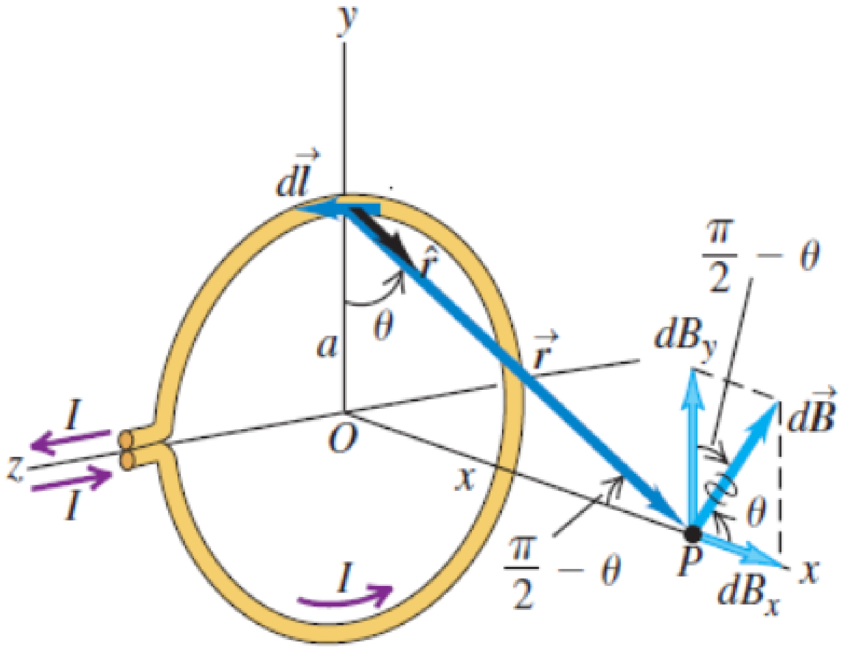
Μαγνητικό πεδίο λεπτού κυκλικού αγωγού (δίπολο) στο κέντρο του (Biot-Savart)

Θέτουμε θ=2π



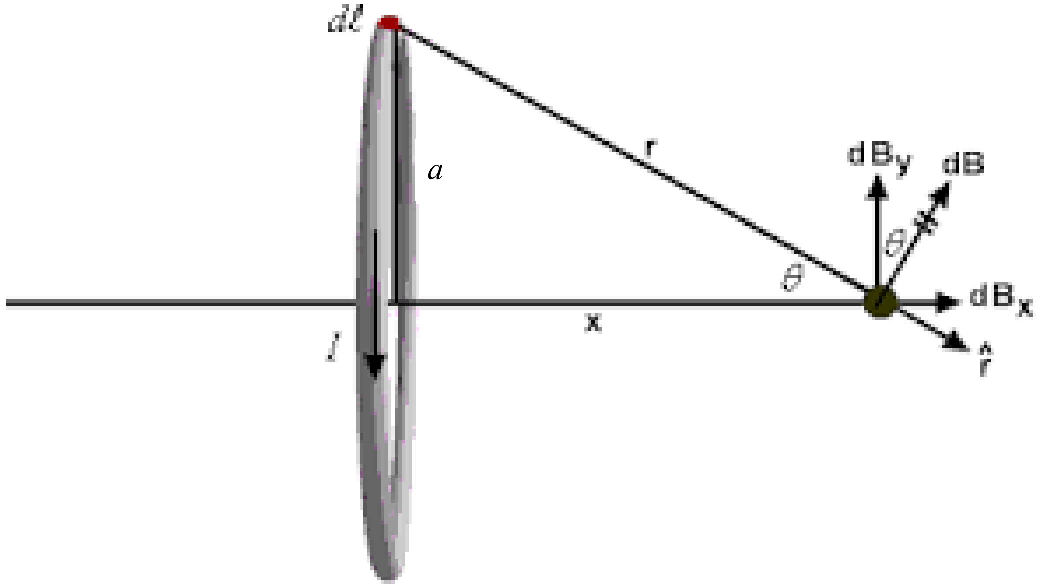
$$B = \frac{\mu_0}{2}\frac{I}{R}$$

Μαγνητικό πεδίο λεπτού κυκλικού αγωγού (Δίπολο) πάνω στον άξονά του (Biot-Savart)



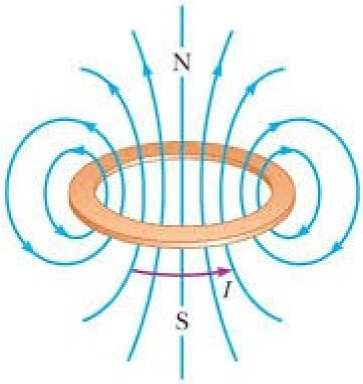
$$B_x = \frac{\mu_0}{2}\frac{Ia^2}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mu}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

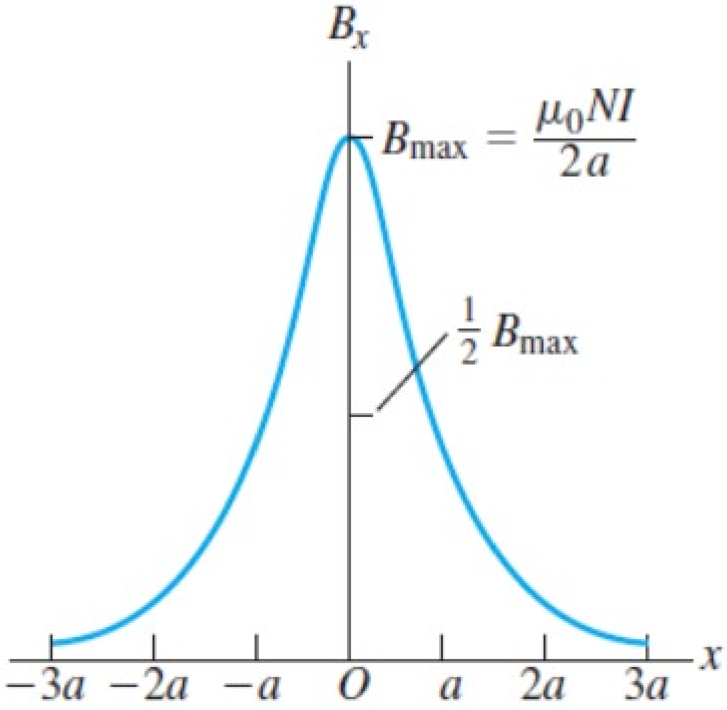
$$B_x = \int dB_x = \int dB\cos\theta = \int_C \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\left|d\vec{\ell}\times\hat{r}\right|}{r^2}\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{d\ell}{r^2}\frac{a}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{r^3}\int_C d\ell = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{r^3}2\pi a = \frac{\mu_0}{2}\frac{Ia^2}{r^3}$$

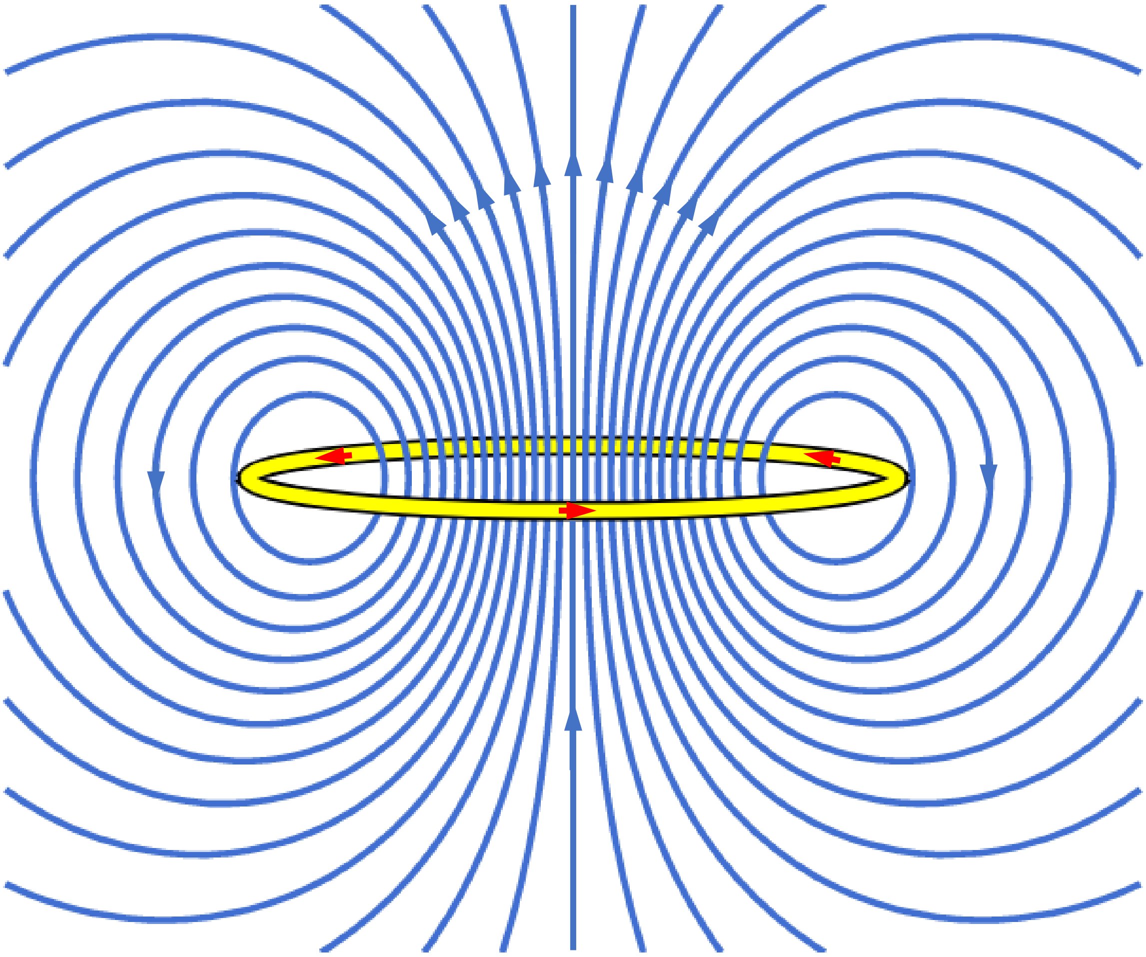


Διπολική ροπή : $\vec{\mu} = I\vec{A} = I\pi a^2\hat{x}$, Για N σπείρες σφιχτοδεμένες $\vec{\mu} = NI\vec{A} = NI\pi a^2\hat{x}$

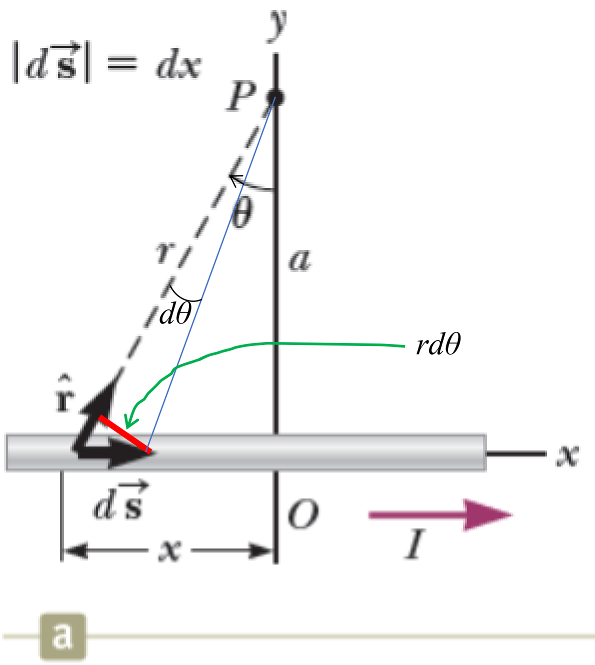
Σε σημεία πολύ μακριά *x*>>*a* και πάνω στον άξονα : $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{\vec{\mu}}{r^3}$

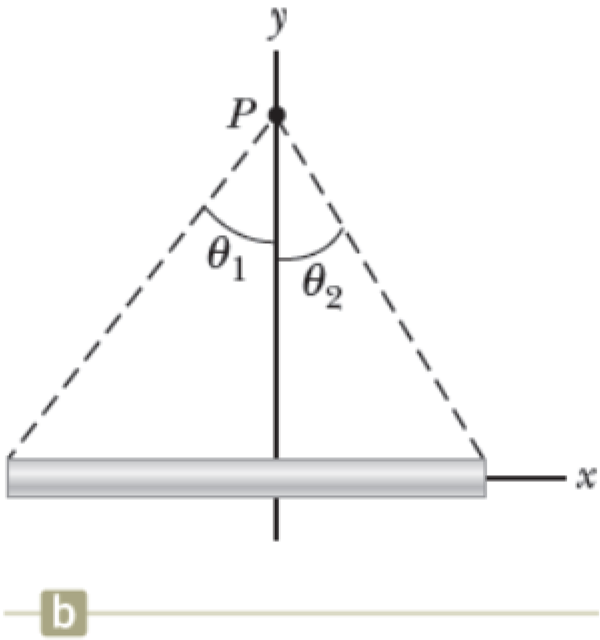






Λεπτό Ευθύγραμμο τμήμα (Biot-Savart)





$d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Id\vec{s}\times\hat{r}}{r^2}$, $\quad |d\vec{s}| = dx$, $\quad d\vec{s}\times\hat{r} = |d\vec{s}\times\hat{r}|\hat{z} = dx\sin(\pi/2-\theta)\hat{z} = dx\cos\theta\hat{z}$

Από το σχήμα :

1) επειδή η γωνία μεταξύ της κάθετης στο r κόκκινης γραμμής και του $\boldsymbol{ds}$ είναι επίσης θ έχουμε $dx = -\dfrac{r d\theta}{\cos\theta}$ με το μείον επειδή όταν η θ μεγαλώνει το x μεγαλώνει προς τα αρνητικά

2) επίσης $r = \dfrac{a}{\cos\theta}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dx\cos\theta}{r^2}\hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{\cos\theta}{a}\right)^2\left(\frac{-a}{\cos\theta}\frac{d\theta}{\cos\theta}\right)\cos\theta\hat{z} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}\cos\theta d\theta\hat{z} \Rightarrow$$

$$\vec{B} = -\hat{z}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta d\theta \;\Rightarrow$$

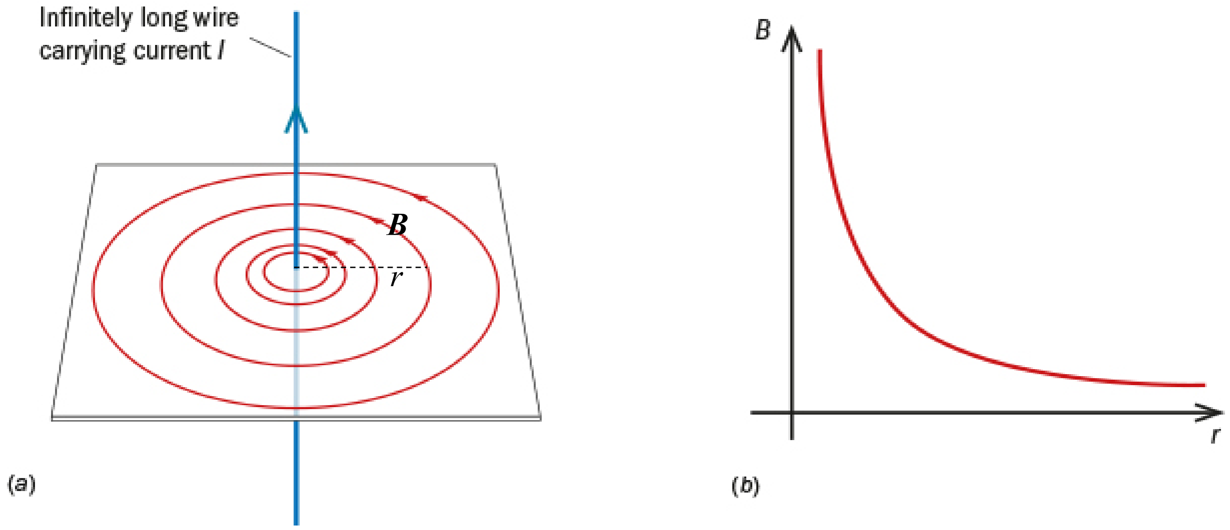
$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}\left(\sin\theta_1 - \sin\theta_2\right)\hat{z}}$$

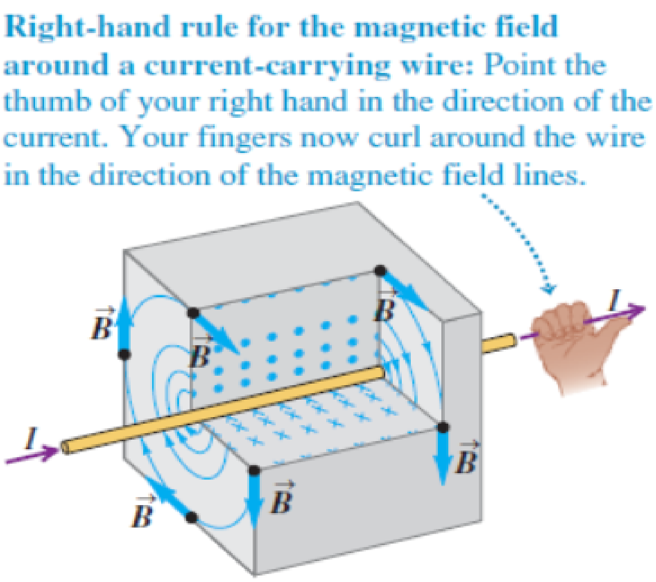
Λεπτός Ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους (Biot-Savart)

Θέτουμε $\theta_1=\pi/2$ για $x=-\infty$ και $\theta_2=-\pi/2$ για $x=+\infty$

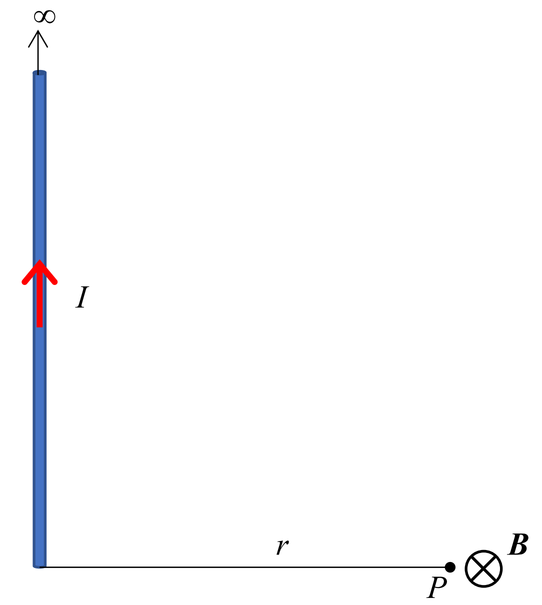
Σημείο σε απόσταση r : $B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I}{r}\left(\sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2)\right) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I}{r}\left(1-(-1)\right) \Rightarrow$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}}$$





Μισός Λεπτός Ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους



$$B_{ημιευθ} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r} = \frac{B_{ευθ}}{2}$$

Σημείο σε απόσταση r στη βάση του αγωγού.

Για ημιευθεία θέτουμε θ_1=π/2 για $x=-\infty$ και θ_2=0 για x= 0

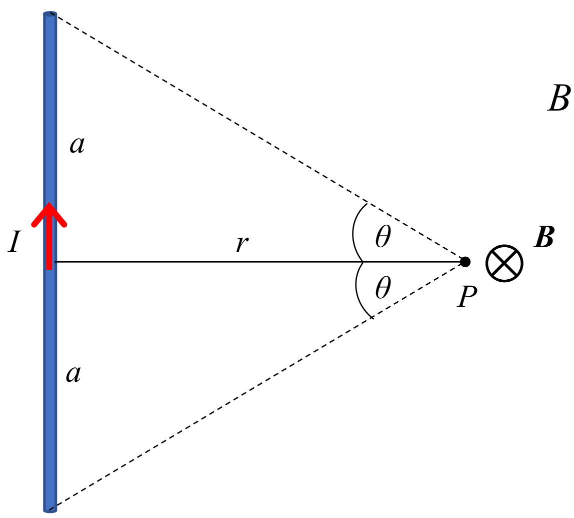
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r}\left(\sin(\pi/2) - \sin(0)\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r}\left(1-0\right) \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r}$$

Πεδίο λεπτού ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού πεπερασμένου μήκους πάνω στη μεσοκάθετο

Μήκος αγωγού : $2a$

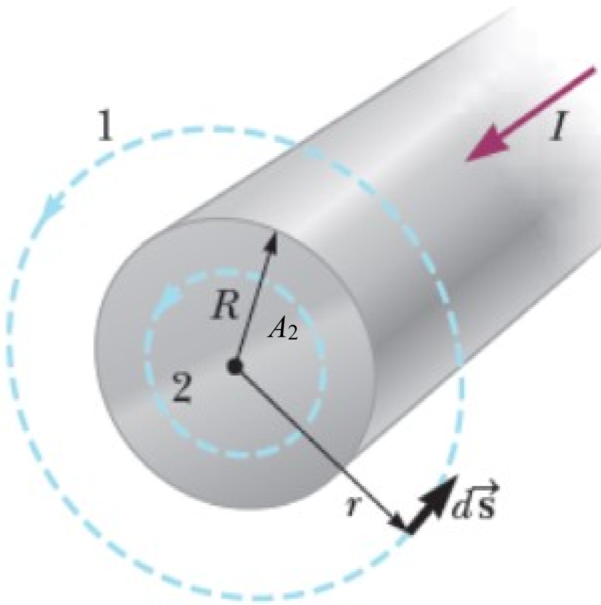
Απόσταση από το κέντρο του αγωγού: r

Θέτουμε $\theta_1 = -\theta_2 = \theta$ με $\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}$



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2a}{r\sqrt{r^2+a^2}}$$

Κυλινδρικός αγωγός ακτίνας *R* με ομοιόμορφη κατανομή ρεύματος (Ampere)



Από συμμετρία το ***B*** θα είναι κλειστές κυκλικές γραμμές γύρω από τον άξονα του κυλίνδρου

Πυκνότητα ρεύματος: $J = \dfrac{I}{A} = \dfrac{I}{\pi R^2}$

Για $r < R$, κυκλική καμπύλη C_2 περιμέτρου $2\pi r$ και εμβαδού $A_2 = \pi r^2$. Περικλείει μέρος του ρεύματος I.

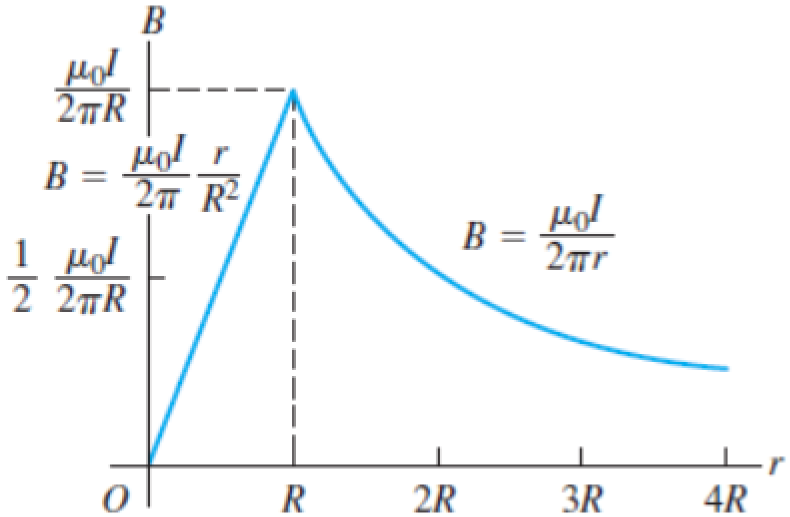
$$\int_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{περικλ} \Rightarrow \int_{C_2} B ds = \mu_0 J A_2 \Rightarrow B \int_{C_2} ds = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow$$

$$B = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \right) r \qquad \text{ανάλογο του } r$$

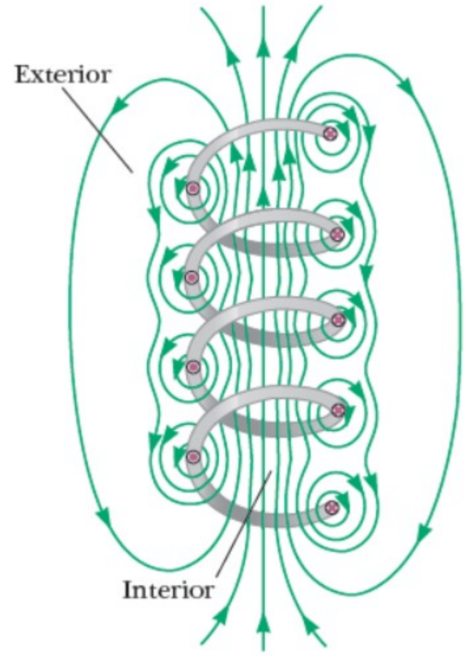
Για $r > R$, κυκλική καμπύλη C_1 περιμέτρου $2\pi r$. Περικλείει όλο το ρεύμα I.

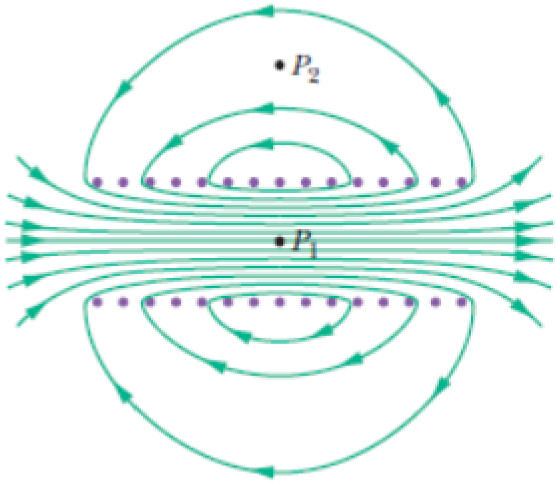
$$\int_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{περικλ} \Rightarrow \int_{C_1} B d\ell = \mu_0 I \Rightarrow B \int_{C_2} d\ell = \mu_0 I \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \qquad \text{ίδιο με του λεπτού αγωγού}$$



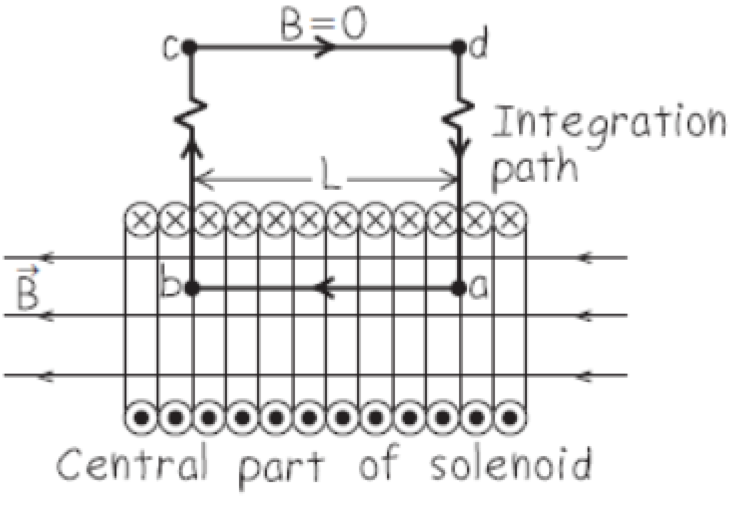
Πηνίο (Ampere)





Για σφιχτοδεμένο πηνίο με μήκος πολύ μεγαλύτερο από την ακτίνα του θεωρούμε με πολύ καλή προσέγγιση ότι το μαγνητικό πεδίο έξω από το πηνίο σε σημεία (P_2) εκτός άξονα είναι ίσο με μηδέν (πάρα πολύ αραιές γραμμές). Μέσα στο πηνίο, από συμμετρία, σε σημεία (P_1) κοντά στο κέντρο του και κοντά στο μέσο του είναι **παράλληλο με τον άξονα και έχει σταθερό μέτρο**. Αυτό είναι το ιδανικό πηνίο. **Το ιδανικό πηνίο είναι ο τρόπος να φτιάξουμε ομογενές μαγνητικό πεδίο** (όπως ο πυκνωτής είναι ο τρόπος να φτιάξουμε ομογενές μαγνητικό πεδίο)

Σπείρες ανά μέτρο : $n = \dfrac{N}{\ell}$



Από νόμο Ampere στην κλειστή διαδρομή *a-b-c-d-a*

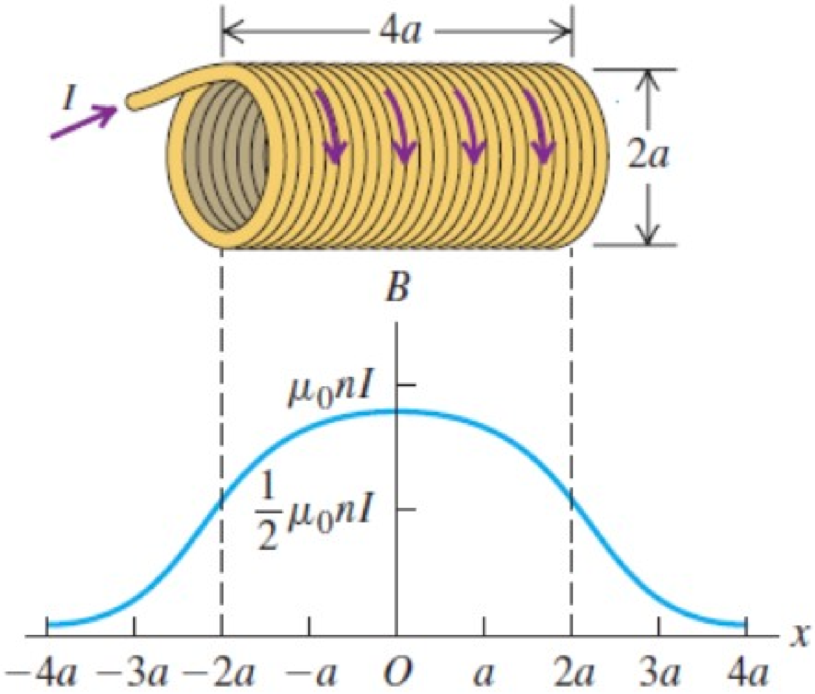
$$\int_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_b^c \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_c^d \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_d^a \vec{B}\cdot d\vec{s} = B\int_a^b ds + 0 + 0 + 0 = BL$$

$$\mu_0 I_{\pi\varepsilon\rho\iota\kappa\lambda} = \mu_0 I(nL)$$

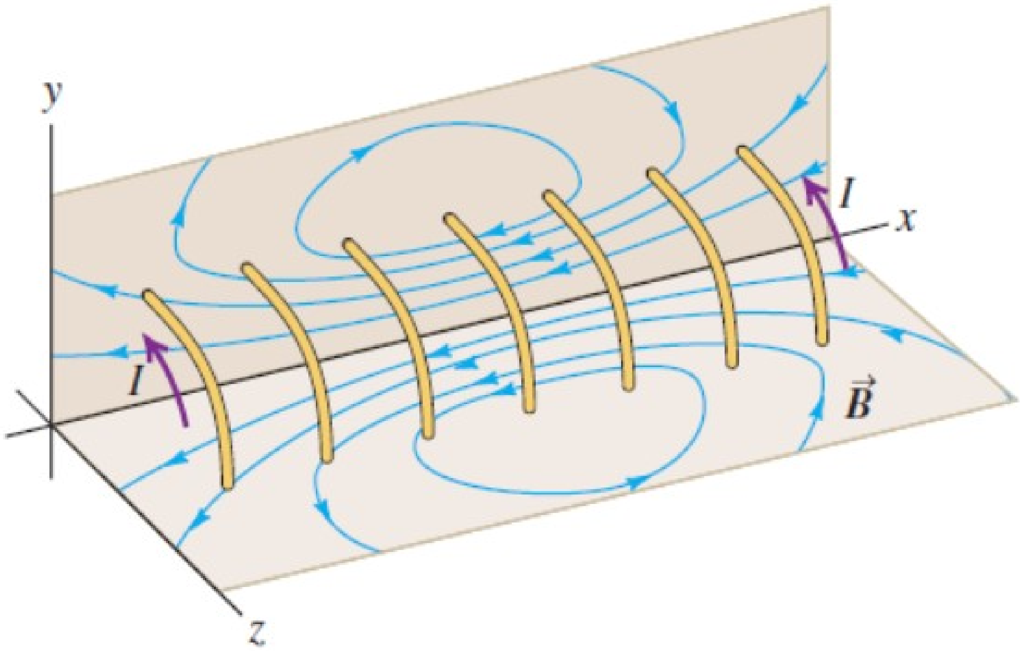
Εξισώνοντας παίρνουμε :

$$\boxed{B = \mu_0 n I}$$

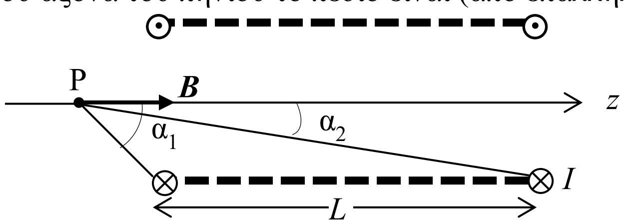
Αν το πηνίο είναι **πεπερασμένου μήκους** τότε η παραπάνω τιμή για το μαγνητικό πεδίο ισχύει μόνο για τη διατομή στο κέντρο του πηνίου και σε πολύ καλή προσέγγιση για μια μικρή περιοχή κοντά στο κέντρο. Για τα υπόλοιπα σημεία του άξονά του το πεδίο μειώνεται καθώς προχωράμε προς τα άκρα του. Αν το σωληνοειδές είναι πολύ μακρύ σε σχέση με τη διάμετρό του το πεδίο στα άκρα του είναι ακριβώς το μισό από όσο είναι στο κέντρο : $B_{άκρα} = \frac{1}{2}\mu_0 nI$



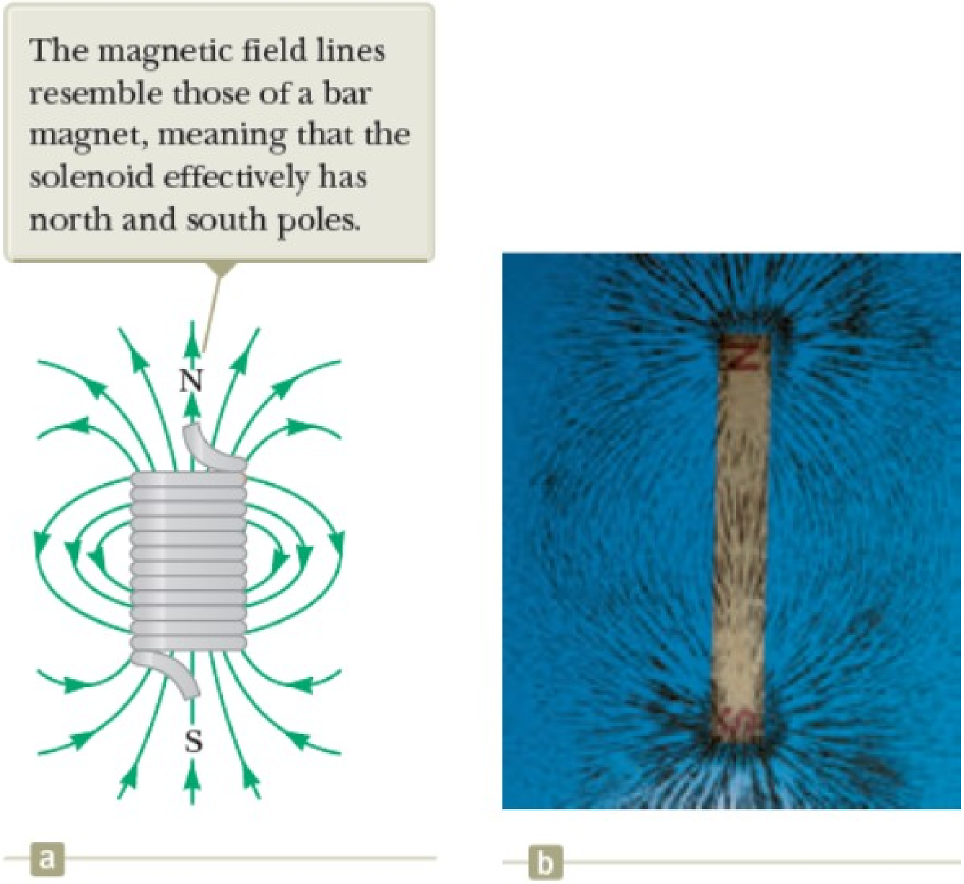
Επίσης από το σύνολο των γραμμών του πεδίου που διαπερνούν την διατομή του στο κέντρο οι μισές βγαίνουν από τα άκρα του ενώ οι άλλες μισές «διαρρέουν» έξω μέσω των σπειρών δια μήκους του πηνίου.



Σε τυχαίο σημείο του άξονα του πηνίου το πεδίο είναι (από επαλληλία δακτυλίων):



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{2L}\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right)\hat{z} \xrightarrow[\alpha_1\to\pi]{\alpha_2\to 0} \mu_0 I \frac{N}{L}\frac{1}{2}\left(1-(-1)\right) = \mu_0 In$$



ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΑΠΟ ΜΑΓΝΗΤΙΚΆ ΠΕΔΙΑ ΚΑΙ ΚΙΝΗΣΗ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΣΕ ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΑΙ ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

Δύναμη Laplace.
Έτσι ονομάζεται η δύναμη που ασκείται σε ένα ρευματοφόρο αγωγό που βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο

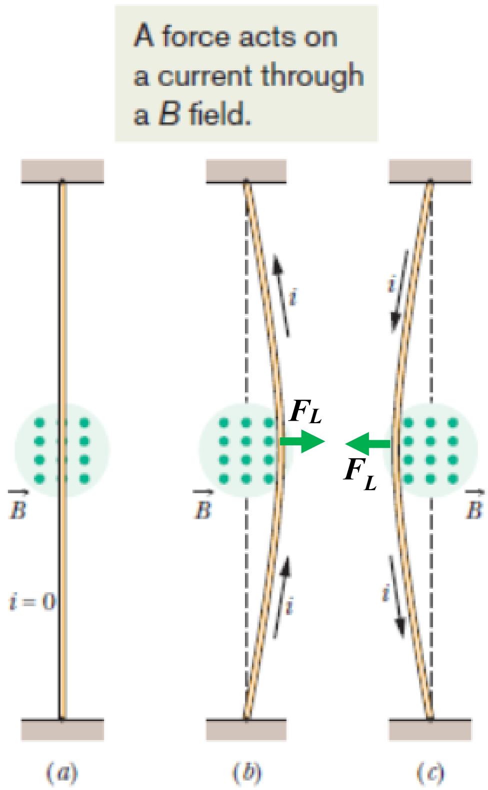
$$d\vec{F}_L = Id\vec{\ell}\times\vec{B} \quad\Rightarrow\quad \vec{F}_L = I\int\limits_{\substack{\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\\ \alpha\gamma\omega\gamma o\acute{\upsilon}\\ \sigma\tau o\,\pi\varepsilon\delta\acute{\iota}o}} d\vec{\ell}\times\vec{B}$$

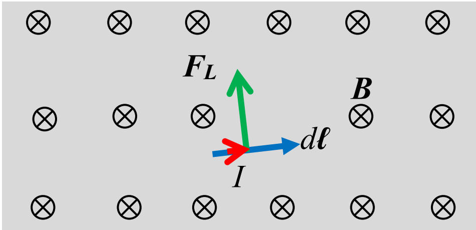
Η εξίσωση αυτή είναι ο πιο εύκολος ορισμός του τέσλα (T):

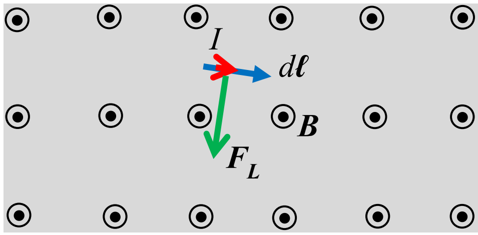
$$[B] = \frac{[F]}{[I][\ell]} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A\cdot\ m}}$$

Στη συνέχεια από τον τύπο του πηνίου βρίσκουμε εύκολα τις μονάδες της μαγνητικής σταθεράς μ_0 :

$$B = \mu_0 nI \Rightarrow [\mu_0] = \frac{[B]}{[n][I]} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{m^{-1}A}} = \frac{N}{\mathrm{m^{-1}A\,A\,m}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A^2}}$$

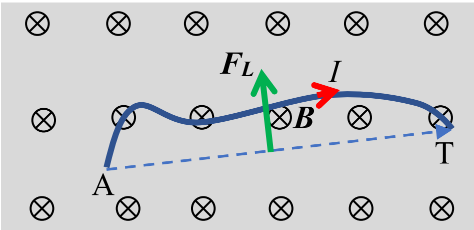


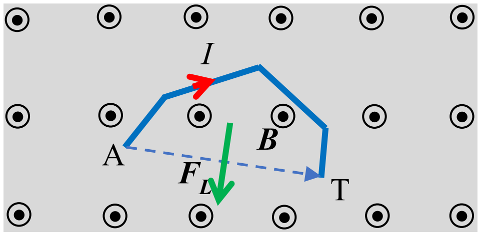




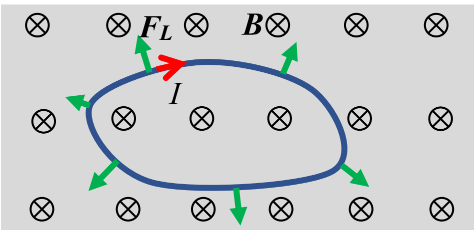
Για ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$: $\vec{F} = I\left(\int_A^T d\vec{\ell}\right)\times\vec{B} \Rightarrow \vec{F} = I\vec{\ell}_{AT}\times\vec{B}$

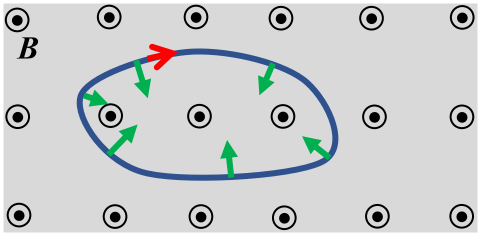
Όπου $\vec{\ell}_{AT}$ είναι το διάνυσμα από την αρχή ως το τέλος του αγωγού άσχετα με το ενδιάμεσο σχήμα του.





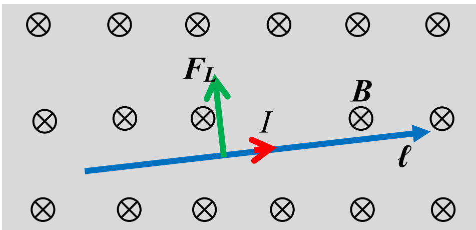
Αν ο αγωγός είναι κλειστός τότε η συνολική δύναμη από ομογενές μαγνητικό πεδίο θα είναι μηδέν αφού $\vec{\ell}_{AA} = 0$. Παρόλο που η συνισταμένη των μαγνητικών δυνάμεων είναι μηδέν ο αγωγός δέχεται τάσεις καθώς οι δυνάμεις σε κάθε τμήμα του τείνουν είτε να τον συρρικνώσουν είτε να τον τεντώσουν.

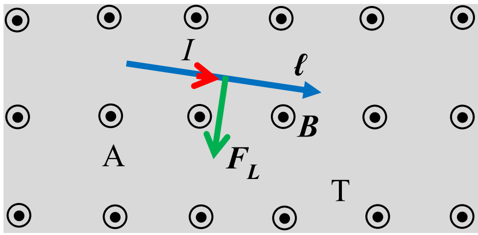


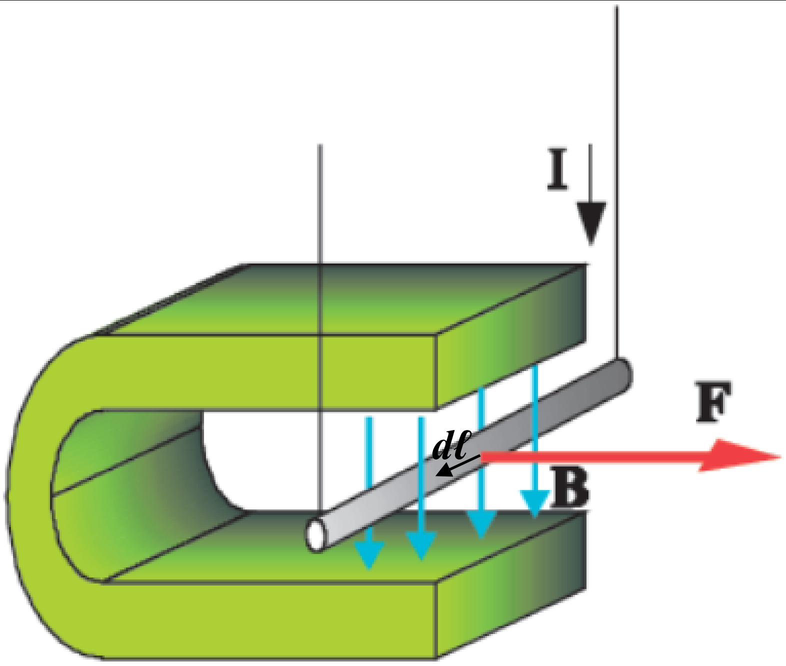


Αν ο αγωγός είναι ευθύγραμμος τότε :

$$\boxed{\vec{F} = I\vec{\ell}\times\vec{B}\,.}$$



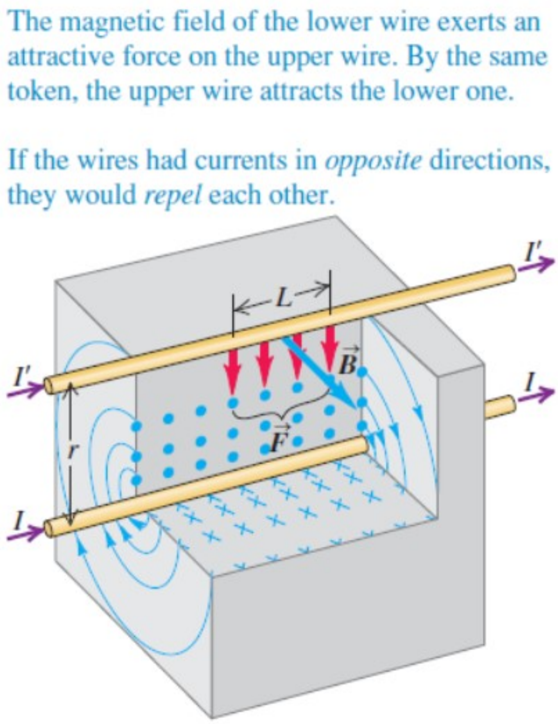




Δύναμη μεταξύ ευθύγραμμων παράλληλων αγωγών

Η δύναμη **είναι ελκτική αν τα ρεύματα είναι ομόρροπα** και απωστική αν είναι αντίρροπα. Το μέτρο της ανά μονάδα μήκους L είναι:

$$\frac{F}{L} = I'B = IB' \Rightarrow \qquad \frac{F}{L} = \frac{\mu_0 II'}{2\pi r}$$



Ροπή σε Μαγνητικό δίπολο

Ένας επίπεδος κλειστός ρευματοφόρος βρόχος μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο δεν θα δεχτεί συνισταμένη δύναμη αλλά μόνο ροπή η οποία θα τείνει να τον προσανατολίσει με τις γραμμές του πεδίου. Η ροπή αυτή υπολογίζεται από τον τύπο της δύναμης Laplace και είναι ίση με :

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \,,$$

όπου το μέγεθος $\vec{\mu} = I\vec{A}$ ονομάζεται μαγνητική ροπή.

Η ενέργεια του δίπολου θα είναι ελάχιστη όταν η μαγνητική του ροπή θα είναι προσανατολισμένη με το μαγνητικό πεδίο. Η δυναμική του ενέργεια δίνεται από τον τύπο $U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$

Μέσα σε **μη ομογενές** μαγνητικό πεδίο στο δίπολο θα ασκηθεί **και ροπή** αλλά **και δύναμη**. Το δίπολο θα προσανατολιστεί με το πεδίο και θα ελκυσθεί προς την περιοχή που η ένταση του πεδίου μεγαλώνει, προς τα εκεί δηλαδή που οι γραμμές του πεδίου πυκνώνουν.

Μαγνητική ροπή φορτισμένου σωματιδίου σε ομαλή κυκλική κίνηση :

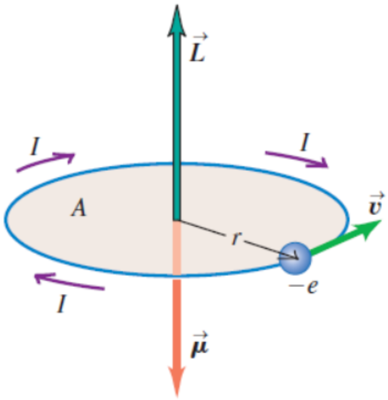
Ένα σωματίδιο φορτίου *q,* που εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας *R*, με σταθερή ταχύτητα *υ* θα έχει περίοδο $T=2\pi R/\upsilon$. Αυτό ισοδυναμεί με ρευματοφόρο δακτύλιο ρεύματος $I=q/T$, οπότε η μαγνητική ροπή που δημιουργεί θα είναι :

$$\mu=IA=\frac{q}{T}\pi R^2=\frac{q\upsilon}{2\pi R}\pi R^2=\frac{q}{2m}m\upsilon R\Rightarrow\boxed{\mu=\frac{q}{2m}L}$$

όπου $L=m\upsilon R$ η στροφορμή του σωματιδίου. Στο ατομικό πρότυπο του Bohr τα ηλεκτρόνια κινούνται σε κυκλικές τροχιές γύρω από τον πυρήνα και η στροφορμή τους είναι κβαντισμένη, δηλαδή εμφανίζεται μόνο ως ακέραιο πολλαπλάσιο του $\hbar\equiv h/2\pi=1,05\times10^{-34}$ J·s :

$$L=n\hbar\,.$$

Έτσι η ποσότητα $\mu_B=\dfrac{e}{2m_e}\hbar$ που ονομάζεται μαγνητόνη του Bohr, θα αποτελεί τη θεμελιώδη μονάδα της μαγνητικής ροπής και είναι ίση με $\mu_B=9,274\times10^{-24}$ A·m^2 ή J/T. Τα περισσότερα άτομα είναι μαγνητάκια και οι μαγνητικές ροπές τους είναι αυτής της τάξης μεγέθους.



Δύναμη Lorentz : Η συνολική δύναμη που ασκείται σε ένα φορτισμένο σωματίδιο από ένα ηλεκτρικό και ένα μαγνητικό πεδίο ονομάζεται δύναμη Lorenz και είναι το άθροισμα της ηλεκτρικής $\vec{F}_E=q\vec{E}$ και της μαγνητικής δύναμης $\vec{F}_B=q\vec{\upsilon}\times\vec{B}$:

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)$$

όπου $\vec{E},\vec{B}$ το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο στη θέση που βρίσκεται το σωματίδιο, το οποίο έχει φορτίο q και ταχύτητα $\vec{\upsilon}$.

Κίνηση σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

Η επιτάχυνση είναι: $\vec{F}_E=m\vec{a}\Rightarrow\ \vec{a}=\dfrac{q\vec{E}}{m}=\sigma\tau\alpha\theta$

Άρα η ταχύτητα του σωματιδίου θα δίνεται από $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_0+\vec{a}t$ και η θέση του από $\vec{r}=\vec{\upsilon}_0t+\dfrac{1}{2}\vec{a}t^2$

Το σωματίδιο ξεκινάει από την ηρεμία ή έχει ταχύτητα στη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου.

Έστω το ηλεκτρικό πεδίο στη διεύθυνση -*x*: $\vec{E}=-E\hat{x}$, $\qquad\vec{E}=-\vec{\nabla}V\Rightarrow -E=-\dfrac{dV}{dx}\Rightarrow V=Ex$

Για θετικό φορτίο : $\vec{a} = \dfrac{q\vec{E}}{m} \Rightarrow a = \dfrac{(+q)(-E)}{m} = -\dfrac{qE}{m}$

Για αρνητικό φορτίο : $\vec{a} = \dfrac{q\vec{E}}{m} \Rightarrow a = \dfrac{(-q)(-E)}{m} = \dfrac{qE}{m}$

Εξισώσεις κίνησης : $\upsilon = \upsilon_0 + at$, $x = \upsilon_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$

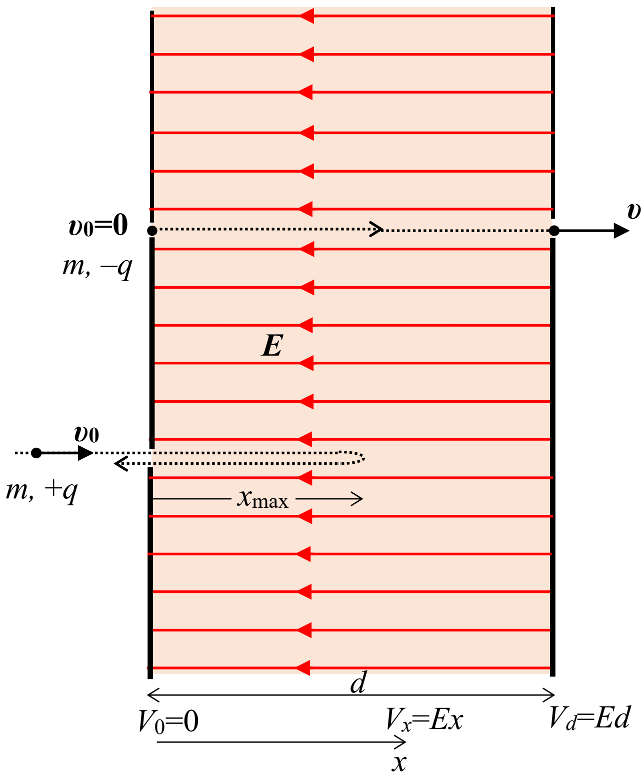
Διατήρηση ενέργειας : $\dfrac{1}{2}m\upsilon_0^2 + qV_0 = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 + qV_x$

Θετικό φορτίο από τη θέση x_0=0 με υ_0:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + 0 = 0 + qV_{x_{\max}} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = qEx_{\max} \Rightarrow x_{\max} = \frac{m\upsilon_0^2}{2qE} = \frac{\upsilon_0^2}{2|a|}$$ επιβραδύνεται και αναστρέφει

Αρνητικό φορτίο από τη θέση x_0=0 με υ_0=0:

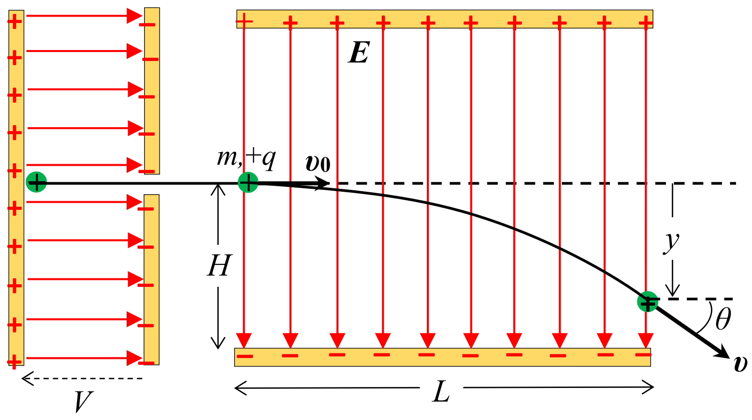
$$0 + 0 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - qV_h \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2qV_h}{m}} = \sqrt{\frac{2qEh}{m}} = \sqrt{2ah}$$ επιταχύνεται



Ίδιο με ελεύθερη πτώση με την αντικατάσταση $g \rightarrow a$

Ίδιο με κατακόρυφη βολή με την αντικατάσταση $g \rightarrow |a|$

Αν το σωματίδιο έχει και συνιστώσα κάθετη τη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου τότε κάνει οριζόντια ή πλάγια βολή



Έστω το ηλεκτρικό πεδίο στη διεύθυνση $-y$: $\vec{E}=-E\hat{y}$, $\vec{E}=-\vec{\nabla}V \Rightarrow -E=-\dfrac{dV}{dy} \Rightarrow V=Ey$

$$\vec{a}=\frac{(\pm q)\vec{E}}{m} \Rightarrow \vec{a}=\frac{(\pm q)(-E)}{m}\hat{y}=\mp\frac{qE}{m}\hat{y} \Rightarrow a_y=\mp a \text{ με } a=\frac{qE}{m},$$

Εξισώσεις κίνησης οριζόντιας βολής για θετικό φορτίο :

$$\upsilon_x=\upsilon_0, \qquad \upsilon_y=-at$$

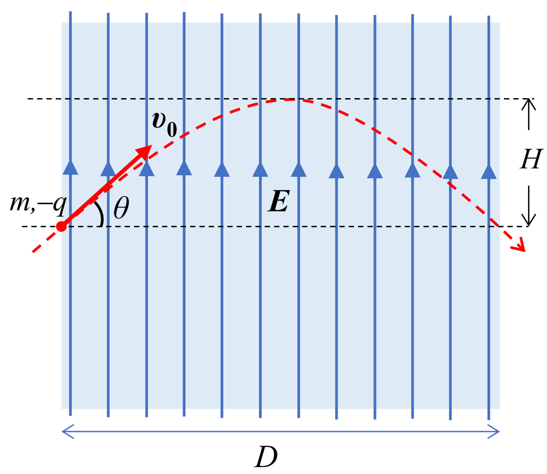
$$x=\upsilon_0 t, \qquad y=-\frac{1}{2}at^2$$

Διατήρηση ενέργειας :

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2+qV_H=\frac{1}{2}m\upsilon^2+qV_{H-y}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}m\upsilon_0^2}+\cancel{qEH}=\cancel{\frac{1}{2}m\upsilon_0^2}+\frac{1}{2}m\upsilon_y^2+qE(\cancel{H}-y) \Rightarrow$$

$$\upsilon_y=\sqrt{\frac{2qEy}{m}}=\sqrt{2ay}$$



Εξισώσεις κίνησης πλάγια βολής αρνητικού φορτίου σε ηλεκτρικό πεδίο στην κατεύθυνση $+y$:

$\vec{E}=E\hat{y}$, $\vec{E}=-\vec{\nabla}V \Rightarrow E=-\dfrac{dV}{dy} \Rightarrow V=-Ey$

$$\vec{a}=\frac{(-q)\vec{E}}{m} \Rightarrow \vec{a}=\frac{(-q)(E)}{m}\hat{y}=-\frac{qE}{m}\hat{y} \Rightarrow a_y=-a \text{ με } a=\frac{qE}{m}$$

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\theta = \sigma\tau\alpha\theta., \qquad \upsilon_y = \upsilon_{0y} - at = \upsilon_0 \sin\theta - at$$

$$x = \upsilon_0 \cos\theta\, t, \qquad y = \upsilon_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2}at^2$$

Διατήρηση ενέργειας : $\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + (-q)V_0 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + (-q)V_H$

$$\cancel{\frac{1}{2}m\upsilon_{0x}^2} + \frac{1}{2}m\upsilon_{0y}^2 + 0 = \cancel{\frac{1}{2}m\upsilon_{0x}^2} + \cancel{\frac{1}{2}m\upsilon_y^2} + (-q)(-EH) \Rightarrow$$

$$H = \frac{m\upsilon_{0y}^2}{2qE} = \frac{\upsilon_{0y}^2}{2a}$$

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό πεδίο

Η μαγνητική δύναμη όντας πάντα κάθετη στην ταχύτητα δεν παράγει έργο πάνω σε ένα φορτισμένο σωματίδιο. Μπορεί να αλλάξει μόνο την διεύθυνση της ταχύτητάς του χωρίς να αλλάξει το μέτρο της. Φορτισμένο σωματίδιο που εισέρχεται σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ θα ακολουθήσει τροχιά που θα κυκλώνει τις γραμμές του μαγνητικού πεδίου.

Σε ομογενές μαγνητικό πεδίο θα έχουμε :

1) αν η ταχύτητά του είναι κάθετη στις γραμμές του μαγνητικού πεδίου **(**$\upsilon_\perp = \upsilon \neq 0, \upsilon_\parallel = 0$**)** τότε θα εκτελέσει **κυκλική κίνηση** με τη μαγνητική δύναμη να παίζει το ρόλο της κεντρομόλου :

$\vec{F}_B = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{\upsilon}\times\vec{B}$ το οποίο γράφουμε ως $\vec{a} = \vec{\omega}\times\vec{\upsilon}$ με $\vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{B} = \sigma\tau\alpha\theta.$

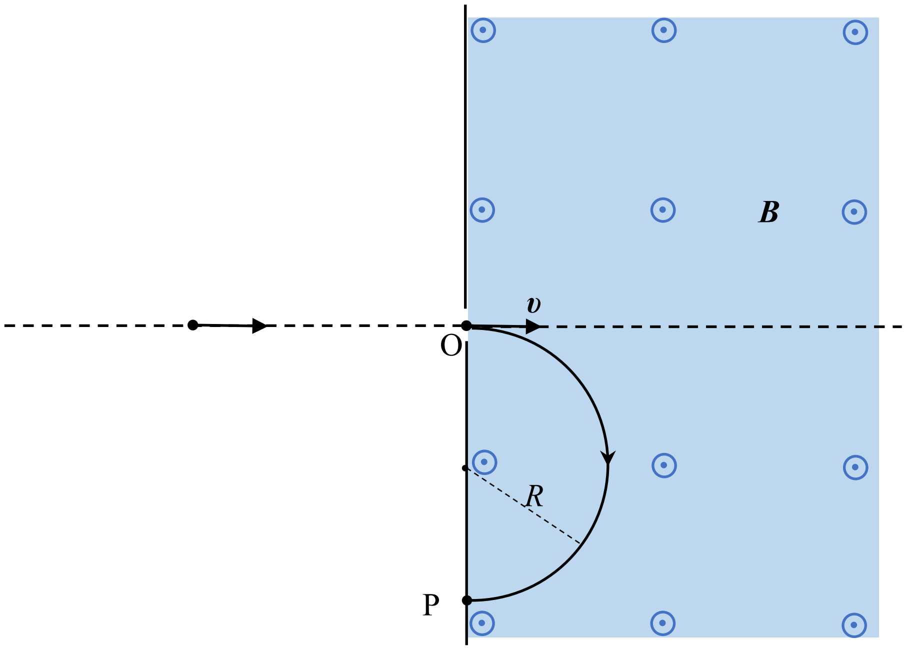
Όμως ξέρουμε ότι η έκφραση $\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}$ είναι κεντρομόλος επιτάχυνση $\vec{a}_n \equiv \vec{a}_c = \vec{\omega}\times\vec{\upsilon}$ και αφού το $\vec{B}$ είναι σταθερό το σωματίδιο θα κάνει ομαλή κυκλική κίνηση. Στην ακτινική διεύθυνση έχουμε

$$F_B = ma_c \Rightarrow q\upsilon B = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{m\upsilon}{qB} = \frac{p}{qB}}$$

Η μέτρηση της ακτίνας της τροχιάς αποτελεί πειραματική μέθοδο μέτρησης της ορμής του σωματιδίου.

Η συχνότητα της περιστροφής είναι ανεξάρτητη της ακτίνας και της ταχύτητας:

$$\omega = \frac{qB}{m} \quad \text{και} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$$



2) αν το σωματίδιο έχει ταχύτητα που σχηματίζει γωνία θ με τις γραμμές του μαγνητικού πεδίου:

$$\upsilon_\perp = \upsilon\sin\theta, \qquad \upsilon_\parallel = \upsilon\cos\theta$$

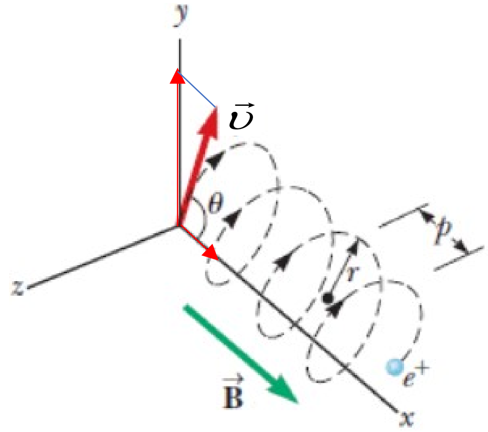
τότε εκτελεί **σπειροειδή (ελικοειδή) τροχιά** γύρω από τις γραμμές του πεδίου.

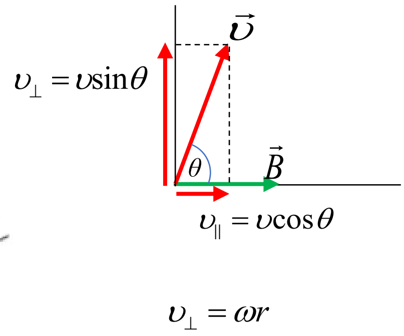
Η ακτίνα της σπείρας εξαρτάται από το μέτρο της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας: $R = \dfrac{m\upsilon_\perp}{qB}$

Η συχνότητα της περιστροφής είναι πάλι $f = \dfrac{qB}{2\pi m}$ ενώ η περιστροφή διαρκεί $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi m}{qB}$.

Το βήμα της έλικας (pitch) εξαρτάται από την παράλληλη συνιστώσα της ταχύτητας και είναι

$p = \upsilon_{\parallel} T \Rightarrow \ p = 2\pi \dfrac{m\upsilon\cos\theta}{qB}$ (εδώ το *p* δεν είναι η ορμή)





3) αν το σωματίδιο έχει ταχύτητα παράλληλη στις γραμμές του μαγνητικού πεδίου τότε **δεν επηρεάζεται** καθόλου από το μαγνητικό πεδίο επειδή η μαγνητική δύναμη είναι ίση με μηδέν $\vec{F}_B = q\vec{\upsilon} \times \vec{B} = 0$.

Επιλογέας ταχυτήτων

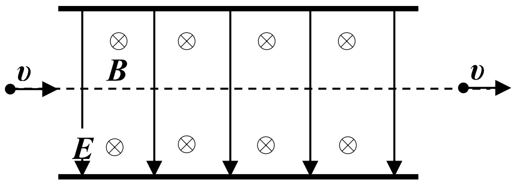
Το σωματίδιο θα περάσει ανεπηρέαστο μέσα από ένα χώρο με διασταυρούμενα καθέτως ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο και ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο αν η ταχύτητά του είναι τέτοια ώστε οι δύο δυνάμεις να αλληλοαναιρούνται :

$$F_e = F_m \Rightarrow qE = q\upsilon B \Rightarrow \boxed{\upsilon = \frac{E}{B}}$$

Αυτό δεν επηρεάζεται από το φορτίο ή τη μάζα του σωματιδίου (εφόσον το βάρος είναι αμελητέο). Κάθε σωματίδιο με αυτήν την ταχύτητα ανεξαρτήτως μάζας και φορτίου θα περάσει σε ευθεία μέσα από τα δύο πεδία χωρίς να παρεκκλίνει.

Αν το σωματίδιο κάνει την αντίστροφη πορεία (**–υ**) τότε, δεν θα περάσει σε ευθεία αλλά θα αποκλίνει γιατί η ηλεκτρική δύναμη θα παραμείνει ίδια αλλά η μαγνητική θα αλλάξει φορά.

±*q*: οποιοδήποτε
m: οποιαδήποτε



αν *υ*=*E*/*B*

Προσδιορισμός του λόγου e/m_e με το πείραμα του Thomson

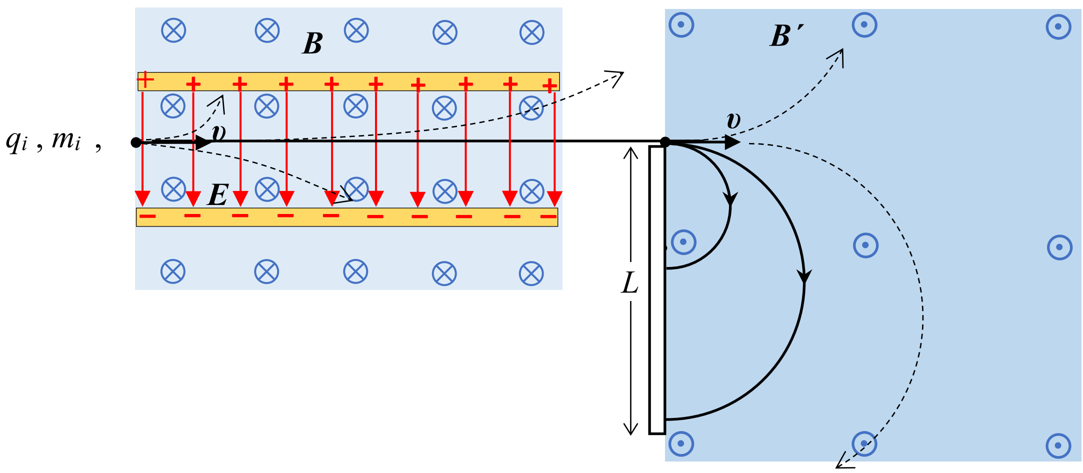
Αν ηλεκτρόνια (ή κάθε είδους φορτισμένα σωματίδια) έχουν επιταχυνθεί μέσω ηλεκτροστατικού δυναμικού V (άρα ξέρουμε την ταχύτητά τους) και στη συνέχεια οδηγηθούν μέσα από επιλογέα ταχυτήτων E/B ώστε να περάσουν χωρίς απόκλιση, τότε μπορεί να καθοριστεί ο λόγος e/m_e του φορτίου προς τη μάζα τους (q/m) :

$$eV = \frac{1}{2} m_e \upsilon^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{2eV}{m_e} \Rightarrow \frac{E^2}{B^2} = 2V\frac{e}{m_e} \Rightarrow \boxed{\frac{e}{m_e} = \frac{E^2}{2VB^2}}$$

Φασματογράφος μάζας

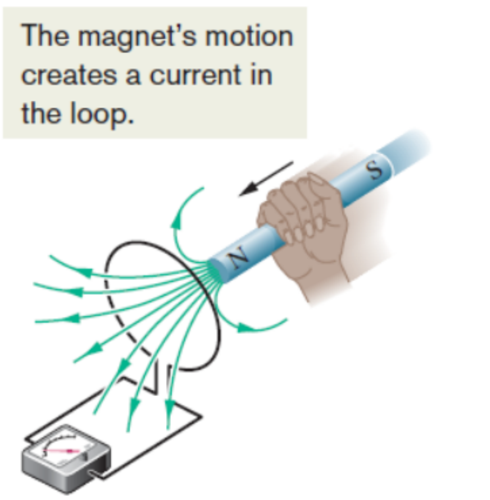
Γνωρίζοντας το φορτίο ενός ιόντος μπορούμε να προσδιορίσουμε τη μάζα του μέσω της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς που εκτελεί σε μαγνητικό πεδίο B' κάθετο στην ταχύτητά του, αν πρώτα έχει περάσει από επιλογέα ταχυτήτων E/B ώστε να είναι γνωστή η ταχύτητά του

$$R = \frac{m\upsilon}{qB'} = \frac{m}{qB'}\frac{E}{B} \Rightarrow \boxed{m = \frac{BB'}{E}qR}$$

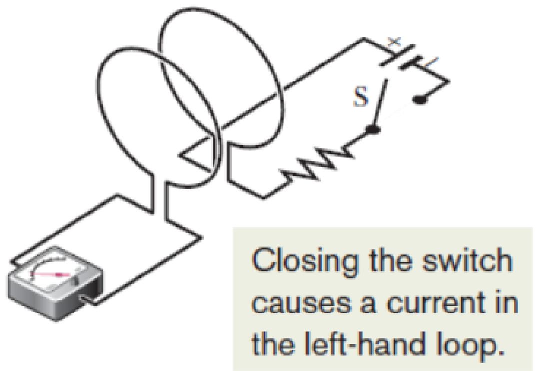


ΧΡΟΝΙΚΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΑ ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΠΕΔΙΑ (ΜΗ ΣΤΑΤΙΚΑ) ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Νόμος επαγωγής του Faraday



An ammeter registers a current in the wire loop when the magnet is moving with respect to the loop.



An ammeter registers a current in the left-hand wire loop just as switch S is closed (to turn on the current in the right-hand wire loop) or opened (to turn off the current in the right-hand loop). No motion of the coils is involved.

Όταν η μαγνητική ροή μέσα από κλειστό αγώγιμο βρόχο μεταβάλλεται, τότε εμφανίζεται στο βρόχο ηλεκτρεγερτική δύναμη η οποία ονομάζεται επαγωγική τάση (είναι σαν να συνδέσαμε το βρόχο με μπαταρία)

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Ηλεκτρεγερτική δύναμη είναι το έργο του ηλεκτρικού πεδίου: $\mathscr{E} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\Delta V_{ab} = V_a - V_b$

Εδώ έχουμε κλειστή διαδρομή άρα το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί την επαγωγική τάση δεν θα είναι διατηρητικό! Είναι ένα διαφορετικό ηλεκτρικό πεδίο από αυτό που δημιουργούν στατικά φορτία.

Stokes: $\int_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A}$

Μαγνητική ροή : $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$

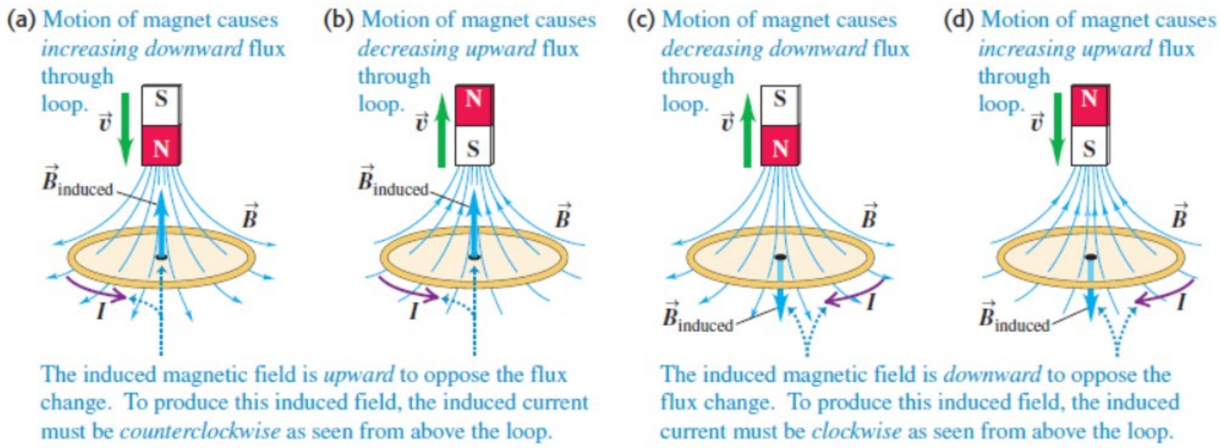
Αν μόνο το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται τότε $-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}\right) = \int_A \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{A}$

Εξισώνοντας τις ολοκληρωτέες ποσότητες παίρνουμε την :

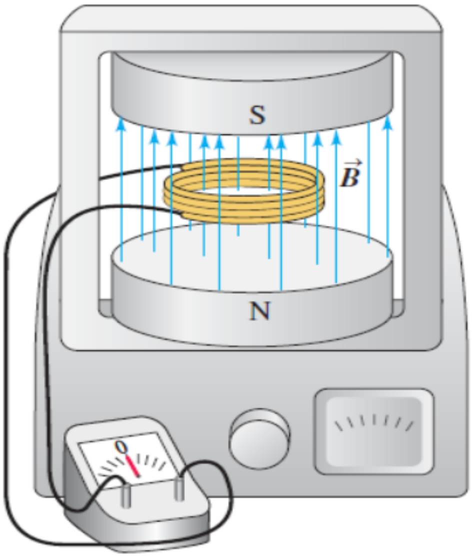
3η εξίσωση Maxwell : $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Το ηλεκτροστατικό πεδίο φορτίων ικανοποιούσε την $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

Νόμος Lenz : Το επαγωγικό αποτέλεσμα τείνει να αναιρέσει την αιτία που το προκάλεσε



A coil in a magnetic field. When the $\vec{B}$ field is constant and the shape, location, and orientation of the coil do not change, no current is induced in the coil. A current is induced when any of these factors change.



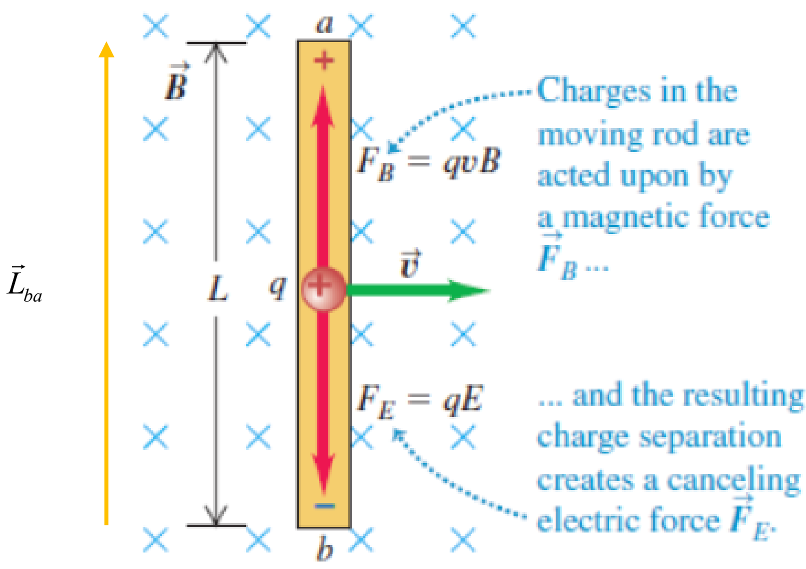
Τρόποι δημιουργίας επαγωγικής τάσης

$$\Phi = \vec{B}\cdot \vec{A} = B(\vec{r},t)A\cos\varphi$$

1) Να μεταβάλλεται το μαγνητικό πεδίο χρονικά ($\partial\vec{B}/\partial t \neq 0$ 3η εξίσωση Maxwell)
2) Το πεδίο να μην είναι ομογενές και ο βρόχος να κινείται. Αλλάζοντας θέση, βρίσκεται σε περιοχή που το πεδίο έχει διαφορετική τιμή και άρα η ροή θα αλλάξει ($\partial\vec{B}/\partial x \neq 0$ κλπ.)
3) Να αλλάζει το σχήμα ώστε να μεταβάλλεται το εμβαδόν του βρόχου (A)
4) Να αλλάζει ο προσανατολισμός του βρόχου ως προς το πεδίο (η γωνία φ μεταξύ τους)

Επαγωγική τάση από κίνηση αγωγού

(a) Isolated moving rod



$F_E = F_B \Rightarrow qE = q\upsilon B$

$V_{ab} = V_a - V_b = EL$

$$V_{ab} = B\upsilon L$$

Μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι διανυσματικά η σχέση αυτή γράφεται : $V_{ab} = \left(\vec{\upsilon} \times \vec{B}\right) \cdot \ \vec{L}_{ba}$

Αν η ταχύτητα ***υ*** της ράβδου είναι παράλληλη με το ***B*** δηλαδή δεν «κόβει» δυναμικές γραμμές όπως κινείται τότε δεν δημιουργείται επαγωγική τάση. Αν σχηματίζει γωνία *θ* με τις δυναμικές γραμμές του ***B*** τότε επειδή $F_B = q\upsilon B\sin\theta$ θα δημιουργείται επαγωγική τάση ίση με: $V_{ab} = B\upsilon L\sin\theta$

Το $\vec{L}$, το ορίζουμε τυχαία, αλλά προσπαθούμε να δείχνει από τον αρνητικό προς το θετικό πόλο.

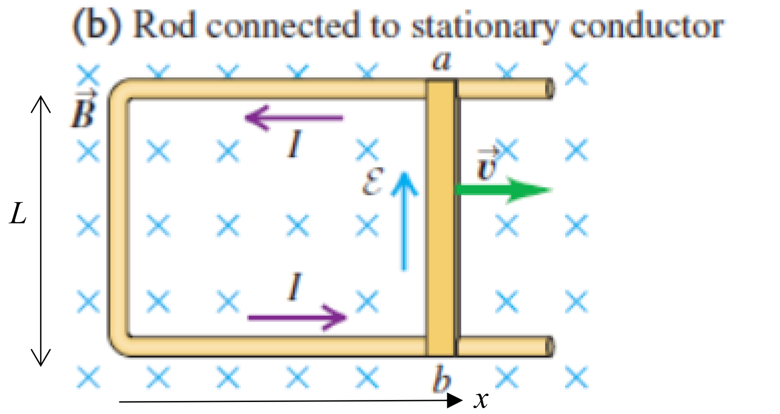
Αν η επαγωγική τάση βγει θετική τότε το $\vec{L}$ δείχνει από τον αρνητικό πόλο προς τον θετικό πόλο **(– → +)** όπως στο παραπάνω σχήμα.

Αν η επαγωγική τάση βγει αρνητική τότε το $\vec{L}$ δείχνει από τον θετικό πόλο προς τον αρνητικό πόλο **(+ → –)**

Η γενίκευση για μη ευθύγραμμη ράβδο είναι : $d\mathcal{E} = \left(\vec{\upsilon} \times \vec{B}\right) \cdot \ d\vec{\ell}$

$$\text{και } \mathcal{E} = \int_C \left(\vec{\upsilon} \times \vec{B}\right) \cdot \ d\vec{\ell}$$

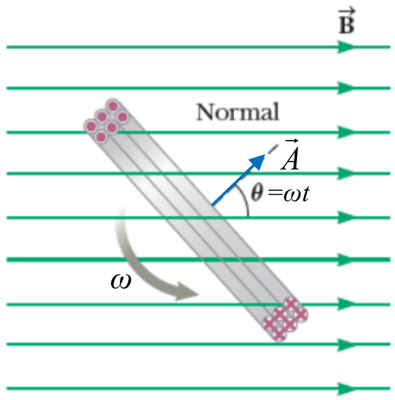
Η κινούμενη ράβδος γίνεται πηγή (μπαταρία) με ΗΕΔ V_{ab} και αν συνδεθεί με αγωγούς θα προκαλέσει ηλεκτρικό ρεύμα στο κύκλωμα. **Μέσα στη ράβδο τα θετικά ηλεκτρικά φορτία κινούνται από το χαμηλότερο δυναμικό στο σημείο *b* στο υψηλότερο δυναμικό στο σημείο *a* (αντίθετα από το ηλεκτρικό πεδίο).**

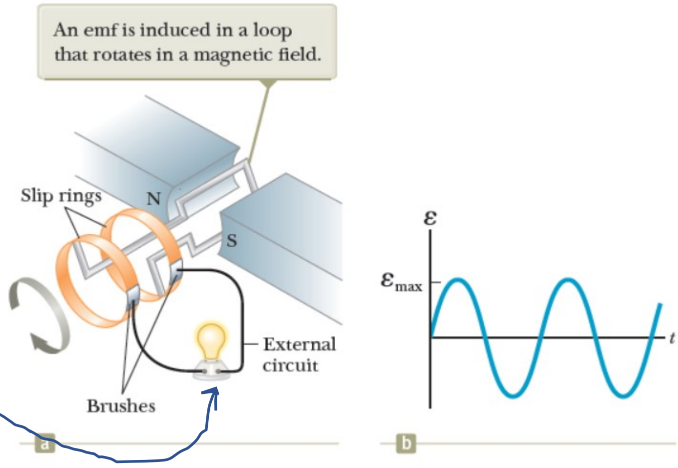


Το ίδιο παίρνουμε και από : $\left|\dfrac{d\Phi}{dt}\right| = \dfrac{d}{dt}(BLx) = BL\dfrac{dx}{dt} = B\upsilon L$

Ηλεκτρική γεννήτρια εναλλασσόμενου ρεύματος

Ο πιο εύκολος τρόπος να παράγουμε επαγωγική τάση είναι να περιστρέφουμε ένα πλαίσιο μέσα σε ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο *B*. Το πλαίσιο έχει εμβαδόν *A* και αποτελείται από *N* (σπείρες) τυλίγματα. Περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα *ω*. Θεωρούμε ως χρονική στιγμή *t*=0 όταν το πλαίσιο είναι κάθετο στο μαγνητικό πεδίο ($\vec{A} \uparrow\uparrow \vec{B}$) και διαρρέεται από τη μέγιστη μαγνητική ροή.





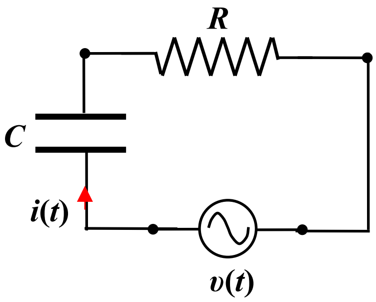
Κύκλωμα AC

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = BNA\cos\theta = BNA\cos\omega t$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -BNA\frac{d\cos\omega t}{dt} = BNA\omega\sin\omega t \Rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}_{max}\sin\omega t$$

Όπως γυρίζει το πλαίσιο, στις ψήκτρες (brushes) του σχήματος, παίρνουμε ημιτονοειδή τάση, αρά μεταβαλλόμενης πολικότητας, που ονομάζεται εναλλασσόμενη τάση. Το πλάτος της είναι : $\mathcal{E}_{max} = BNA\omega$

Αυτή η πηγή συμβολίζεται με το σύμβολο του ημιτόνου μέσα σε ένα κυκλάκι και το κύκλωμα το οποίο τροφοδοτεί λέγεται κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος (AC = alternating current)



Κύκλωμα RC
με πηγή AC

Το ρεύμα ποτέ δεν
σταματά σε αντίθεση
με την πηγή DC

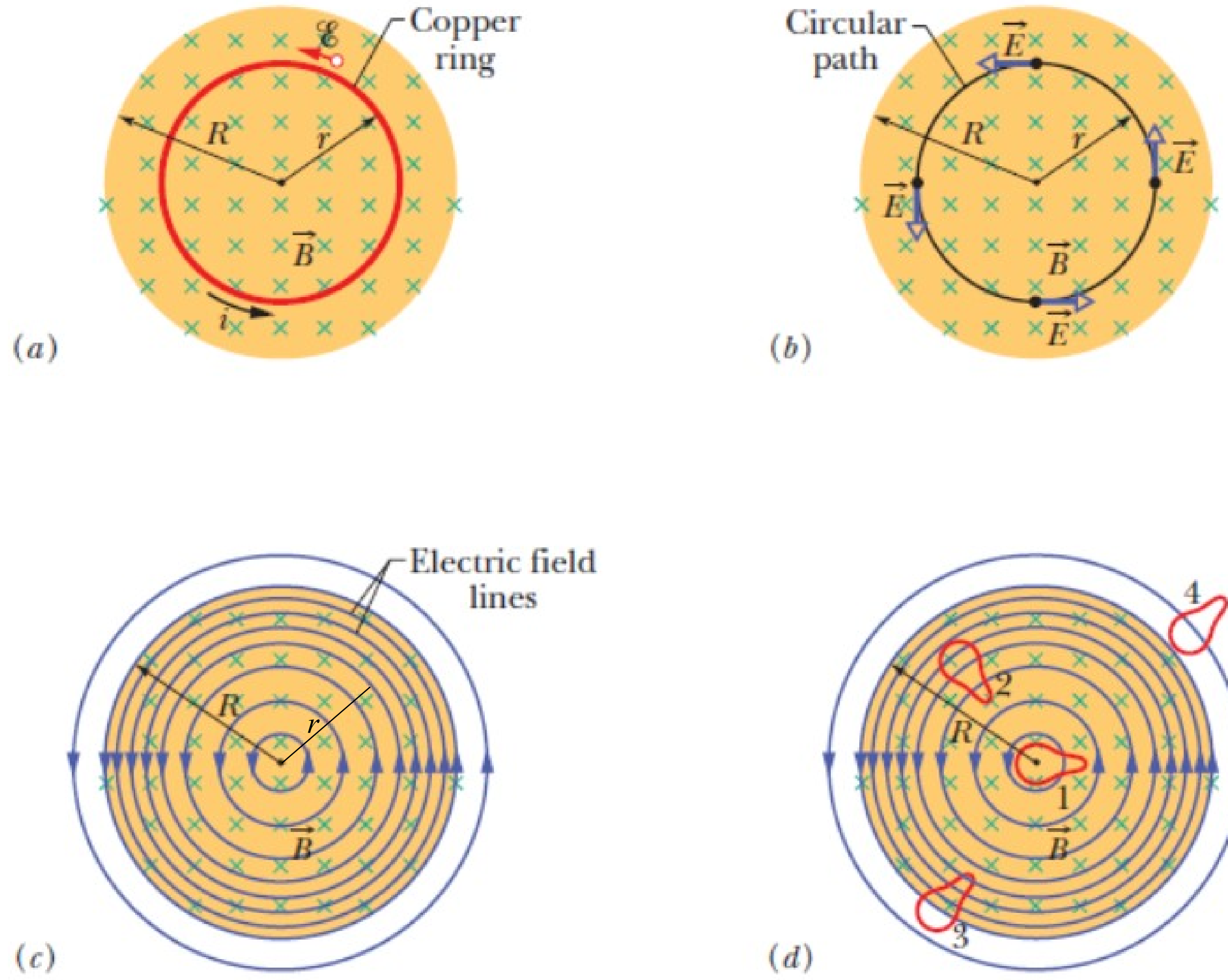
Δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου από χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο.

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι εκεί ακόμα και αν δεν υπάρχει αγωγός στον οποίο να προκαλέσει ρεύμα. Το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται (επάγεται) στο χώρο από το μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο σύμφωνα με τον νόμο του Faraday.

Έστω κυλινδρικός χώρος που έχει μαγνητικό πεδίο, με φορά προς τα μέσα όπως στο παρακάτω σχήμα, το μέτρο του οποίου αυξάνεται. Τότε δημιουργείται γύρω του ηλεκτρικό πεδίο.

Βρίσκουμε τη φορά του από το νόμο του Lenz. Το ρεύμα που θα προκαλέσει αυτό το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να δημιουργήσει μαγνητικό πεδίο που να αντιτίθεται στην αύξηση του πρώτου μαγνητικού πεδίου. Άρα να δείχνει προς τα έξω. Άρα το πεδίο γυρίζει ανθωρολογιακά.

Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας, το ηλεκτρικό πεδίο θα έχει σταθερό μέτρο πάνω σε ένα κύκλο γύρω από τον κύλινδρο. Έτσι υπολογίζουμε την επαγωγική ΗΕΔ πάνω σε μια καμπύλη C που είναι κύκλος.



$$\int_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \int_C Eds = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E\int_C ds = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E2\pi r = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\Phi}{dt}\cdot\frac{1}{r}$$

Όταν υπολογίζουμε τη μαγνητική ροή, για να ικανοποιήσουμε τον κανόνα του Lenz, πρέπει να παίρνουμε ως προσανατολισμό της επιφάνειας αυτόν που είναι αντίθετος από τη μεταβολή του μαγνητικού πεδίου και ως φορά διαγραφής του κύκλου αυτόν που προκύπτει από τον προσανατολισμό της επιφάνειας με τον κανόνα του δεξιού χεριού.
Τότε το ηλεκτρικό πεδίο θα βγαίνει από τον παραπάνω τύπο θετικό και αυτό θα σημαίνει ότι ακολουθεί τη φορά διαγραφής του κύκλου στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα και άρα τυλίγεται και αυτό γύρω από τον προσανατολισμό της επιφάνειας σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Εδώ η μεταβολή είναι προς τα μέσα παράλληλα με το πεδίο (αφού αυξάνεται). Οπότε ο προσανατολισμός της επιφάνειας του κυκλικού δίσκου θα είναι προς τα έξω, αντίθετα με το μαγνητικό πεδίο. Έτσι η μαγνητική ροή θα είναι

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{A} = -BA$$

Για $r < R$ η ροή εξαρτάται από την απόσταση r. Έχουμε $\Phi(r) = -BA(r) = -B\cdot 4\pi r^2$ για το τμήμα της συνολικής ροής που περνάει από τον κυκλικό δίσκο με ακτίνα r μικρότερης του R και άρα

$$\frac{d\Phi(r)}{dt} = \frac{d}{dt}(-B\pi r^2) = -\pi r^2\frac{dB}{dt}$$

Οπότε προκύπτει ότι μέσα στο χώρο του μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο θα είναι ανάλογο με την απόσταση από το κέντρο δηλαδή με δυναμικές γραμμές που πυκνώνουν προς τα έξω

$$E = -\frac{1}{2\pi}\left(-\pi r^2 \frac{dB}{dt}\right)\frac{1}{r} = \left(\frac{dB}{dt}\right)\cdot \frac{r}{2} \qquad \text{ανθωρολογιακά στη σελίδα}$$

Όταν το μαγνητικό πεδίο αυξάνεται το ηλεκτρικό πεδίο έχει τη φορά του σχήματος ώστε να δημιουργήσει ηλεκτρικό ρεύμα που θα μειώσει το μαγνητικό πεδίο

Για οποιοδήποτε $r > R$, περικλείουμε τη μαγνητική ροή όλου του δίσκου που καταλαμβάνει το μαγνητικό πεδίο $\Phi \equiv \Phi(R) = -B\cdot\ \pi R^2$ οπότε η

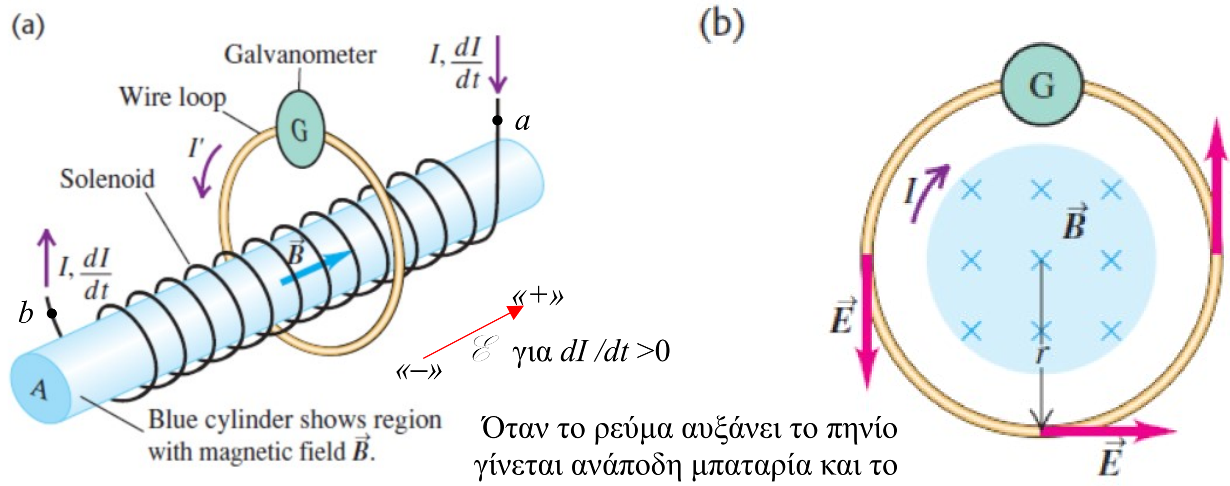
$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(-B\pi R^2) = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

δεν εξαρτάται από το r

Τότε το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με την απόσταση r από το κέντρο

$$E = -\frac{1}{2\pi}\left(-\pi R^2 \frac{dB}{dt}\right)\frac{1}{r} = \left(R^2 \frac{dB}{dt}\right)\cdot \frac{1}{2r}$$

Αυτεπαγωγή πηνίου



Όταν το ρεύμα αυξάνει το πηνίο γίνεται ανάποδη μπαταρία και το εμποδίζει

$\Phi_k = BA = \mu_0 nIA$ μαγνητική ροή μέσα από μια σπείρα

$\Phi = \sum_{k=1}^{N} \Phi_k = NBA = N\mu_0 nIA = \frac{\mu_0 N^2 A}{L}\cdot\ i$ συνολική μαγνητική ροή

Ο λόγος $L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{L}$ ονομάζεται συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου.

Μετριέται σε χένρι (H): $[L] = \frac{[\mathscr{E}][t]}{[I]} \Rightarrow \mathrm{H} = \frac{\mathrm{V\cdot\ s}}{\mathrm{A}}$

SOS Άσκηση: Δείξτε ότι οι μονάδες της μαγνητικής σταθεράς μ_0 είναι H/m

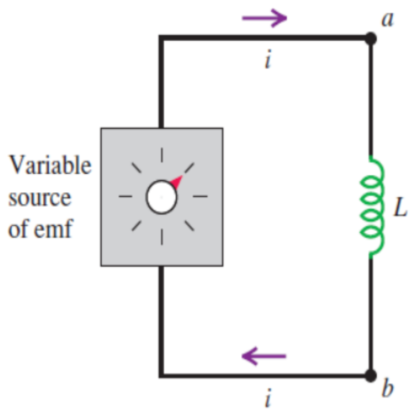
$$[\mu_0] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} = \frac{\mathrm{J/m}}{\mathrm{A\ C/s}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{V\ s}}{\mathrm{A}}\frac{1}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$$

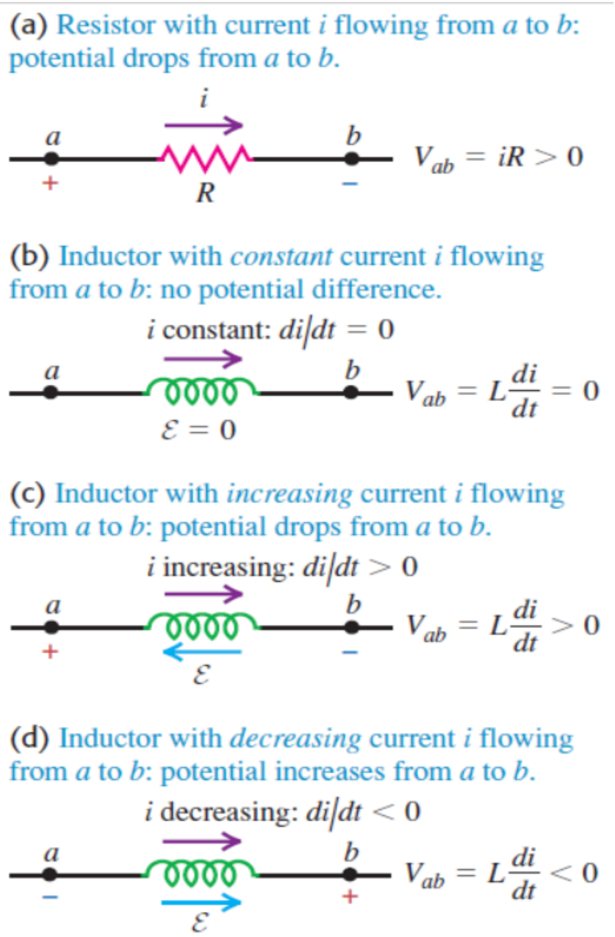
Η επαγωγική τάση είναι : $\mathscr{E} = -N\frac{d\Phi}{dt} = -N\mu_0 nA\frac{dI}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$

Βλέπουμε από το νόμο του Lenz ότι έχει αντίθετο πρόσημο από τη μεταβολή του ρεύματος. Όταν το ρεύμα αυξάνει το πηνίο γίνεται αντίθετη «μπαταρία» και το εμποδίζει

Άρα σε ένα πηνίο που βρίσκεται μέσα σε ένα κύκλωμα η «πτώση τάσης» στα άκρα του, η οποία ορίζεται ως το «δυναμικό» στο σημείο που μπαίνει το ρεύμα μείον το «δυναμικό» στο σημείο που βγαίνει το ρεύμα, θα δίνεται από τον τύπο :

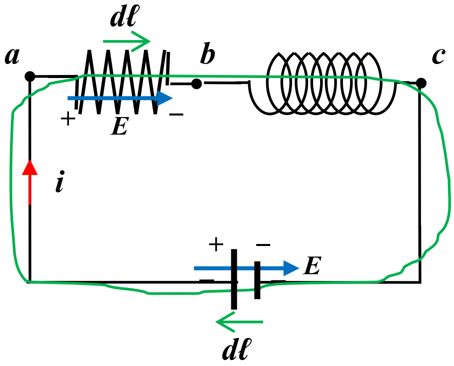
$$V_{ab} = L\frac{dI}{dt}$$





Κύκλωμα *RL* και ο Κανόνας Τάσεων του "Kirchhoff" (Faraday) σε κυκλώματα με μεταβαλλόμενα μαγνητικά πεδία

Τα παραπάνω αναλύονται στο επόμενο κύκλωμα *RL* με πηγή συνεχούς ρεύματος.



Ηλεκτροστατικό ηλεκτρικό πεδίο **E** υπάρχει όπου υπάρχει διαφορά δυναμικού και δείχνει προς την κατηφόρα του δυναμικού.
Αυτό συμβαίνει στην πηγή που είναι ένας μηχανισμός διαχωρισμού φορτίου. $\mathcal{E} = V_{ac} > 0$ και στην ωμική αντίσταση όπου η πτώση τάσης είναι $V_{ab} = V_a - V_b > 0$
Στις ωμικές αντιστάσεις ισχύει ο Νόμος του Ohm : $\rho \mathbf{J} = \mathbf{E}$, δηλ. η πυκνότητα ρεύματος ($J=i/A$) είναι ανάλογη του πεδίου
Όπου ρ=ειδική αντίσταση, A=διατομή σύρματος .
Η πυκνότητα ρεύματος είναι σταθερή και στην κατεύθυνση του σύρματος $\boldsymbol{\ell}$ και άρα και το πεδίο είναι σταθερό. Από τον ορισμό της διαφοράς δυναμικού και τον νόμο του Ohm παίρνουμε $i=V_{ab}/R$ με $V_{ab}=E\ell$ και $R=\rho\ell/A$ όπου ℓ το μήκος του σύρματος μεταξύ a και b.
Το πηνίο είναι ιδανικό (π.χ. υπεραγωγός) και δεν έχει ωμική αντίσταση. Δεν υπάρχει ηλεκτροστατικό ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο πηνίο. Υπάρχει μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο κατά μήκος του και άρα μη-διατηρητικό ηλεκτρικό πεδίο σε κύκλους γύρω του. Στο κέντρο είναι μηδέν όπως δείξαμε. Σε μια ευθεία που περνάει παράλληλα με τον άξονα του πηνίου θα είναι κάθετο και άρα δεν θα συνεισφέρει στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

Κανόνας «Kirchhoff» (Faraday) στο βρόχο:

$$\int_{abca} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \underbrace{\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}_{\text{Νόμος Ohm}} + \int_c^a \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\underbrace{\frac{d\Phi}{di}}_{\text{ορισμός } L}\frac{di}{dt} \Rightarrow$$

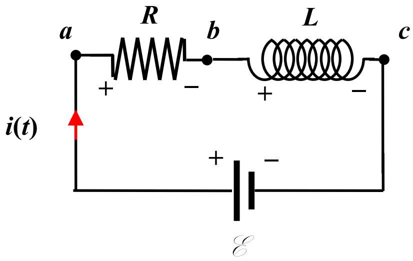
$$\int_a^b \rho\vec{J}\cdot d\vec{\ell} - \int_a^c \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -L\frac{di}{dt} \Rightarrow \rho\frac{i}{A}\ell + L\frac{di}{dt} = \underbrace{\int_a^c \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}_{\text{ορισμός ΗΕΔ } \ \mathcal{E}=V_{ac}} \Rightarrow$$

$$i\underbrace{\left(\rho\frac{\ell}{A}\right)}_{\text{ορισμός } R} + L\frac{di}{dt} = V_{ac}$$

Φέραμε τον όρο di/dt αριστερά και θα τον αντιμετωπίσουμε σαν πτώση τάσης V_{bc} που συμπεριφέρεται ως εξής: όταν το ρεύμα αυξάνει, από τον κανόνα του Lenz, το πηνίο γίνεται αντίθετη μπαταρία (επαγωγική ΗΕΔ) για να το εμποδίσει (και το αντίστροφο). Οπότε με $V_{ab} = iR$ και $V_{bc} = L\frac{di}{dt}$ παίρνουμε τον κανόνα «Kirchhoff»:

$$V_{ac} = V_{ab} + V_{bc} \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} = iR + L\frac{di}{dt}$$



Αυτή είναι μια διαφορική εξίσωση που λύνεται εύκολα πολλαπλασιάζοντας με $e^{\frac{R}{L}t}$

$$\mathcal{E}\, e^{\frac{R}{L}t} = iRe^{\frac{R}{L}t} + L\frac{di}{dt}e^{\frac{R}{L}t}$$

$$\mathcal{E}\, e^{\frac{R}{L}t} = \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{R}{L}t}Li\right)$$

$$\mathcal{E}\int_0^t e^{\frac{R}{L}t}dt = \int_{\dots}^{\dots} d\left(e^{\frac{R}{L}t}Li\right)$$

$$t=0 \quad i_0 = 0$$

$$t\to\infty \quad i_\infty = I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

$$\mathcal{E}\frac{L}{R}\left(e^{\frac{R}{L}t}-1\right) = e^{\frac{R}{L}t}Li \Rightarrow$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad \text{εκθετική ανάπτυξη ρεύματος}$$

$$\frac{dW}{dt} = V_{bc}(t)i(t) = L\frac{di}{dt}i \Rightarrow dW = Li\,di \Rightarrow W = L\int_0^I i\,di \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2}LI^2 \quad \text{ενέργεια πηνίου}$$

Πυκνότητα ενέργειας μαγνητικού πεδίου : $u_B = \frac{W}{AL} = \frac{1}{AL}\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{AL}\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 N^2 A}{L}\right)\frac{B^2}{\mu_0^2\, N^2/L^2} \Rightarrow$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Σχέση ισχύων :

Ρεύμα μετατόπισης Maxwell

Στις μέχρι τώρα εξισώσεις που περιγράφουν το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{Gauss} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \text{Gauss}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{Faraday} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} \quad \text{Ampere}$$

ο Maxwell παρατήρησε μια αισθητική ασυμμετρία στο νόμο του Ampere. Ο στροβιλισμός του ηλεκτρικού πεδίου σχετίζεται με την χρονική μεταβολή του μαγνητικού πεδίου (Faraday) αλλά στο στροβιλισμό του μαγνητικού πεδίου (Ampere) δεν υπάρχει καμία αναφορά στη χρονική μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου.

Έτσι συμπλήρωσε το νόμο του Ampere βάζοντας με το χέρι έναν όρο $J_D = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ που έχει μονάδες πυκνότητας ρεύματος το οποίο ονόμασε ρεύμα μετατόπισης.

Έτσι οι εξισώσεις Maxwell είναι :

$$\vec{\nabla}\cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1) \qquad\qquad \vec{\nabla}\cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

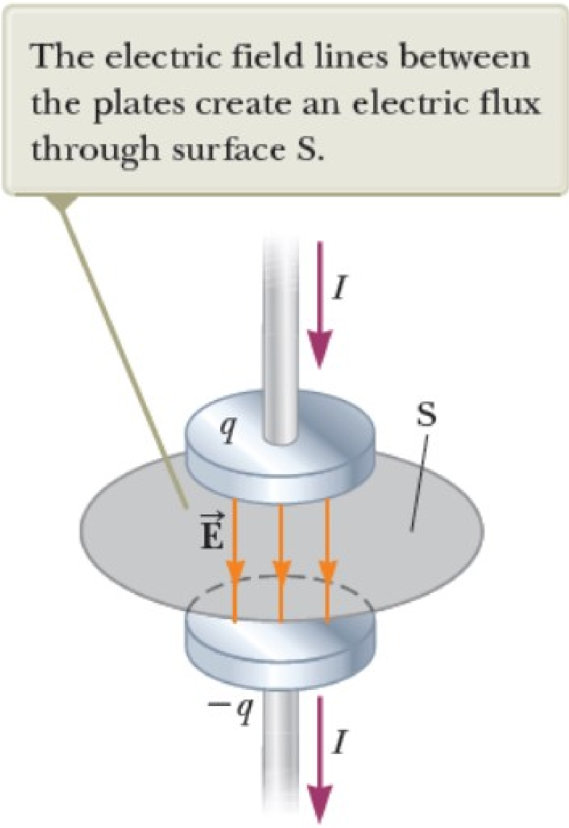
$$\vec{\nabla}\times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3) \qquad\qquad \vec{\nabla}\times \vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \quad (4)$$

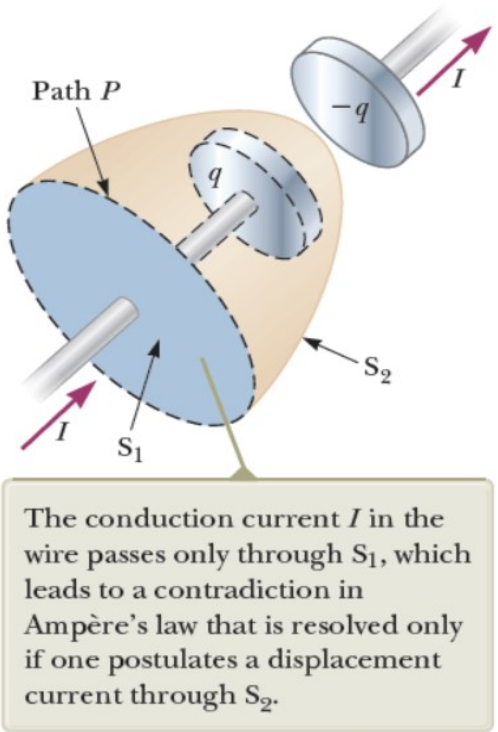
Η ολοκληρωτική μορφή του νόμου του Ampere γίνεται τώρα :

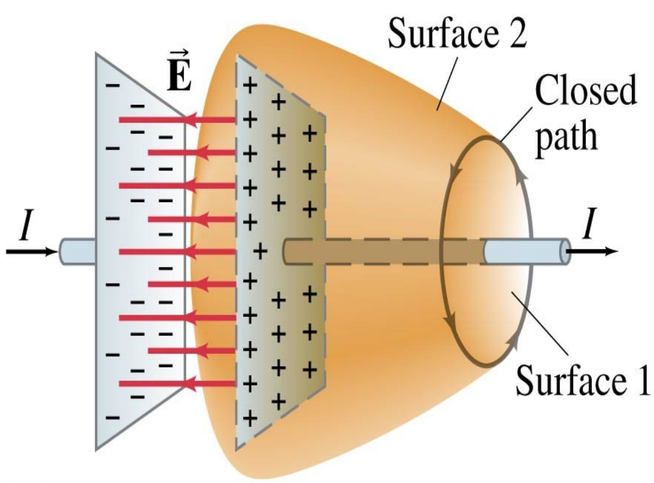
$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I_{\pi\varepsilon\rho\iota\kappa\lambda} + i_D) = \mu_0 I_{\pi\varepsilon\rho\iota\kappa\lambda} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

με $i_D = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ το ρεύμα μετατόπισης. Αυτός μοιάζει με το νόμο του Faraday $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ και δηλώνει ότι πηγή του μαγνητικού πεδίου δεν είναι μόνο τα ηλεκτρικά ρεύματα αγωγιμότητας αλλά και ένα χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο

Η νέα αυτή μορφή του μαγνητικού πεδίου παρατηρήθηκε πειραματικά και άρα το ρεύμα μετατόπισης του Maxwell είναι πραγματικό. Αυτό γίνεται έκδηλο στο κύκλωμα φόρτισης του πυκνωτή.







Ο νόμος του Ampere καταρρέει επειδή η επιφάνεια S_1 διαπερνάται από ρεύμα ενώ η S_2 όχι! Όμως ο νόμος πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε αυθαίρετη επιφάνεια που έχει όριο την καμπύλη C που τυλίγει τον ρευματοφόρο αγωγό (είναι το καπάκι της C). Άρα στον κενό χώρο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή όπου δεν υπάρχει ρεύμα αγωγιμότητας πρέπει να βάλουμε κάτι που να έχει την ίδια τιμή με το ρεύμα I :

$$\int_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 i_D$$

Ο πρώτος όρος διαπερνά την επιφάνεια S_1 και ο 2^{ος} την S_2. Άρα πρέπει να είναι ίσοι.

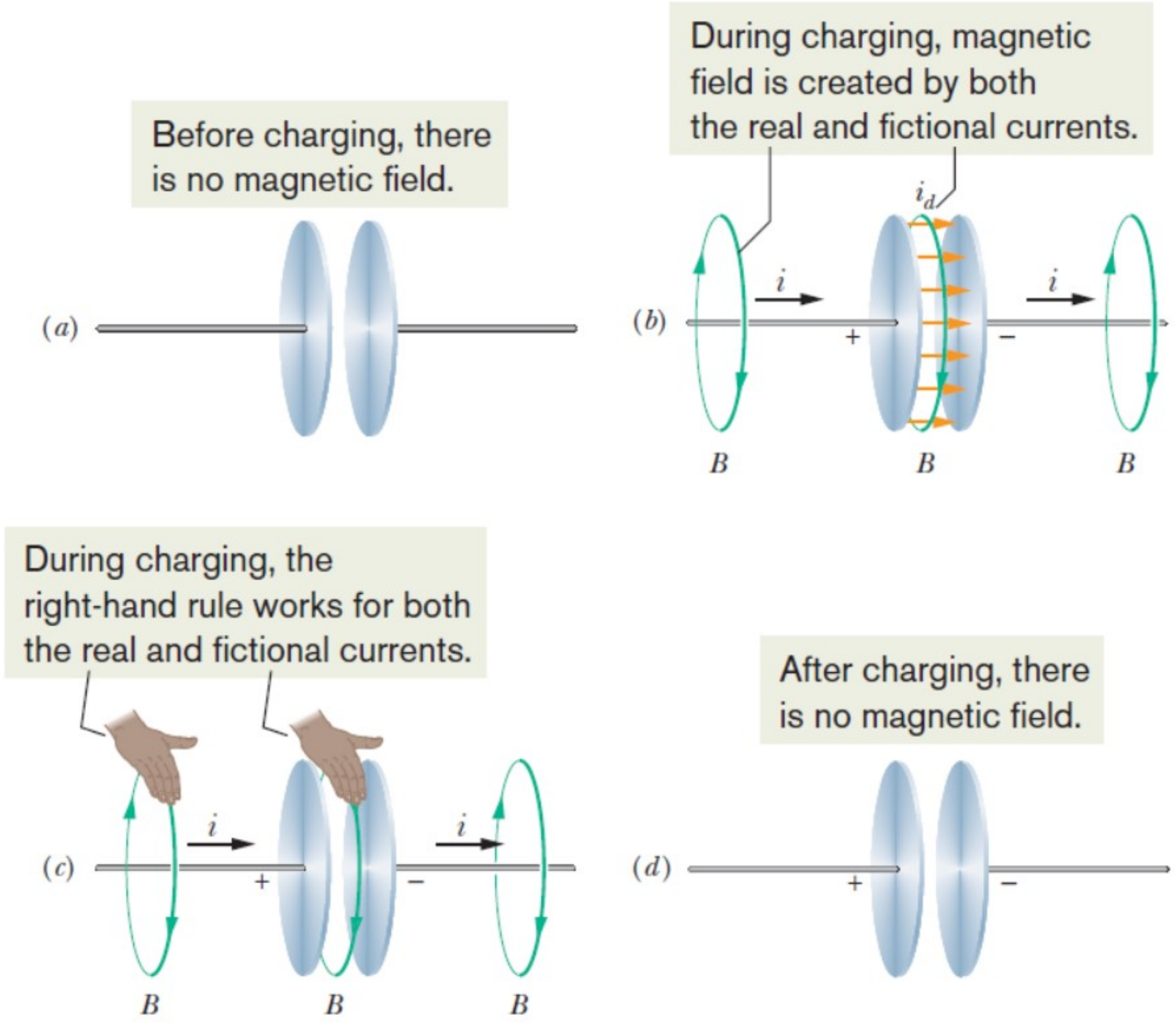
Πράγματι :

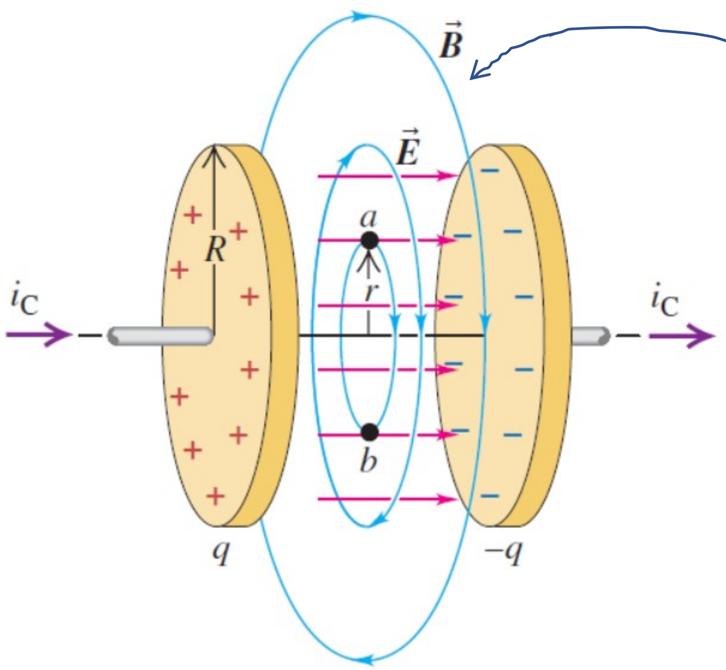
Φόρτιση πυκνωτή: $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Πραγματικό ρεύμα : $I = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{d(\sigma A)}{dt} = \dfrac{d(\varepsilon_0 EA)}{dt} = \varepsilon_0 A\dfrac{dE}{dt}$

Πλασματικό ρεύμα μετατόπισης: $i_D = \varepsilon_0 \dfrac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \dfrac{d(EA)}{dt} = \varepsilon_0 A\dfrac{dE}{dt}$

$$I = i_D$$





Για όσο ο πυκνωτής φορτίζει δημιουργείται μεταξύ των οπλισμών του και μαγνητικό πεδίο