Βολή με Γραμμική Οπισθέλκουσα 2 – Projectile motion with Linear Drag 2

Αποτελέσματα έως τώρα

Παράμετροι και σταθερές

$$F_G = mg\,,\qquad F_D = b\upsilon \ \ \text{(Stokes)},\qquad \tau = \frac{m}{b}\,,\qquad \upsilon_{term} = \frac{mg}{b}\,,\qquad c = \frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\,,\qquad \zeta = 1 + c\sin\theta$$

Εξισώσεις κίνησης

$$x(t) = \upsilon_0 \tau \cos\theta \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad y(t) = \upsilon_{term}\left[\left(1 + \frac{\upsilon_0 \sin\theta}{\upsilon_{term}}\right)\tau(1 - e^{-t/\tau}) - t\right] = \upsilon_{term}\tau\left[\zeta(1 - e^{-t/\tau}) - \frac{t}{\tau}\right]$$

$$\upsilon_x(t) = \upsilon_0 \cos\theta e^{-t/\tau} \qquad \upsilon_y(t) = \upsilon_{term}\left[\left(1 + \frac{\upsilon_0 \sin\theta}{\upsilon_{term}}\right)e^{-t/\tau} - 1\right] = \upsilon_{term}\left[\zeta e^{-t/\tau} - 1\right]$$

$$a_x(t) = -\frac{\upsilon_0 \cos\theta}{\tau} e^{-t/\tau} \qquad a_y(t) = -g\left(1 + \frac{\upsilon_0 \sin\theta}{\upsilon_{term}}\right)e^{-t/\tau} = -g\zeta e^{-t/\tau}$$

Τροχιά

$$y = \left(\tan\theta + \frac{\upsilon_{term}}{\upsilon_0 \cos\theta}\right)x + \upsilon_{term}\tau \ln\left(1 - \frac{x}{\upsilon_0 \tau \cos\theta}\right)$$

ή

$$y = \left(\tan\theta + \frac{gm}{b\upsilon_0 \cos\theta}\right)x + \frac{gm^2}{b^2}\ln\left(1 - \frac{b}{m\upsilon_0 \cos\theta}x\right)$$

Χρόνος ανόδου

$$t_a = \tau \ln\zeta = \frac{m}{b}\ln\left(1 + b\frac{\upsilon_0 \sin\theta}{mg}\right)$$

Μέγιστο ύψος

$$H = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\theta}{g}\left[\frac{\zeta - 1 - \ln\zeta}{(\zeta - 1)^2}\right] = \frac{m\upsilon_0 \sin\theta}{b} - \frac{gm^2}{b^2}\ln\left(1 + \frac{\upsilon_0 \sin\theta}{mg}b\right)$$

Οριζόντια απομάκρυνση στο μέγιστο ύψος

$$x_a = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\theta}{2g}\frac{1}{\zeta} = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\theta}{2g}\frac{1}{\left(1 + \frac{b\upsilon_0}{mg}\sin\theta\right)}$$

Ταχύτητα στο μέγιστο ύψος

$$\upsilon_a = \frac{\upsilon_0 \cos\theta}{\zeta} = \frac{\upsilon_0 \cos\theta}{\left(1 + \frac{b\upsilon_0}{mg}\sin\theta\right)}$$

Μας λείπουν ο χρόνος πτήσης T και το βεληνεκές R

Χρόνος πτήσης T

Όταν το χρονόμετρο δείξει $t = T$ το βλήμα θα χτυπήσει στο έδαφος, δηλαδή η κατακόρυφη απομάκρυνση y θα γίνει μηδέν. Αντικαθιστώντας $t = T$ στην εξίσωση κίνησης του y παίρνουμε:

$$y(T) = 0 \Rightarrow \ \upsilon_{term}\tau\left\lfloor \zeta(1-e^{-T/\tau}) - \frac{T}{\tau} \right\rfloor = 0 \Rightarrow \ \frac{T}{\tau} = \zeta(1-e^{-T/\tau})$$

$$\boxed{T = \zeta\tau - \zeta\tau e^{-T/\tau}}$$

Μια εξίσωση που περιέχει τον άγνωστο x και το εκθετικό του e^x ονομάζεται υπερβατική.

Στα χρόνια μου μαθαίναμε ότι οι υπερβατικές εξισώσεις λύνονται μόνο γραφικά ή αριθμητικά και δεν υπάρχει κλειστή αναλυτική λύση. Γραφικά ή αριθμητικά μπορούν να λυθούν τα πάντα έτσι κι αλλιώς και οι μέθοδοι αυτές είναι απολύτως σεβαστές. Όμως απαιτούν πολλούς κουραστικούς υπολογισμούς και δεν αντικαθιστούν την ομορφιά μιας κλειστής αναλυτικής λύσης στη μορφή κάποιας καλά μελετημένης και άρα γνωστής συνάρτησης. Επίσης, από τη φύση τους, οι λύσεις αυτές στερούνται γενικότητας. Πρέπει να έχουμε συγκεκριμένα νούμερα κάθε φορά για τις παραμέτρους ζ και τ για να βρούμε μια λύση. Αν οι παράμετροι αλλάξουν π.χ. η γωνία βολής ή το μέτρο της αρχικής ταχύτητας ή ο συντελεστής απόσβεσης θα πρέπει φτου κι από την αρχή να επαναλάβουμε όλους τους υπολογισμούς.

Εφόσον στις μέρες μας έχουμε ηλεκτρονικούς υπολογιστές για να κάνουν τους υπολογισμούς και τις γραφικές παραστάσεις δείχνουμε πως βρίσκουμε τη λύση γραφικά και αριθμητικά.

Γραφική λύση

Έστω ότι ζ=2 και τ=1/2. Έχουμε να λύσουμε την

$$T = 1 - e^{-2T}$$

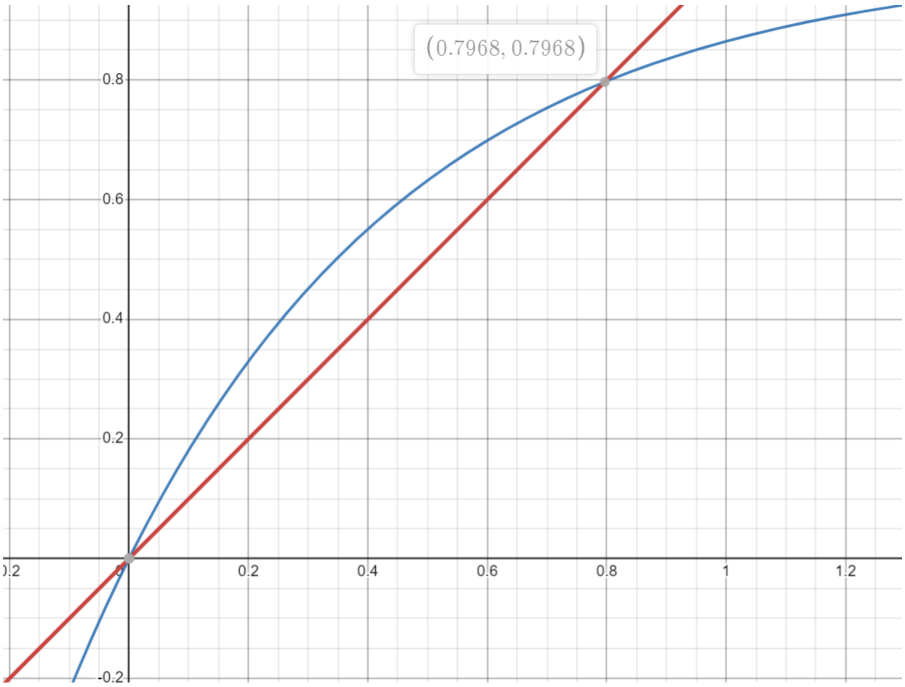
Καταρχάς βλέπουμε ότι η εξίσωση έχει την προφανή λύση $T = 0$.
Ψάχνουμε και για άλλη, μη τετριμμένη λύση. Το δεύτερο σκέλος είναι ένας θετικός αριθμός μικρότερος από τη μονάδα. Άρα ξέρουμε ότι θα είναι $0 < T < 1$

Κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των

$$y = T \qquad \text{και} \qquad y = 1 - e^{-2T}$$

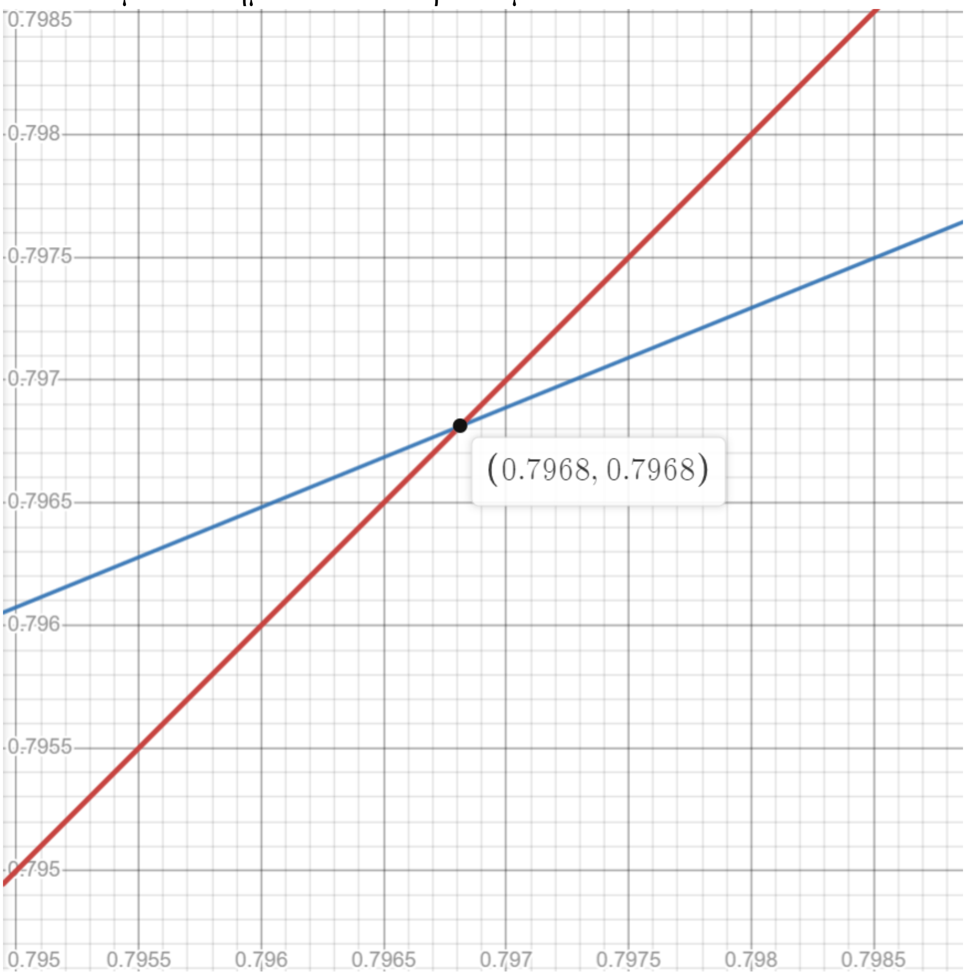
και βλέπουμε στη γραφική παράσταση που τέμνονται. Σίγουρα θα τέμνονται στο $T = 0$. Αν δεν τέμνονται και κάπου αλλού δεν υπάρχει άλλη λύση.

Αν τέμνονται, τότε η τιμή του T στην οποία οι δύο καμπύλες τέμνονται είναι η λύση μας.



Από τη γραφική παράσταση διαβάζουμε ότι $T = 0,7968$.

Αυτή είναι η μη τετριμμένη λύση της υπερβατικής εξίσωσης $T = 1 - e^{-2T}$ σε ακρίβεια 4 σημαντικών ψηφίων όπως μας την έδωσε το πρόγραμμα γραφικών παραστάσεων desmos.com.
Ελέγξτε το και στην αριθμομηχανή σας.
Με το μάτι βέβαια θα λέγαμε $T = 0,8$ εκτός αν μπορούσαμε να μεγεθύνουμε την εικόνα και να εστιάσουμε στο σημείο οπότε θα βλέπαμε



Αριθμητική λύση

Ψάχνουμε έναν αριθμό μικρότερο από το ένα. Μαντεύουμε ένα αριθμό και ελέγχουμε πόσο κοντά πέσαμε εξετάζοντας την ισότητα των δύο σκελών της εξίσωσης. Αναλόγως με το ποιο σκέλος είναι μεγαλύτερο και κατά πόσο, βελτιώνουμε την μαντεψιά μας και υπολογίζουμε ξανά μέχρι να πετύχουμε η εξίσωση να είναι ισοσταθμισμένη στο βαθμό ακρίβειας που απαιτείται. Αυτή είναι η ουσία της αριθμητικής μεθόδου και χρησιμοποιείται κατά κόρον στους υπολογιστές. Λέγεται και μέθοδος «λαθών και δοκιμών» (error and trial)

Η εξίσωσή μας είναι : $T = 1 - e^{-2T}$

Για να μαντέψουμε καλύτερα και να προσεγγίσουμε τη λύση πιο γρήγορα παρατηρούμε ότι όσο πιο κοντά στη μονάδα είναι το T της αριστερής πλευράς τόσο πιο μικρότερο θα είναι το εκθετικό που αφαιρούμε από το 1 και άρα το αποτέλεσμα της δεξιάς πλευράς θα είναι επίσης λίγο κάτω από το ένα. Ελπίζουμε ίσο με την αριστερή πλευρά. Οπότε δοκιμάζουμε αρχικά έναν αριθμό μεταξύ 0,5 και 1. Το μέσο όρο τους.

<u>1η μαντεψιά</u>	αριστερό σκέλος	$T = 0,7500$
	δεξί σκέλος	$1 - e^{-2T} = 1 - e^{-2(0.75)} = 0,7769$
	έλεγχος ισοστάθμισης	$0,7500 < 0,7769$

Αρκετά κοντά ήδη από την πρώτη μαντεψιά.

Επειδή η δεξιά πλευρά είναι μεγαλύτερη από την αριστερή δοκιμάζουμε τη δεύτερη φορά με έναν ακόμα μεγαλύτερο αριθμό ώστε να την μικρύνουμε κι άλλο, μεγαλώνοντας ταυτόχρονα την αριστερή πλευρά

<u>2η μαντεψιά</u>	αριστερό σκέλος	$T = 0,8000$
	δεξί σκέλος	$1 - e^{-2T} = 1 - e^{-2(0.8)} = 0,7981$
	έλεγχος ισοστάθμισης	$0,8000 > 0,7981$

Εντυπωσιακή συμφωνία από τη δεύτερη δοκιμή. Όμως υπερβάλλαμε, υπερακοντίσαμε. Περάσαμε πάνω από το στόχο. Η αριστερή πλευρά είναι τώρα ελάχιστα μεγαλύτερη από την δεξιά. Βέβαια αν θέλουμε ακρίβεια 2 σημαντικών ψηφίων έχουμε τελειώσει. Στρογγυλοποιώντας την δεξιά πλευρά στα δυο σημαντικά ψηφία $0,7981 \simeq 0,80$, έχουμε ισότητα : $0,80 = 0,80$. Αυτή είναι η λύση με ακρίβεια δυο σημαντικών ψηφίων.

Επειδή θέλουμε μεγαλύτερη ακρίβεια συνεχίζουμε. Βλέπουμε ότι θέλουμε κάτι λίγο μικρότερο από τη 2η μαντεψιά. Είναι καλό που η ανισότητα άλλαξε φορά επειδή μας λέει προς τα πού να κινηθούμε. Η λύση είναι λίγο κάτω από το 0,8000.

<u>3η μαντεψιά</u>	αριστερό σκέλος	$T = 0,7950$
	δεξί σκέλος	$1 - e^{-2T} = 1 - e^{-2(0.795)} = 0,7961$
	έλεγχος ισοστάθμισης	$0,7950 < 0,7961$

<u>4η μαντεψιά</u>	αριστερό σκέλος	$T = 0,7970$
	δεξί σκέλος	$1 - e^{-2T} = 1 - e^{-2(0.797)} = 0,7969$
	έλεγχος ισοστάθμισης	$0,7970 > 0,7969$

Είμαστε πολύ κοντά! Η λύση είναι λίγο κάτω από το 0,7970. Κατεβαίνω ένα-ένα κατά 0,0001

<u>5η μαντεψιά</u>	αριστερό σκέλος	$T = 0,7969$
	δεξί σκέλος	$1 - e^{-2T} = 1 - e^{-2(0.7969)} = 0,7968$

έλεγχος ισοστάθμισης $0,7969 > 0,7968$

Κατεβαίνω ακόμα ένα 0,0001

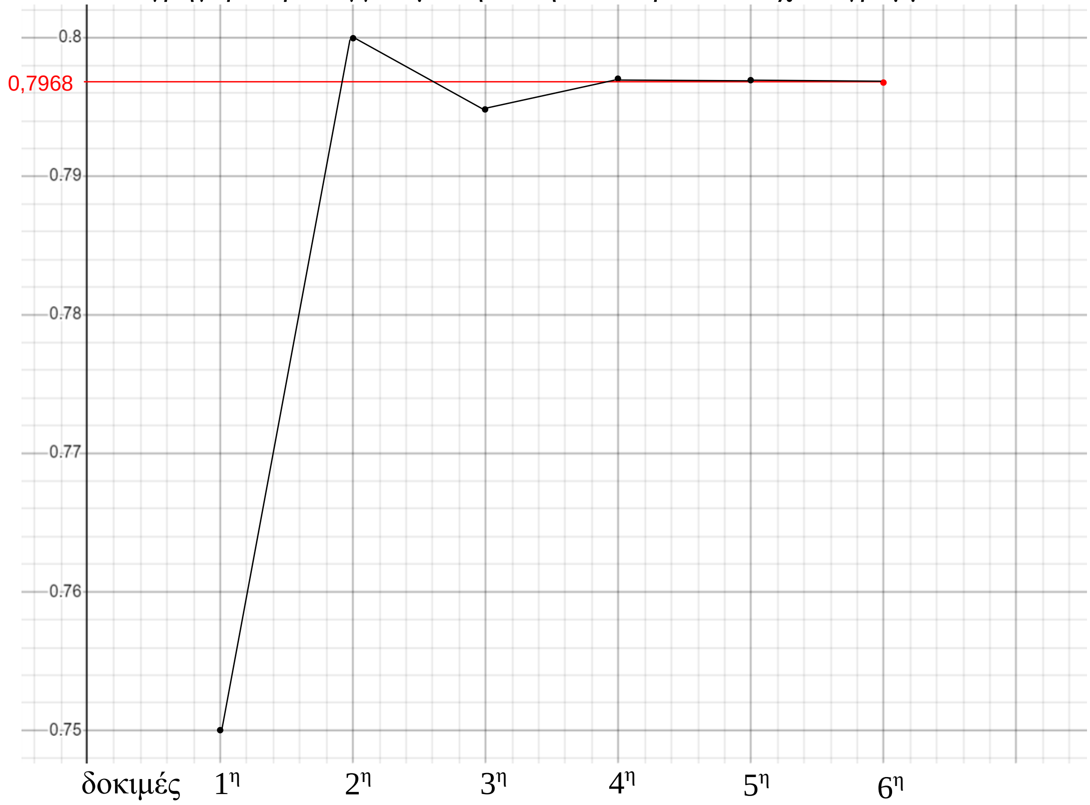
<u>6η μαντεψιά</u> αριστερό σκέλος $T = 0,7968$

δεξί σκέλος $1 - e^{-2T} = 1 - e^{-2(0.7968)} = 0,7968072006 \simeq 0,7968$

έλεγχος ισοστάθμισης $0,7968 = 0,7968$ Διάνα!

Η λύση σε ακρίβεια 4 σημαντικών ψηφίων είναι $T = 0,7968$

Δείτε πόσο γρήγορα προσεγγίσαμε τη λύση στο παρακάτω σχεδιάγραμμα



Η ανάσταση της συνάρτησης W του Lambert

Πλέον δεν πρέπει να λέμε ότι οι υπερβατικές εξισώσεις λύνονται μόνο γραφικά ή αριθμητικά. Η λύση των υπερβατικών συναρτήσεων μπορεί να εκφραστεί σε κλειστή μορφή μέσω της συνάρτησης W του Lambert.

Οι υπερβατικές εξισώσεις της μορφής $x = a + be^{cx}$ έχουν τη λύση: $x = a - \dfrac{1}{c} W(-bce^{ac})$.

Η συνάρτηση W πρέπει να μπει στο οπλοστάσιο μας μαζί με όλες τις υπόλοιπες στοιχειώδεις συναρτήσεις που υπάρχουν στα κουμπιά των αριθμομηχανών μας και να συμπεριλάβουμε και για αυτήν ένα κουμπί που να την υπολογίζει. Στοιχειώδεις συναρτήσεις θεωρούνται:

οι δυνάμεις x^n, οι τριγωνομετρικές $\sin x, \cos x, \tan x$, οι υπερβολικές $\sinh x, \cosh x, \tanh x$, η εκθετική e^x

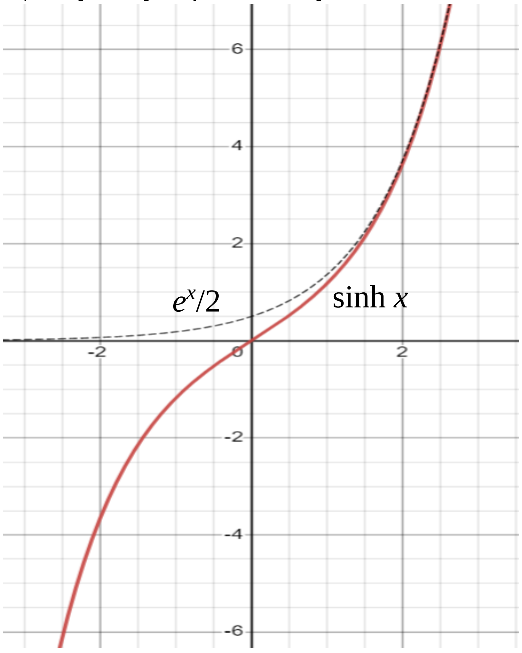
και οι αντίστροφές τους: ρίζες $x^{1/n}$, $\sin^{-1} x,\ \cos^{-1} x,\ \tan^{-1} x$, $\sinh^{-1} x,\ \cosh^{-1} x,\ \tanh^{-1} x$, ο λογάριθμος $\ln x$

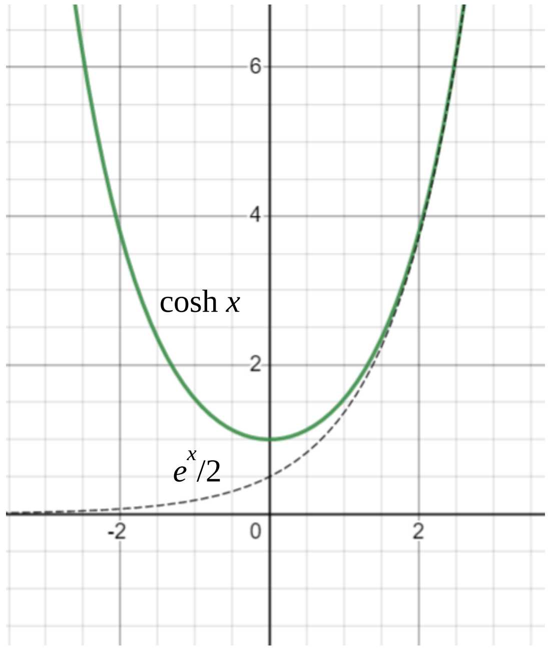
Εσείς δεν γνωρίζεται μόνο τις υπερβολικές. Τι είναι αυτές? Από που προέκυψαν?

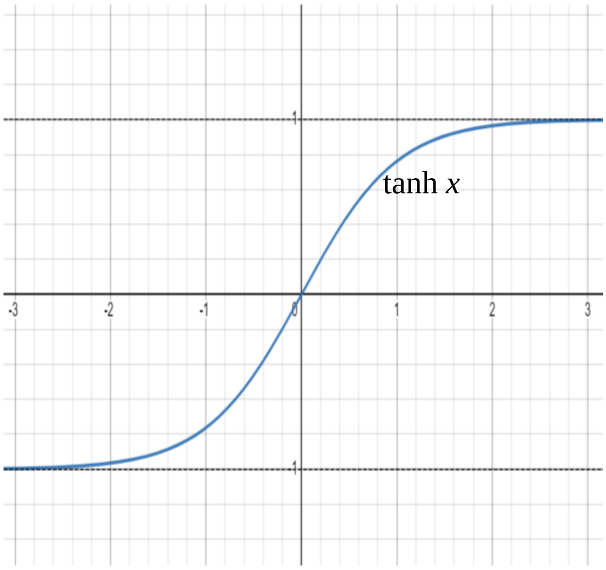
Έχουν παρόμοιες σχέσεις με αυτές που έχουν οι τριγωνομετρικές και ορίζονται ως εξής

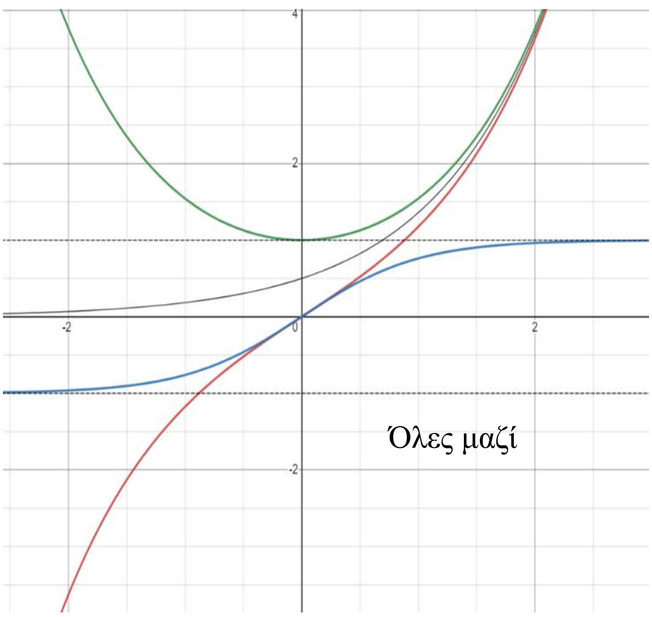
$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right), \qquad \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right), \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

Οι γραφικές τους παραστάσεις είναι









Ικανοποιούν τις εξής «τριγωνομετρικές» ταυτότητες

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad 1-\tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

και το ίδιο ισχύει και για τις παραγώγους τους

$$(\sinh x)' = \cosh x\,, \qquad (\cosh x)' = \sinh x\,, \qquad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

Άσκηση. Αποδείξτε τις παραπάνω σχέσεις χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ορισμού των $\sinh x,\ \cosh x,\ \tanh x$

Οι υπερβολικές συναρτήσεις προέκυψαν επειδή οι εκφράσεις $e^x + e^{-x}$ και $e^x - e^{-x}$ εμφανίζονταν ξανά και ξανά στα μαθηματικά και τη φυσική οπότε τους δώσαμε ένα ξεχωριστό όνομα, τις κάναμε συναρτήσεις και καθίσαμε και τις υπολογίσαμε μια και καλή για πάντα.

Ούτε η συνάρτηση *W* του Lambert είναι καινούργια. Οι υπερβατικές εξισώσεις αποτέλεσαν αντικείμενο μελέτης του Lambert (1758) η οποία επεκτάθηκε και ολοκληρώθηκε από τον Euler (1783) και όλα αυτά συνέβησαν τον $18^{ο}$ αιώνα! Η δουλειά των παραπάνω δύο θεμελίωσε την ύπαρξη και τις ιδιότητες της συνάρτησης. Ο Euler έδωσε το ανάπτυγμά της σε σειρά χωρίς όμως να της δώσει κάποιο όνομα. Εκείνη την εποχή δεν υπήρχε καν ο συμβολισμός e^x. Ο Euler τον καθιέρωσε. Επί τη ευκαιρία ο Lambert είναι αυτός που πρώτος έδωσε την απόδειξη ότι ο αριθμός π είναι άρρητος μεταξύ πολλών άλλων σημαντικών που έκανε τόσο στα μαθηματικά όσο και στη φυσική. Π.χ. οι συμβολισμοί των υπερβολικών συναρτήσεων προέρχονται από τον Lambert. Ο Euler είναι για τα μαθηματικά ότι ο Einstein και ο Νεύτωνας μαζί για τη φυσική. Έκανε τα πάντα και το όνομά του έχει δοθεί σε θεωρήματα, εξισώσεις, ταυτότητες, αριθμούς (*e*), συναρτήσεις, σχέσεις, σταθερές κλπ. Επειδή το όνομα του έχει ακουστεί τόσο πολύ, το να ονομάσουμε ακόμα μια συνάρτηση με το όνομα Euler δεν θα ήταν και πολύ χρήσιμο και έτσι η συνάρτηση *W* ονομάστηκε προς τιμή του Lambert.

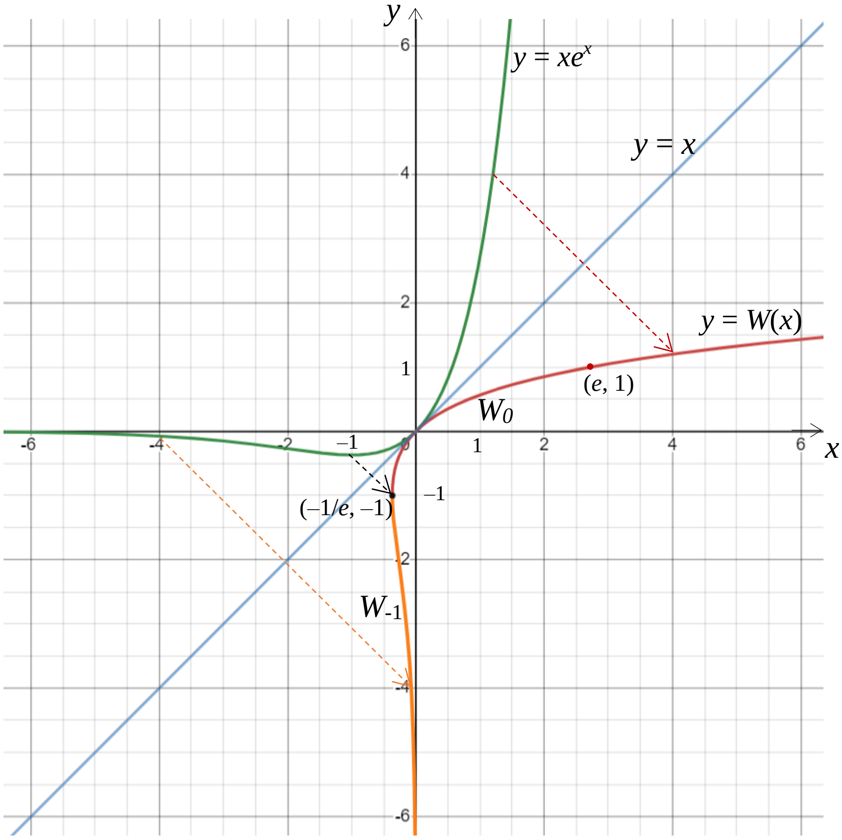
Η σημασία της συνάρτησης αυτής που ζούσε χρόνια στην αφάνεια, έγινε αντιληπτή πρώτα από τους επιστήμονες πληροφορικής. Συνειδητοποίησαν ότι παρόλο που η συνάρτηση χρησιμοποιείται ευρέως σε διάφορους τομείς (διαφορικές εξισώσεις συστημάτων με χρονοκαθυστέρηση, αυτονομία και βεληνεκές αεριωθούμενων, κβαντομηχανική μοριακών δεσμών κλπ.) λόγω χρήσης διαφορετικών συμβολισμών και έλλειψης συγκεκριμένου ονόματος παραμένει άγνωστη για τους περισσότερους επιστήμονες. Έτσι οι δημιουργοί της Maple (πρόγραμμα συμβολικής άλγεβρας) την συμπεριέλαβαν (1982) στο πακέτο γνωστών συναρτήσεων της πλατφόρμας τους ως `W[x]` και το 1993 τη βάφτισαν `LambertW[x]`. Η συνάρτηση υπάρχει και στη Mathematica όπου λέγεται `ProductLog[x]`. Το σύμβολο *W* είχε δοθεί στην συνάρτηση πολύ νωρίτερα, από μαθηματικούς, σε ένα κλασικό πανεπιστημιακό βιβλίο ανάλυσης των George Pólya και Gabor Szegö, Problems and Theorems in Analysis (στα γερμανικά) από το 1925. Αυτό το βιβλίο διάβασαν οι πρώτοι κομπιουτεράδες που έφτιαξαν έναν αλγόριθμο για να την υπολογίζει (1970). Είχαν γράψει $we^w=x$ πήραν το λογάριθμο των δύο πλευρών και έφτιαξαν ένα πρόγραμμα `FORTRAN` που να βρίσκει την αριθμητική λύση της $w = \ln x - \ln w$ για δοσμένο *x*, όπως κάναμε κι εμείς παραπάνω (Fritsch, F. N.; Shafer, R. E.; Crowley, W. P. (1973). "Algorithm 443: Solution of the transcedental equation $we^w=x$". *Communications of the Association for Computing Machinery*. **16** (2): 123-124). Από αυτούς πήρε το *W* η Maple. Μια συγγενική συνάρτηση είναι η συνάρτηση ωμέγα, $\omega(x) = \mathrm{W}(e^x)$ που χρησιμοποιεί το ελληνικό γράμμα ω που μοιάζει με το *w*. Επίσης ωμέγα κεφαλαίο ονομάζεται η λύση της εξίσωσης $xe^x=1$, $\Omega=0{,}56714\ldots$, δηλαδή $\Omega e^{\Omega}=1$ και άρα $W(1)=\Omega$.
Τώρα πλέον η συνάρτηση *W* συμπεριλαμβάνεται σε κάθε σχεδόν γλώσσα προγραμματισμού και εύχομαι σύντομα να τη δούμε και στα κομπιουτεράκια μας (στην Python και στην Matlab εμφανίζεται ως `lambertw`). Η επίσημη επανεμφάνιση ή ανάστασή της καθώς και η ονομασία που καθιερώθηκε για αυτήν, σημειώθηκαν με την εργασία Corless, R. M.; Gonnet, G. H.; Hare, D. E. G.; Jeffrey, D. J.; Knuth, D. E. (1996). "On the Lambert W function". *Advances in Computational Mathematics*. **5**: 329–359.

Οι φυσικοί και οι μηχανικοί άργησαν λίγο να την αναγνωρίσουν και η χρήση και αναφορά της ως *W*, άρχισε περίπου 18 χρόνια πριν, χωρίς μέχρι σήμερα να έχει διαδοθεί όσο της αξίζει. Οι πρώτες εφαρμογές ήταν σε προβλήματα βολών με αντίσταση αέρα και για την ακρίβεια ήταν η Mathematica που είχε προτείνει τη λύση καθώς οι ερευνητές χρησιμοποίησαν υπολογιστή για να λύσουν την εξίσωση. Πλέον όμως, τα προβλήματα στα οποία βρίσκει εφαρμογή ολοένα και πληθαίνουν και η συνάρτηση *W* σίγουρα είναι προορισμένη για φήμη και αθανασία.

Συνάρτηση W του Lambert

Γραφική παράσταση

Η συνάρτηση W του Lambert : $y = W(x)$ είναι η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = xe^x$.
Οπότε είναι η συμμετρική καμπύλη της xe^x ως προς τη διχοτόμο $y = x$ και άρα μπορούμε να κατασκευάσουμε τη γραφική της παράσταση, η οποία φαίνεται παρακάτω.



Μπορούμε να υπολογίσουμε μερικές τιμές της :

$f(1) = 1 \cdot e^1 = e \quad \Rightarrow \quad W(e) = 1$

$f(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad W(0) = 0$

$f(-1) = -1 \cdot e^{-1} = -\dfrac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad W\left(-\dfrac{1}{e}\right) = -1$

$f(\Omega) = \Omega e^{\Omega} = 1 \quad \Rightarrow \quad W(1) = \Omega = 0,56714329...$

$f(\ln x) = \ln x e^{\ln x} = x \ln x \Rightarrow \quad W(x \ln x) = \ln x$ ισχύει για $x \geq 1/e \approx 0,36788$

Π.χ.

$W(2\ln 2) = \ln 2$

$W(e^{1+e}) = W(e \cdot e^e) = W(\ln e^e \cdot e^e) = \ln e^e = e$

Όπου $e = 2,7\,1828\,1828\,45\,90\,45 \simeq 2,718$ $\quad \dfrac{1}{e} = 0,367879 \simeq 0,368$

Από τη γραφική παράσταση βλέπουμε ότι η συνάρτηση W δεν δέχεται τιμές $x < -\dfrac{1}{e}$. Το πεδίο ορισμού της είναι $[-1/e, \infty)$.

Στο $x = -1/e$ η παράγωγός (κλίση) της W απειρίζεται δηλαδή η εφαπτομένη γίνεται κατακόρυφη.

Για αρνητικά x η καμπύλη της «συνάρτησης» δίνει δύο τιμές σε κάθε x. Π.χ. το x = -0,3≈-0,5$e^{-0,5}$ μπορεί να αντιστοιχιστεί είτε στο -0,5 είτε στο -1,8 (Δες μεγάλο σχήμα στην επόμενη σελίδα) :

$$W(-0,3) = -0,5 \quad \text{και} \quad W(-0,3) = -1,8$$

Η απεικόνιση δεν είναι μονοσήμαντη. Αυτό δεν επιτρέπεται αν θέλουμε να προαχθεί η απεικόνιση σε συνάρτηση. Μια απεικόνιση για να λέγεται συνάρτηση πρέπει να αντιστοιχεί σε ένα αριθμό x έναν μοναδικό αριθμό y. Οπότε για αρνητικά x δεν έχουμε μια συνάρτηση W αλλά δύο. Λέμε ότι χωρίζουμε την απεικόνιση σε δύο κλάδους.
Ο βυσσινί κλάδος λέγεται W_0 και δίνει τα y μέχρι το -1, ενώ τα υπόλοιπα $y< -1$ τα δίνει ο πορτοκαλί κλάδος που λέγεται W_{-1} και ορίζεται μόνο για τα αρνητικά x:

$$\left[-1/e,\, \infty\right) \xrightarrow{W_0} \left[-1,\, \infty\right)$$

$$\left[-1/e,\, 0\right) \xrightarrow{W_{-1}} \left(-\infty, -1\right]$$

Άρα εξ ορισμού $\quad W_0(x) \geq -1$ για $-\dfrac{1}{e} \leq x \leq \infty$ και

$$W_{-1}(x) \leq -1 \text{ για } -\frac{1}{e} \leq x < 0$$

Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι:

η $W_0(x)$ έχει το πρόσημο του x :

$$W_0(x) > 0 \qquad x > 0$$

$$W_0(x) = 0 \qquad x = 0$$

$$W_0(x) < 0 \qquad -\frac{1}{e} < x < 0$$

η $W_0(x)$ είναι γνησίως αύξουσα δηλ. $\dfrac{dW(x)}{dx} > 0$ και έχει τα κοίλα προς τα κάτω δηλ. $\dfrac{d^2W(x)}{dx^2} < 0$

η $W_{-1}(x)$ είναι αρνητική και γνησίως φθίνουσα

Αλγεβρικός ορισμός και αρνητικά ορίσματα

Αφού η συνάρτηση W είναι η αντίστροφή της $f(x) = xe^x$ αυτό σημαίνει ότι αν την βάλω στην f θα μου δώσει πίσω τα x : $\quad ye^y = x \Rightarrow y = W(x)$

Σχέση ορισμού	$W(x)e^{W(x)} = x$

Οπότε μια έκφραση της μορφής $Ae^A = B$ θα σημαίνει $\Rightarrow A = W(B)$

Αφού $W = f^{-1}$ τότε θα έπρεπε να ισχύει η εξής απλοποίηση :

$$f(x) = xe^x \Rightarrow W(f(x)) = W(xe^x) \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = W(xe^x) \Rightarrow \qquad x = W(xe^x)$$

Αυτό όμως δεν ισχύει έτσι ακριβώς, επειδή η $f(x) = xe^x$ δεν είναι αμφιμονοσήμαντη. Χρειάζεται λίγη προσοχή για τα αρνητικά x όπου η συνάρτηση έχει δύο κλάδους. Αυτό είναι παρόμοιο με τις ρίζες όπου π.χ. η εξίσωση $x^2 = a^2$ δεν έχει μόνο τη λύση $x = a$ αλλά και την $x = -a$ ή τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις όπου π.χ. η εξίσωση $\sin x = \sin a$ δεν έχει μόνο τη λύση $x = a$ αλλά έχει και την $x = \pi - a$ (συν ακέραια πολλαπλάσια του 2π).
Η απλοποίηση που ισχύει είναι :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= W_0(xe^x) \qquad -1 \leq x \\ x &= W_{-1}(xe^x) \qquad x \leq -1 \end{aligned}}$$

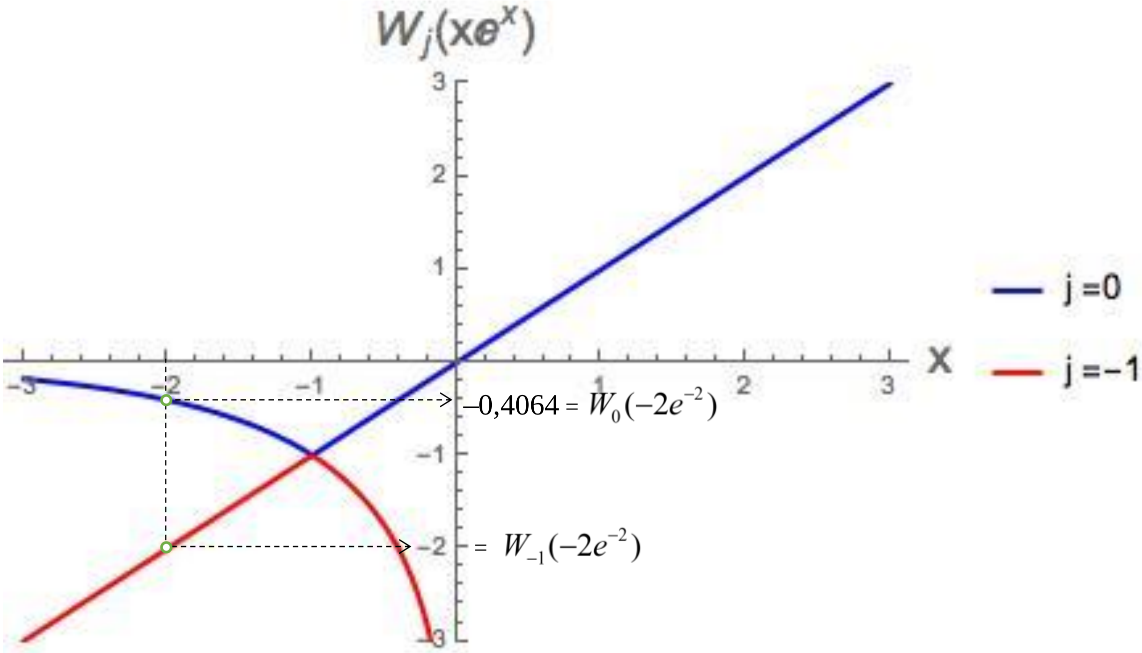
οπότε η έκφραση $W(xe^x)$ για αρνητικά x έχει δύο τιμές. Η πρώτη είναι η x και η δεύτερη είναι είτε η $W_0(xe^x)$ αν $x \le -1$ είτε η $W_{-1}(xe^x)$ αν $-1 \le x$.

Με άλλα λόγια όπως συμβαίνει και για την εξίσωση $x^2 = a^2$ η εξίσωση $xe^x = ae^a$ έχει δύο λύσεις :

1) την προφανή $x = a$ και
2) ή την $x = W_0(ae^a)$ αν $a \le -1$ ή την $x = W_{-1}(ae^a)$ αν $-1 \le a$

Οι γραφικές παραστάσεις των $W_i(xe^x)$ για i=0, -1 δίνονται στο παρακάτω σχήμα από όπου φαίνεται ότι π.χ. για $x = -2$ η έκφραση $W(-xe^{-x})$ παίρνει τις εξής δύο τιμές:

$W_{-1}(-2e^{-2}) = -2$ επειδή $-2<-1$ (κόκκινη) και $W_0(-2e^{-2}) = W_0(-0,2707) = -0,4064$ (μπλε)



Οι εξηγήσεις αυτές δόθηκαν με κάποια λεπτομέρεια επειδή στα φυσικά προβλήματα βολών με οπισθέλκουσα θα εμφανιστούν συναρτήσεις W με αρνητικό όρισμα και θα πρέπει να επιλέγουμε την κατάλληλη από τις δύο τιμές.

Συμπεριφορά στο 0 και στο ∞

Για μικρά x $|x| \le 1/e = 0,368$: $W_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{125}{24}x^5 - \ldots$

Για μεγάλα x>>1 : $W_0(x) = \ln x - \ln\ln x + O(1)$

Παράγωγος

$$\frac{dW(x)}{dx} = \frac{1}{x + e^{W(x)}} = \frac{W(x)}{x\left(1 + W(x)\right)} = \quad \text{για} \quad x \ne -\frac{1}{e}$$

(με παραγώγιση της σχέσης ορισμού)

Ολοκλήρωμα

$$\int W(x)dx = xW(x) - x + e^{W(x)} + C$$

(με την αλλαγή μεταβλητής $w = W(x), \quad x = we^w$

Χρησιμότητα

Η συνάρτηση W του Lambert χρησιμοποιείται για λύση υπερβατικών εξισώσεων της μορφής

$$x = a + be^{cx} \ \Rightarrow \ x = a - \frac{1}{c}W(-bce^{ac}) \qquad (1)$$

Απόδειξη :

Μαζεύω όλους τους αγνώστους αριστερά προσπαθώντας να εμφανίσω τη σχέση ορισμού της W

$x = a + be^{cx} \Rightarrow x - a = be^{cx} \Rightarrow (x-a)e^{-cx} = b \Rightarrow (-cx+ca)e^{-cx} = -bc \Rightarrow (-cx+ca)e^{-cx+ca} = -bce^{ca}$

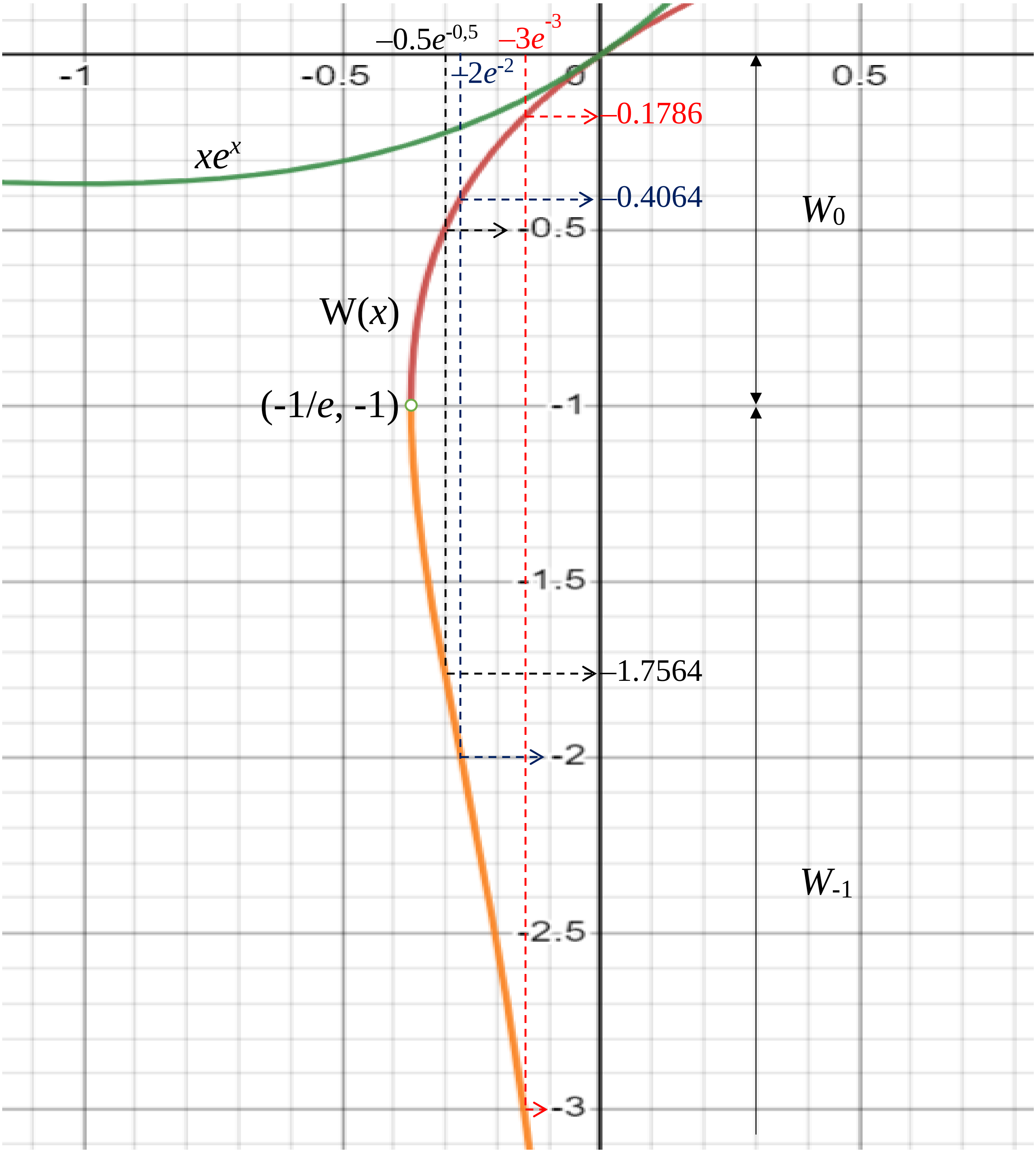
Αυτή είναι έκφραση της μορφής : $Ae^{A} = B \ \Rightarrow A = W(B)$

Άρα : $-cx + ca = W(-bce^{ca}) \Rightarrow x = a - \frac{1}{c}W(-bce^{ac})$

Τέτοιες εξισώσεις εμφανίζονται στα προβλήματα βολών με αντίσταση αέρα και μάλιστα με $a = -b$ και $bc > 1$ οπότε θα χρειαστεί να εξετάσουμε εκφράσεις της μορφής $W\,(-xe^{-x})$ για $x > 1$

$-3e^{-3} = -0{,}1494$
$-2e^{-2} = -0{,}2707$
$-0{,}5e^{-0{,}5} = -0{,}3033$

Τιμές της συνάρτησης W του Lambert
για αρνητικά x



Αναλυτική μορφή του χρόνου πτήσης *T* μέσω της συνάρτησης *W* του Lambert

Είχαμε καταλήξει στην εξίσωση

$$T = \zeta\tau - \zeta\tau e^{-T/\tau}$$

την οποία και είχαμε λύσει γραφικά και αριθμητικά για $\zeta = 2$ και $\tau = 1/2$

Η εξίσωση είναι μια υπερβατική εξίσωση της μορφής:

$$T = a + be^{cT}$$

με $a = -b = \zeta\tau$ και $c = -\dfrac{1}{\tau}$

η οποία έχει κατευθείαν τη λύση

$$T = a - \frac{1}{c}W\left(-bce^{ac}\right)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών παίρνουμε

$$T = \zeta\tau - \frac{1}{\left(-1/\tau\right)}W\left(-(-\zeta\tau)\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{\zeta\tau(-1/\tau)}\right)$$

$$T = \tau\left\lfloor \zeta + W(-\zeta e^{-\zeta})\right\rfloor$$

Χωρίς αντίσταση αέρα $T_0 = 2t_{a0} = \dfrac{2\upsilon_0 \sin\theta}{g}$

Ενώ $\tau = \dfrac{m}{b} = \dfrac{\upsilon_0}{g}\dfrac{mg}{b\upsilon_0} = \dfrac{\upsilon_0}{g}\dfrac{1}{c} = \dfrac{\upsilon_0}{g}\dfrac{\sin\theta}{\zeta - 1} = \dfrac{2\upsilon_0 \sin\theta}{g}\dfrac{1}{2(\zeta-1)}$

$$T = \left(\frac{\upsilon_0 \sin\theta}{g}\right)\left\lfloor \frac{\zeta + W\left(-\zeta e^{-\zeta}\right)}{\zeta - 1}\right\rfloor$$

Επειδή $\zeta > 1 > 0$ και άρα προφανώς $-\zeta e^{-\zeta} < 0$, το όρισμα της W είναι αρνητικό και πρέπει να επιλέξω από ποιο κλάδο θα υπολογίσω την τιμή της συνάρτησης.

Αν επιλέξω τον κλάδο W_{-1} παίρνω την τετριμμένη λύση $T = 0$ επειδή ισχύει ταυτοτικά :

$$W_{-1}(-\zeta e^{-\zeta}) = -\zeta \quad \text{αφού} \quad -\zeta < -1$$

και ο αριθμητής $\zeta + W\left(-\zeta e^{-\zeta}\right) = \zeta - \zeta = 0$ μηδενίζεται.

Όταν επιλέξω τον κλάδο W_0 παίρνω την μη τετριμμένη λύση.

Άρα τελικά

$$\boxed{T = \tau\left[\zeta + W_0\left(-\zeta e^{-\zeta}\right)\right] = \left(\frac{\upsilon_0 \sin\theta}{g}\right)\left\lfloor \frac{\zeta + W_0\left(-\zeta e^{-\zeta}\right)}{\zeta - 1}\right\rfloor}$$

Ας ελέγξουμε αν παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα με τη γραφική και αριθμητική λύση για $\zeta = 2$ και $\tau = 1/2$

Είδαμε ότι $W_0\left(-2e^{-2}\right) = W_0\left(-0,2707\right) = 0,4604$ (σελ. 9)

$$T = \tau\left[\zeta + W_0\left(-\zeta e^{-\zeta}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[2 + W_0\left(-2e^{-2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[2 + W_0\left(-0,2707\right)\right] = \frac{1}{2}\left[2 - 0,4064\right] = 0,7698$$

Πράγματι παίρνω την ίδια ακριβώς λύση !!!

Αφού δεν υπάρχει κομπιουτεράκι να υπολογίζει την W αυτή τη στιγμή, αν δεν έχετε MATLAB, Maple, Python ή Mathematica μπορείτε να διαβάζεται τις τιμές της W από τη γραφική παράσταση. Σχεδιάστε στο desmos.com τις $ye^y = x$ και $x = -2e^{-2}$, και διαβάστε τις συντεταγμένες του σημείου όπου τέμνονται. Θα έχετε ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων.

Βεληνεκές

Βεληνεκές είναι η οριζόντια απομάκρυνση x όταν $t = T$ ή το x στην εξίσωση τροχιάς όταν y=0.
Αντικαθιστώντας τον παραπάνω χρόνο πτήσης T στην $x(t)$ βρίσκουμε κατευθείαν

$$R = x(T) \Rightarrow \; R = \upsilon_0 \tau \cos\theta\left(1 - e^{-T/\tau}\right) = \upsilon_0 \frac{\upsilon_0 \sin\theta}{g} \frac{1}{\zeta - 1} \cos\theta \left(1 - e^{-\zeta - W_0\left(-\zeta e^{-\zeta}\right)}\right)$$

$$\boxed{R = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\theta}{2g} \left[\frac{1 - e^{-\zeta - W_0\left(-\zeta e^{-\zeta}\right)}}{\zeta - 1} \right]}$$

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με ζ και χρησιμοποιώντας τη σχέση ορισμού της W
$W(x)e^{W(x)} = x \Rightarrow W(x) = xe^{-W(x)}$ παίρνω μια ισοδύναμη μορφή στην οποία η W έχει κατέβει από τον εκθέτη:

$$R = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\theta}{2g} \left[\frac{\zeta + \left(-\zeta e^{-\zeta}\right) e^{-W_0\left(-\zeta e^{-\zeta}\right)}}{\zeta\left(\zeta - 1\right)} \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{R = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\theta}{2g} \left[\frac{\zeta + W_o(-\zeta e^{-\zeta})}{\zeta(\zeta - 1)} \right]}$$

Βλέπουμε ότι πάλι πήραμε το αποτέλεσμα σε κλειστή μορφή μέσω μιας γνωστής συνάρτησης της συνάρτησης W του Lambert.

Μπορούμε στη συνέχεια να ψάξουμε για ποια γωνία βολής μεγιστοποιείται το βεληνεκές και ποιο είναι το μέγιστο δυνατό βεληνεκές. Ποιο είναι το μέγιστο δυνατό βεληνεκές για βολή από κάποιο αρχικό ύψος (ερώτημα που θα ενδιέφερε ένα σφαιροβόλο). Ποια είναι η γωνία και η ταχύτητα πρόσκρουσης με το έδαφος. Τι ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας χάθηκε λόγω αντίστασης αέρα.

Η περεταίρω μελέτη αυτών και άλλων ερωτημάτων αφήνεται για Σπουδαστική Εργασία για όποιον ενδιαφέρεται.