19/11/2021

(1)

$$\begin{pmatrix} -kx_1 + k'(x_2 - x_1) \\ -kx_2 - k'(x_2 - x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_1 \\ ma_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -(k+k')x_1 + k'x_2 \\ k'x_1 - (k+k')x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\ddot{x}_1 \\ m\ddot{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -(k+k') & k' \\ k' & -(k+k') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k+k' & -k' \\ -k' & k+k' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$ ②

$$M\ddot{X} + KX = 0$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

$$\ddot{X} = -\omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

3

$$\underbrace{M}_{\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}}\ddot{X} + KX = 0 \Rightarrow -\omega^2 M X + KX = 0$$

$$KX = m\omega^2 X$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

$$KA\cancel{e^{i\omega t}} = m\omega^2 A \cancel{e^{i\omega t}}$$

$$X(t) = A e^{i\omega t}$$

$$\boxed{KA = m\omega^2 A}$$

ιδιοδιάνυσμα του K

ιδιοτιμή

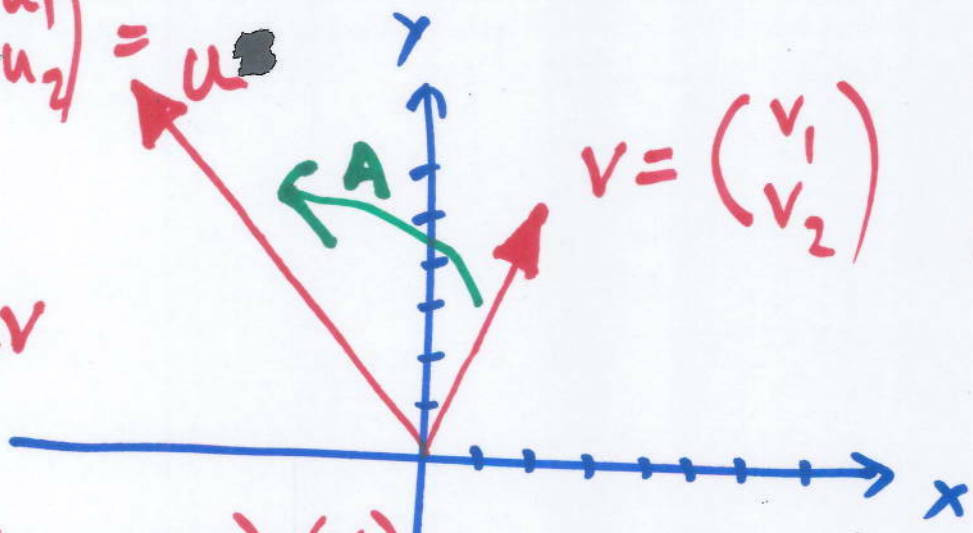
Τελεστής

$A: v \to u$

4

$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u$

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$



$u = Av$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}$$

ο τελεστής A αναπαρίσταται από έναν πίνακα

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad v_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 5$

$$Av_{\lambda_1} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}\underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -1$

$$Av_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ΓΕΝΙΚΑ ΣΕ ΤΥΧΑΙΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = u$$

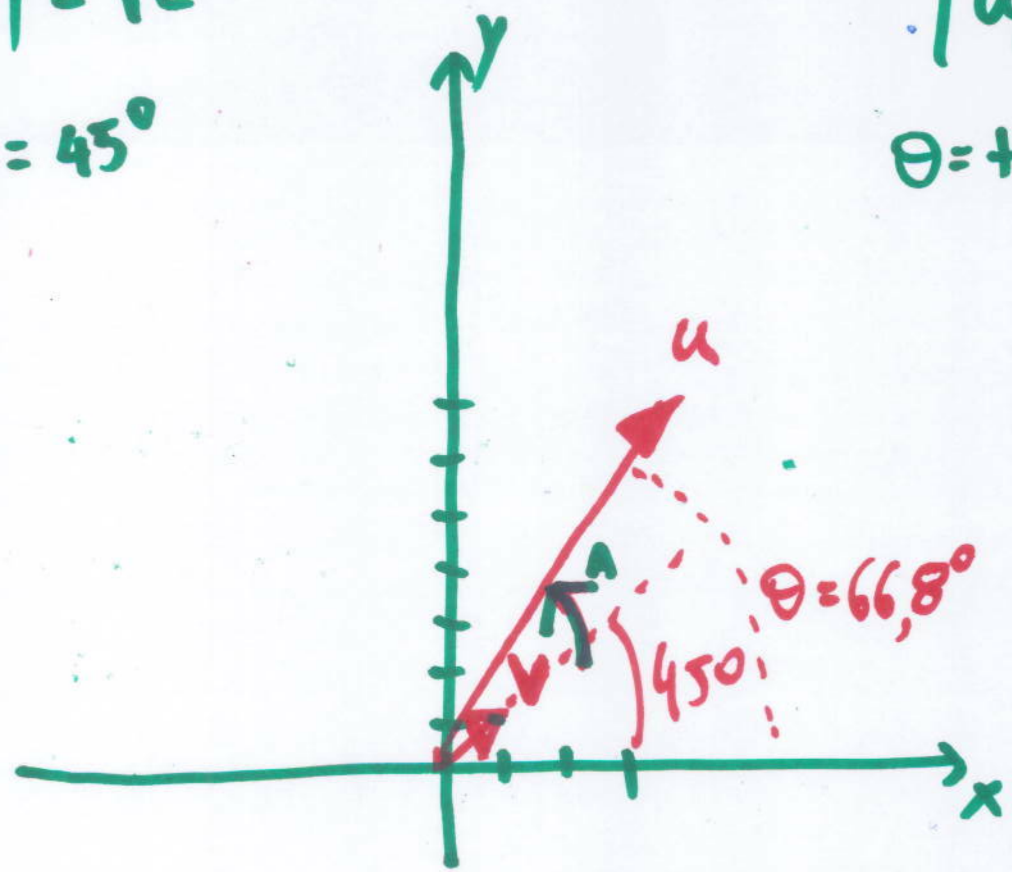
$|v| = \sqrt{2}$

$\varphi = 45^\circ$

$|u| = \sqrt{58}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{7}{3}\right) = 66{,}8^\circ$

5



ο A τον αλλάζει

και το μέτρο

και τη γωνία (το στρίβει)

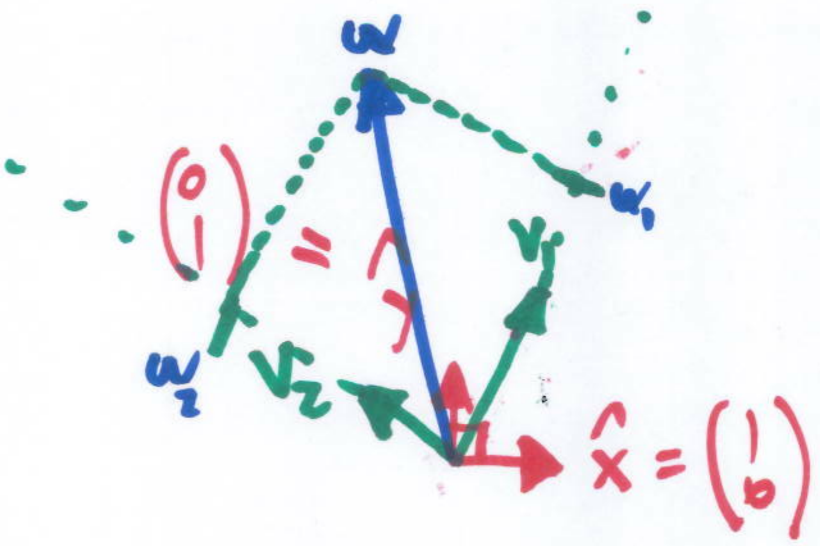
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

$$\nexists \lambda \in \mathbb{R} : v_2 \neq \lambda v_1$$

$\Downarrow$



Τα v_1, v_2 μπορούν να είναι βάση του διανυσματικού χώρου

όπως τα $\hat{x}, \hat{y}$

$$w = w_1 v_1 + w_2 v_2$$
$$= w_x \hat{x} + w_y \hat{y}$$

$$(K - m\omega^2 I)\mathbf{A} = 0 \qquad \begin{pmatrix} k+k'-m\omega^2 & -k' \\ -k' & k+k'-m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(k - m\omega^2 I) = 0$$

7

$$(k+k'-m\omega^2)^2 - k'^2 = 0$$

$$(k+\cancel{k'}-m\omega^2-\cancel{k'})(k+k'-m\omega^2+k') = 0$$

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m} \qquad \omega_2^2 = \frac{k+2k'}{m}$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{k} + k' - \cancel{m} \cdot \frac{\cancel{k}}{\cancel{m}} & -k' \\ -k' & \cancel{k} + k' - \cancel{m} \frac{\cancel{k}}{\cancel{m}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8

$$k' \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} A_1 - A_2 &= 0 \\ -A_1 + A_2 &= 0 \end{aligned}\right\} A_1 = A_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{k} + k' - \cancel{m} \cdot \frac{\cancel{k} + 2k'}{\cancel{m}} & -k' \\ -k' & -\text{''}- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

9

$$\begin{pmatrix} -k' & -k' \\ -k' & -k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$A_1 + A_2 = 0$$

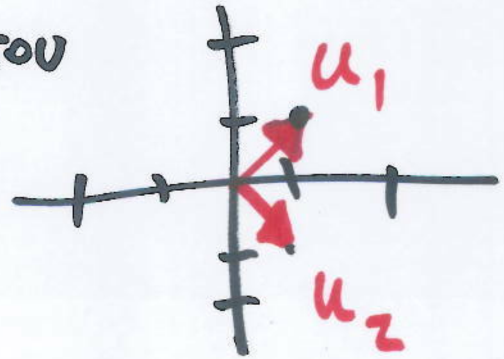
$$A_1 = -A_2 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t}$$

$$x_1(t) = c_1 \sin(\omega_1 t) + c_2 \sin(\omega_2 t)$$

$$x_2(t) = c_1 \sin(\omega_1 t) - c_2 \sin(\omega_2 t)$$

Τα "σημεία" αυτού του 2-D διανυσματικού χώρου είναι οι διάφοροι τρόποι κίνησης των δύο μαζών



Όταν το "σημείο" βρίσκεται πάνω στην ευθεία του u_1 ($c_2=0$) ή του u_2 ($c_1=0$) τότε το σύστημα βρίσκεται σε κανονικό τρόπο ταλάντωσης. Οι δύο μάζες κάνουν α.α.τ. με την ίδια συχνότητα ω_1 ή ω_2