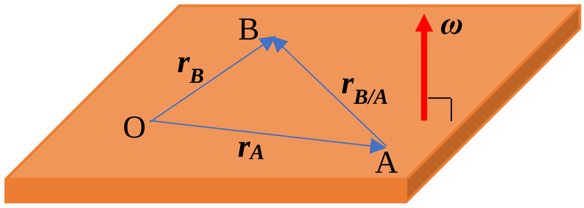
ΣΥΝΔΕΟΜΕΝΑ ΚΙΝΟΥΜΕΝΑ ΜΕΡΗ

Σχήμα 1



Οι θέσεις, ταχύτητες και επιταχύνσεις δύο σημείων Α και Β ενός άκαμπτου σώματος που κάνει επίπεδη κίνηση (μεταφορά και περιστροφή σε ένα επίπεδο) συνδέονται με τις παρακάτω σχέσεις :

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A} \qquad (0)$$

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} \qquad (1)$$

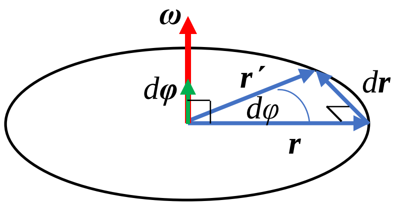
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} - \omega_{AB}^2 \vec{r}_{B/A} \qquad (2)$$

Τέτοιες είναι οι κινήσεις που κάνουν τα διάφορα μέρη των μηχανών.

Απόδειξη

Όταν ένα διάνυσμα $\vec{r}$ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ τότε, σε χρονικό διάστημα dt περιστρέφεται κατά τη στοιχειώδη γωνία $d\vec{\varphi} = \vec{\omega} dt$. Η στοιχειώδης μετατόπισή του είναι κάθετη στο ίδιο το διάνυσμα : $d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r} dt$ και άρα η ταχύτητά του είναι: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow \vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Σχήμα 2



$|d\mathbf{r}| = ds = rd\varphi$

Έστω τα σημεία A και B που αποτελούν σημεία του ίδιου άκαμπτου στερεού σώματος (της καφέ πλάκας του 1ου σχήματος). Το σχετικό τους διάνυσμα $\vec{r}_{B/A}$ δεν μπορεί να αλλάξει σε μέτρο, άρα μπορεί μόνο να περιστραφεί. Γράφοντας το διάνυσμα $\vec{r}_{B/A}$ ως το γινόμενο του μέτρου του $r_{B/A}$, επί την κατεύθυνσή του $\hat{r}_{B/A}$ έχουμε (οι τελίτσες είναι χρονικές παράγωγοι):

$$\vec{r}_{B/A} = r_{B/A}\hat{r}_{B/A} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_{B/A} = \dot{r}_{B/A}\hat{r}_{B/A} + r_{B/A}\dot{\hat{r}}_{B/A} = 0 + r_{B/A}\dot{\hat{r}}_{B/A} = r_{B/A}\vec{\omega} \times \hat{r}_{B/A} \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}_{B/A} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} \Rightarrow \vec{\upsilon}_{B/A} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} \quad (\alpha)$$

Από τον ορισμό της σχετικής θέσης ($\vec{r}_{B/A}$: το βέλος που ξεκινάει από το Α και καταλήγει στο Β)

$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$

παραγωγίζοντας παίρνουμε $\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_A + \vec{\upsilon}_{B/A}$ και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (α) καταλήγουμε στην (1).

Παραγωγίζοντας την (1) βρίσκουμε τη σχέση των επιταχύνσεων :

$$\frac{d\vec{\upsilon}_B}{dt} = \frac{d(\vec{\upsilon}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A})}{dt} \Rightarrow \vec{a}_B = \frac{d\vec{\upsilon}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_{AB}}{dt} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\omega}_{AB} \times \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} \Rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A}) \quad (\beta)$$

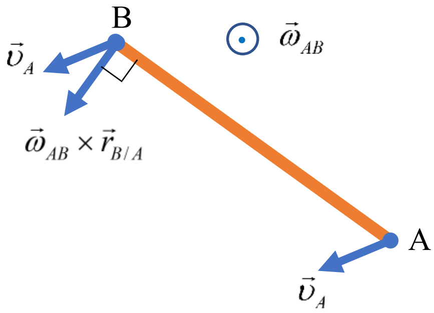
Ο δεύτερος όρος της (β) είναι η γραμμική επιτάχυνση της περιστροφής (εφαπτόμενη στον κύκλο) ενώ ο τρίτος όρος της (β) είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση της περιστροφής.

Από την ταυτότητα $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ παίρνουμε $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{r} = 0\vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}$.

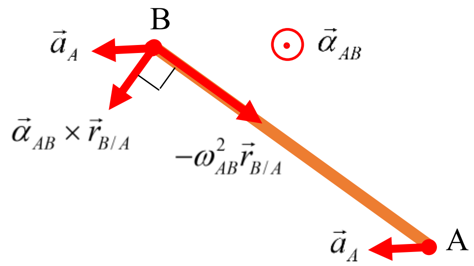
Επειδή η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής είναι κάθετη στο επίπεδο στο οποίο περιστρέφεται το διάνυσμα $\vec{r}_{B/A}$:

$\vec{\omega}_{AB} \cdot \vec{r}_{B/A} = 0$

Οπότε αντικαθιστώντας τον τρίτο όρο με : $\vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A}) = -\omega_{AB}^2 \vec{r}_{B/A}$ παίρνουμε την (2).



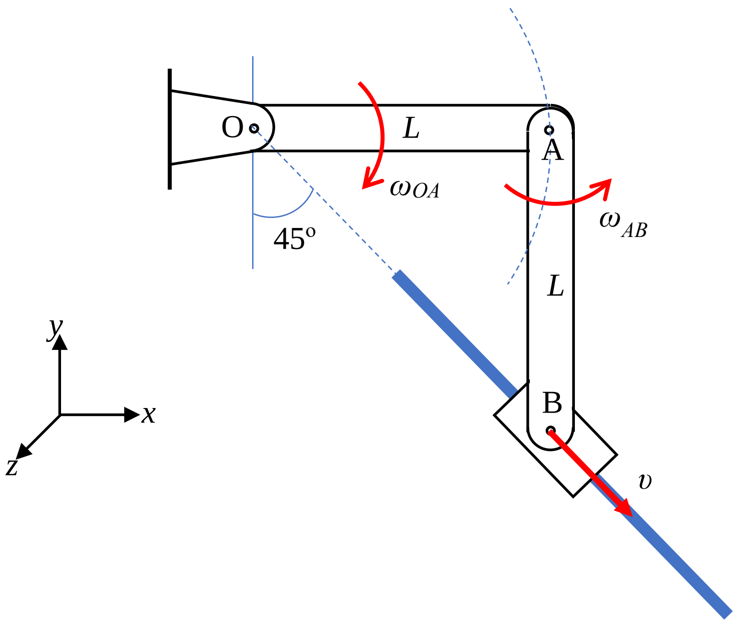
Διανυσματικό διάγραμμα ταχυτήτων



Διανυσματικό διάγραμμα επιταχύνσεων

Παράδειγμα 1

Ο ολισθητής Β κινείται ευθύγραμμα πάνω στον μπλε οδηγό προς τα κάτω με ταχύτητα μέτρου υ=8 m/s. Ποιες είναι οι γωνιακές ταχύτητες των ράβδων ΟΑ και ΑΒ τη συγκεκριμένη στιγμή? Τα μήκη των ράβδων είναι ίσα με L=2 m.



Από το σχήμα έχουμε:

$$\vec{\upsilon}_B = \upsilon\cos 45^o\,\hat{x} - \upsilon\sin 45^o\,\hat{y} = 8\cos 45^o\,\hat{x} - 8\sin 45^o\,\hat{y}$$

$$\vec{\upsilon}_A = \vec{\omega}_{OA}\times\vec{r}_{A/O} = (-\omega_{OA}\hat{z})\times(L\hat{x}) = -2\omega_{OA}\hat{y}$$ περιστροφή γύρω από το Ο

Όμως τα σημεία Α και Β ανήκουν στην ίδια άκαμπτη ράβδο ΑΒ οπότε οι ταχύτητές τους συνδέονται με τη σχέση

$$\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_B + \vec{\omega}_{AB}\times\vec{r}_{A/B} = (8\cos 45^o\,\hat{x} - 8\sin 45^o\,\hat{y}) + (\omega_{AB}\hat{z})\times(L\hat{y}) = (8/\sqrt{2}\hat{x} - 8/\sqrt{2}\hat{y}) - 2\omega_{AB}\hat{x} = (4\sqrt{2} - 2\omega_{AB})\hat{x} + (-4\sqrt{2})\hat{y}$$

Εξισώνοντας τις δύο εκφράσεις για την ταχύτητα του Α παίρνουμε

$$-2\omega_{OA}\hat{y} = (4\sqrt{2} - 2\omega_{AB})\hat{x} + (-4\sqrt{2})\hat{y}$$

Οι αντίστοιχες συνιστώσες πρέπει να είναι ίσες, άρα:

$$-2\omega_{OA} = -4\sqrt{2}$$

$$0 = 4\sqrt{2} - 2\omega_{AB}$$

και έχουμε :

$$\omega_{OA} = 2\sqrt{2} = 2{,}828 \text{ rad/s}$$
$$\omega_{AB} = 2\sqrt{2} = 2{,}828 \text{ rad/s}$$

Παράδειγμα 2

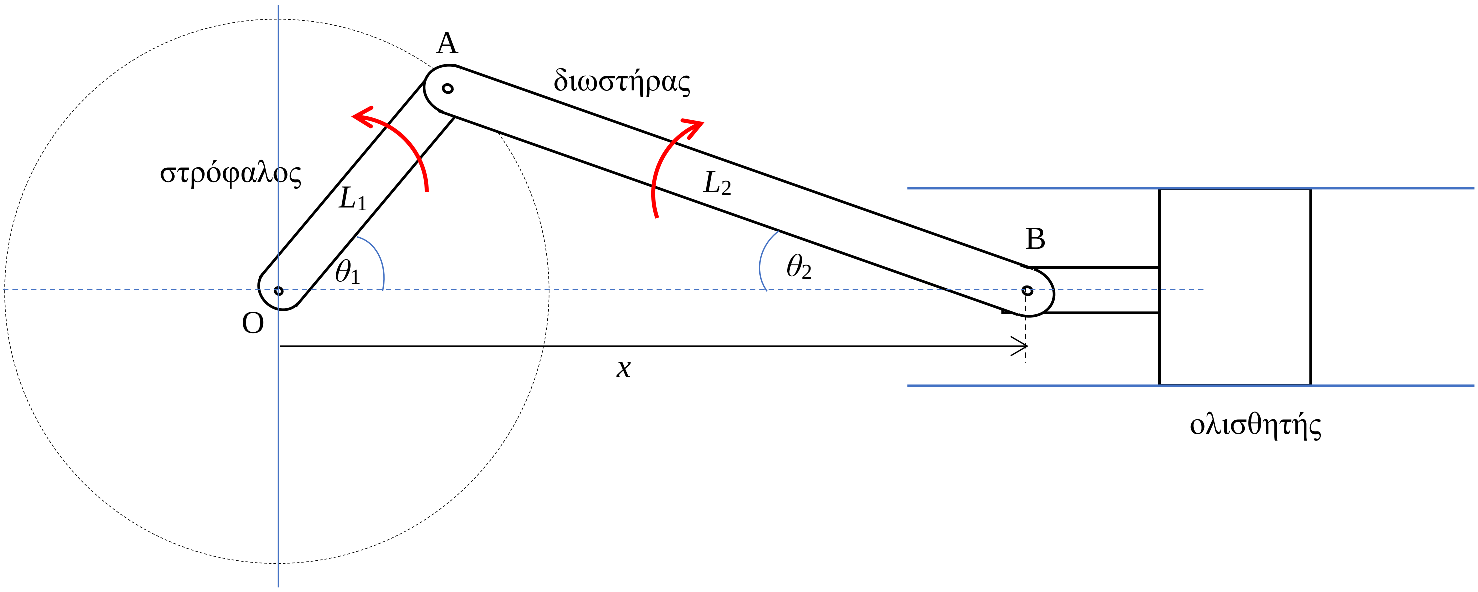
Δεδομένα: L_1, L_2, θ_1, ω_1, α_1 **Ζητούμενα:** x, υ, a, θ_1, ω_2, α_2

Ο στρόφαλος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}_1 \equiv \omega_1 = 10\pi = 31{,}4$ rad/s και $L_1 = 5$ cm, $L_2 = 15$ cm.

Α) Όταν $\theta_1 = 30^o$ πόσο είναι το x και η θ_2 ;

Β) Την ίδια χρονική στιγμή ποια είναι η ταχύτητα του ολισθητή και η γωνιακή ταχύτητα του διωστήρα ;

Γ) Την ίδια χρονική στιγμή πόση είναι η επιτάχυνση του ολισθητή και η γωνιακή επιτάχυνση του διωστήρα ;



Είτε από τους νόμους των ημιτόνων και συνημίτονων στο τρίγωνο ΟΑΒ είτε από τη διανυσματική ταυτότητα $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$ στο ίδιο τρίγωνο, βρίσκουμε τις σχέσεις

$$\sin\theta_2 = \frac{L_1}{L_2}\sin\theta_1 \qquad (1)$$

$$x = L_1\cos\theta_1 + L_2\cos\theta_2 \quad (2)$$

Λύνουμε την (1) για να βρούμε τη γωνία θ_2 , υπολογίζουμε το συνημίτονό της και αντικαθιστούμε στην (2) για να βρούμε το x.

Η διανυσματική σχέση του τριγώνου πρέπει να ικανοποιείται κάθε χρονική στιγμή. Αυτό σημαίνει ότι για να υπολογίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου ΑΒ (διωστήρας) και την ταχύτητα του ολισθητή Β παίρνουμε απλώς τις παραγώγους των (1) και (2) ως προς το χρόνο :

$$\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 = \frac{L_1}{L_2}\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\theta}_2 = \frac{L_1 \cos\theta_1}{L_2 \cos\theta_2}\omega_1 \qquad (3)$$

$$\dot{x} = -L_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - L_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \qquad \dot{x} = -L_1\left(\sin\theta_1 + \cos\theta_1 \tan\theta_2\right)\omega_1 \quad (4)$$

Υπενθυμίζουμε ότι η θ_2 θεωρείται πλέον γνωστή από το πρώτο βήμα.

Τέλος αν χρειαστούμε και τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου ΑΒ και την επιτάχυνση του ολισθητή Β παίρνουμε απλώς άλλη μια παράγωγο στις εξισώσεις. Το απλώς είναι μια κουβέντα, καθώς οι εκφράσεις περιπλέκονται αρκετά (τα πάντα εκτός από τα μήκη μεταβάλλονται με το χρόνο)

$$\ddot{\theta}_2 \equiv \alpha_2 = \frac{L_1 \cos\theta_1}{L_2 \cos\theta_2}\dot{\omega}_1 + \frac{L_1}{L_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\right)\omega_1 \qquad (5)$$

$$\ddot{x} \equiv a_B = -L_1\left(\sin\theta_1 + \cos\theta_1 \tan\theta_2\right)\dot{\omega}_1 - L_1\frac{d\left(\sin\theta_1 + \cos\theta_1 \tan\theta_2\right)}{dt}\omega_1 \quad (6)$$

Παρατηρούμε ότι ακόμα και αν η ράβδος ΟΑ περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = \sigma\tau\alpha\theta.$, χωρίς να επιταχύνεται $\dot{\omega}_1 \equiv \alpha_1 = 0$, και ο ολισθητής επιταχύνεται και ο διωστήρας επιταχύνεται γωνιακά.

Α) $$\sin\theta_2 = \frac{L_1}{L_2}\sin\theta_1 = \frac{5}{15}\sin 30^{o} = \frac{1}{3}\frac{1}{2} \Rightarrow \theta_2 = \sin^{-1}(1/6) = 9{,}59406823^{o} = 9{,}6^{o}$$

$$x = L_1\cos\theta_1 + L_2\cos\theta_2 = 5\cos 30^{o} + 15\cos 9{,}6^{o} = 19{,}12 \text{ cm}$$

Β) $$\dot{\theta}_2 = \frac{L_1\cos\theta_1}{L_2\cos\theta_2}\omega_1 = \frac{\cos 30^{o}}{3\cos 9{,}6^{o}}10\pi = 9{,}1976415 = 9{,}20 \text{ rad/s}$$

$$\dot{x} = -L_1\left(\sin\theta_1 + \cos\theta_1\tan\theta_2\right)\omega_1 = -50\pi(\sin 30^{o} + \cos 30^{o}\tan 9{,}6^{o}) = 101{,}53 \text{ cm/s}$$

Γ) Επειδή $\dot{\omega}_1 = 0$ οι επιταχύνσεις δίνονται από τους τύπους

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{L_1}{L_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\right)\omega_1 = \frac{10\pi}{3}\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\right) =$$

$$\ddot{x} = -L_1\frac{d\left(\sin\theta_1 + \cos\theta_1\tan\theta_2\right)}{dt}\omega_1 = -50\pi\frac{d\left(\sin\theta_1 + \cos\theta_1\tan\theta_2\right)}{dt}$$

και ήρθε η ώρα να υπολογίσουμε τις παραγώγους.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\cos\theta_1\right)\frac{1}{\cos\theta_2} + \cos\theta_1\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos\theta_2}\right) = -\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_2}\dot{\theta}_1 + \cos\theta_1\frac{\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2}\dot{\theta}_2 =$$

$$= -\frac{\sin 30^{o}}{\cos 9{,}6^{o}}10\pi + \cos 30^{o}\frac{\sin 9{,}6^{o}}{\cos^2 9{,}6^{o}}9{,}1976415 = -15{,}9307824 + 1{,}36549128 = -14{,}5652911$$

$$\frac{d\left(\sin\theta_1 + \cos\theta_1\tan\theta_2\right)}{dt} = \frac{d\left(\sin\theta_1\right)}{dt} + \frac{d\left(\cos\theta_1\right)}{dt}\tan\theta_2 + \cos\theta_1\frac{d\left(\tan\theta_2\right)}{dt} = \left(\cos\theta_1 - \sin\theta_1\tan\theta_2\right)\dot{\theta}_1 + \frac{\cos\theta_1}{\cos^2\theta_2}\dot{\theta}_2 =$$

$$= \left(\cos 30^{o} - \sin 30^{o}\tan 9{,}6^{o}\right)10\pi + \frac{\cos 30^{o}}{\cos^2 9{,}6^{o}}9{,}1976415 = 24{,}5501873 + 8{,}1929738 = 32{,}7431611$$

Οπότε : $$\ddot{\theta}_2 = \frac{10\pi}{3}(-14{,}5652911) = -152{,}527372 \text{ rad/s}^2$$

$$\ddot{x} = -50\pi(32{,}7431611) = 5.143{,}28372 \text{ m/s}^2$$

Άλλα δεδομένα

$\theta_1 = 0 \quad \dot{\theta}_1 \equiv \omega_1 = 12 \text{ rad/s} = \sigma\tau\alpha\theta.\ \ddot{\theta}_1 \equiv \dot{\omega}_1 = \alpha_1 = 0 \text{ rad/s}^2$, L_1 = 40 cm, L_2 = 100 cm

1) Θέσεις

$$\sin\theta_2 = \frac{L_1}{L_2}\sin\theta_1 = \frac{40}{100}\sin 0^o = 0 \Rightarrow \theta_2 = 0^o$$

$$x = L_1\cos\theta_1 + L_2\cos\theta_2 = 40\cos 0^o + 100\cos 0^o = 140 \text{ cm}$$

2) Ταχύτητες

$$\dot{\theta}_2 = \frac{L_1\cos\theta_1}{L_2\cos\theta_2}\omega_1 = \frac{40\cos 0^o}{100\cos 0^o}12 = 3,6 \text{ rad/s}$$

$$\dot{x} = -L_1\left(\sin\theta_1 + \cos\theta_1\tan\theta_2\right)\omega_1 = -40(\sin 0^o + \cos 0^o\tan 0^o)12 = 0 \text{ cm/s}$$

3) Επιταχύνσεις

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{L_1}{L_2}\left(-\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_2}\dot{\theta}_1 + \cos\theta_1\frac{\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2}\dot{\theta}_2\right)\omega_1 = \frac{40}{100}\left(-\frac{0}{1}12 + 1\frac{0}{1^2}\dot{\theta}_2\right)12 = 0 \text{ rad/s}^2$$

$$\ddot{x} = -L_1\left[\left(\cos\theta_1 - \sin\theta_1\tan\theta_2\right)\dot{\theta}_1 + \frac{\cos\theta_1}{\cos^2\theta_2}\dot{\theta}_2\right]\omega_1 = -40\left[\left(1 - 0\cdot\ 0\right)12 + \frac{1}{1^2}3,6\right]12 = -7.488 \text{ cm/s}^2$$

Άλλα δεδομένα

$\theta_1 = 180^o \quad \dot{\theta}_1 \equiv \omega_1 = 12 \text{ rad/s} = \sigma\tau\alpha\theta.\ \ddot{\theta}_1 \equiv \dot{\omega}_1 = \alpha_1 = 0 \text{ rad/s}^2$, L_1 = 40 cm, L_2 = 100 cm

1) Θέσεις

$$\sin\theta_2 = \frac{L_1}{L_2}\sin\theta_1 = \frac{40}{100}\sin 180^o = 0 \Rightarrow \theta_2 = 0^o$$

$$x = L_1\cos\theta_1 + L_2\cos\theta_2 = 40\cos 180^o + 100\cos 0^o = -40 + 100 = 60 \text{ cm}$$

2) Ταχύτητες

$$\dot{\theta}_2 = \frac{L_1\cos\theta_1}{L_2\cos\theta_2}\omega_1 = \frac{40\cos 180^o}{100\cos 0^o}12 = -3,6 \text{ rad/s}$$

$$\dot{x} = -L_1\left(\sin\theta_1 + \cos\theta_1\tan\theta_2\right)\omega_1 = -40(\sin 180^o + \cos 0^o\tan 0^o)12 = 0 \text{ cm/s}$$

3) Επιταχύνσεις

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{L_1}{L_2}\left(-\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_2}\dot{\theta}_1 + \cos\theta_1\frac{\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2}\dot{\theta}_2\right)\omega_1 = \frac{40}{100}\left(-\frac{0}{1}12 + (-1)\frac{0}{1^2}\dot{\theta}_2\right)12 = 0 \text{ rad/s}^2$$

$$\ddot{x} = -L_1\left[\left(\cos\theta_1 - \sin\theta_1\tan\theta_2\right)\dot{\theta}_1 + \frac{\cos\theta_1}{\cos^2\theta_2}\dot{\theta}_2\right]\omega_1 = -40\left[\left((-1) - 0\cdot\ 0\right)12 + \frac{(-1)}{1^2}3,6\right]12 = 7.488 \text{ cm/s}^2$$

Άλλα δεδομένα

$\theta_1 = 90^o \quad \dot{\theta}_1 \equiv \omega_1 = 12 \text{ rad/s} = \sigma\tau\alpha\theta.\ \ddot{\theta}_1 \equiv \dot{\omega}_1 = \alpha_1 = 0 \text{ rad/s}^2$, L_1 = 40 cm, L_2 = 100 cm

1) Θέσεις

$$\sin\theta_2 = \frac{L_1}{L_2}\sin\theta_1 = \frac{40}{100}\sin 90^{\mathrm{o}} = 0{,}4 \Rightarrow \theta_2 = 23{,}5781785^{\mathrm{o}} \simeq 23{,}58^{\mathrm{o}}$$

$$x = L_1\cos\theta_1 + L_2\cos\theta_2 = 40\cos 90^{\mathrm{o}} + 100\cos 23{,}58^{\mathrm{o}} = 0 + 100 = 91{,}6515139 \simeq 96{,}65 \text{ cm}$$

2) Ταχύτητες

$$\dot{\theta}_2 = \frac{L_1\cos\theta_1}{L_2\cos\theta_2}\omega_1 = \frac{40\cos 90^{\mathrm{o}}}{100\cos 23{,}58^{\mathrm{o}}}12 = 0 \text{ rad/s}$$

$$\dot{x} = -L_1\left(\sin\theta_1 + \cos\theta_1\tan\theta_2\right)\omega_1 = -40(\sin 90^{\mathrm{o}} + \cos 90^{\mathrm{o}}\tan 23{,}58^{\mathrm{o}})12 = -480 \text{ cm/s}$$

3) Επιταχύνσεις

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{L_1}{L_2}\left(-\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_2}\dot{\theta}_1 + \cos\theta_1\frac{\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2}\dot{\theta}_2\right)\omega_1 = \frac{40}{100}\left(-\frac{1}{\cos 23{,}58^{\mathrm{o}}}12 + 0\frac{\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2}0\right)12 = 62{,}8467524 \simeq 62{,}847 \text{ rad/s}^2$$

$$\ddot{x} = -L_1\left[\left(\cos\theta_1 - \sin\theta_1\tan\theta_2\right)\dot{\theta}_1 + \frac{\cos\theta_1}{\cos^2\theta_2}\dot{\theta}_2\right]\omega_1 = -40\left[\left(0 - 1\cdot\ \tan 23{,}58^{\mathrm{o}}\right)12 + \frac{0}{\cos^2\theta_2}0\right]12 = 2.513{,}9 \text{ cm/s}^2$$

Άλλα δεδομένα
$\theta_1 = 60^{\mathrm{o}}$ $\dot{\theta}_1 \equiv \omega_1 = 12$ rad/s $= \sigma\tau\alpha\theta.$ $\ddot{\theta}_1 \equiv \dot{\omega}_1 = \alpha_1 = 0$ rad/s^2, $L_1 = 40$ cm, $L_2 = 100$ cm

1) Θέσεις

$$\sin\theta_2 = \frac{L_1}{L_2}\sin\theta_1 = \frac{40}{100}\sin 60^{\mathrm{o}} = 0{,}346410162 \Rightarrow \theta_2 = 20{,}2679011^{\mathrm{o}} \simeq 20{,}27^{\mathrm{o}}$$

$$x = L_1\cos\theta_1 + L_2\cos\theta_2 = 40\cos 60^{\mathrm{o}} + 100\cos 20{,}27^{\mathrm{o}} = 113{,}808315 \simeq 113{,}8 \text{ cm}$$

2) Ταχύτητες

$$\dot{\theta}_2 = \frac{L_1\cos\theta_1}{L_2\cos\theta_2}\omega_1 = \frac{40\cos 60^{\mathrm{o}}}{100\cos 20{,}27^{\mathrm{o}}}12 = 2{,}55841 \simeq 2{,}56 \text{ rad/s}$$

$$\dot{x} = -L_1\left(\sin\theta_1 + \cos\theta_1\tan\theta_2\right)\omega_1 = -40(\sin 60^{\mathrm{o}} + \cos 60^{\mathrm{o}}\tan 20{,}27^{\mathrm{o}})12 = 504{,}33 \text{ cm/s}$$

3) Επιταχύνσεις

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{L_1}{L_2}\left(-\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_2}\dot{\theta}_1 + \cos\theta_1\frac{\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2}\dot{\theta}_2\right)\omega_1 = \frac{40}{100}\left(-\frac{\sin 60^{\mathrm{o}}}{\cos 20{,}27^{\mathrm{o}}}12 + \cos 60^{\mathrm{o}}\frac{\sin 20{,}27^{\mathrm{o}}}{\cos^2 20{,}27^{\mathrm{o}}}2{,}558\right)12 =$$

$$= 4{,}8\left(-11{,}0782342 + 0{,}503556377\right) = -50{,}7584534 \simeq -50{,}76 \text{ rad/s}^2$$

$$\ddot{x} = -L_1\left[\left(\cos\theta_1 - \sin\theta_1\tan\theta_2\right)\dot{\theta}_1 + \frac{\cos\theta_1}{\cos^2\theta_2}\dot{\theta}_2\right]\omega_1 = -40\left[\left(\cos 60^{\mathrm{o}} - \sin 60^{\mathrm{o}}\tan\theta_2\right)12 + \frac{\cos 60^{\mathrm{o}}}{\cos^2 20{,}27^{\mathrm{o}}}2{,}55841\right]12 =$$

$$= -480(2{,}1623871 + 1{,}45364205) = 1.735{,}7 \text{ cm/s}^2$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ : Οι παράγωγοι

$$\frac{d\left(\sin\theta_1+\cos\theta_1\tan\theta_2\right)}{dt}=\frac{d\left(\sin\theta_1\right)}{dt}+\frac{d\left(\cos\theta_1\right)}{dt}\tan\theta_2+\cos\theta_1\frac{d\left(\tan\theta_2\right)}{dt}=\left(\cos\theta_1-\sin\theta_1\tan\theta_2\right)\dot{\theta}_1+\frac{\cos\theta_1}{\cos^2\theta_2}\dot{\theta}_2=$$

$$=\left(\cos\theta_1-\sin\theta_1\tan\theta_2\right)\omega_1+\frac{\cos\theta_1}{\cos^2\theta_2}\frac{L_1\cos\theta_1}{L_2\cos\theta_2}\omega_1$$

$$\boxed{\frac{d\left(\sin\theta_1+\cos\theta_1\tan\theta_2\right)}{dt}=\left\lfloor\cos\theta_1-\sin\theta_1\tan\theta_2+\frac{L_1\cos^2\theta_1}{L_2\cos^3\theta_2}\right\rfloor\dot{\theta}_1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\cos\theta_1\right)\frac{1}{\cos\theta_2}+\cos\theta_1\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos\theta_2}\right)=-\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_2}\dot{\theta}_1+\cos\theta_1\frac{\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2}\dot{\theta}_2=$$

$$=\left(-\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_2}+\cos\theta_1\frac{\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2}\frac{L_1\cos\theta_1}{L_2\cos\theta_2}\right)\omega_1$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\right)=\left(-\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_2}+\frac{L_1\cos^2\theta_1\tan\theta_2}{L_2\cos^2\theta_2}\right)\dot{\theta}_1}$$