Η δευτεροβάθμια και η τριτοβάθμια εξίσωση και η ανακάλυψη των μιγαδικών αριθμών

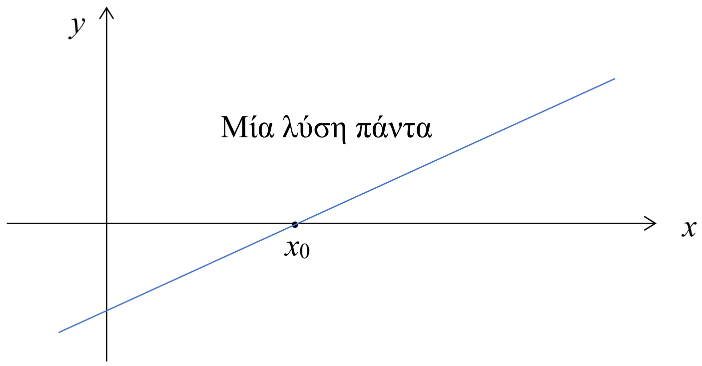
Πρωτοβάθμια $ax+b=0$

$$x_0=-\frac{b}{a}$$

Έχει πάντα μια πραγματική λύση

Γραφική παράσταση της $y=ax+b$

Το x για τα οποίο y=0, δηλαδή η ευθεία τέμνει τον οριζόντιο άξονα, είναι η λύση της εξίσωσης.



Δευτεροβάθμια $ax^2+bx+c=0$

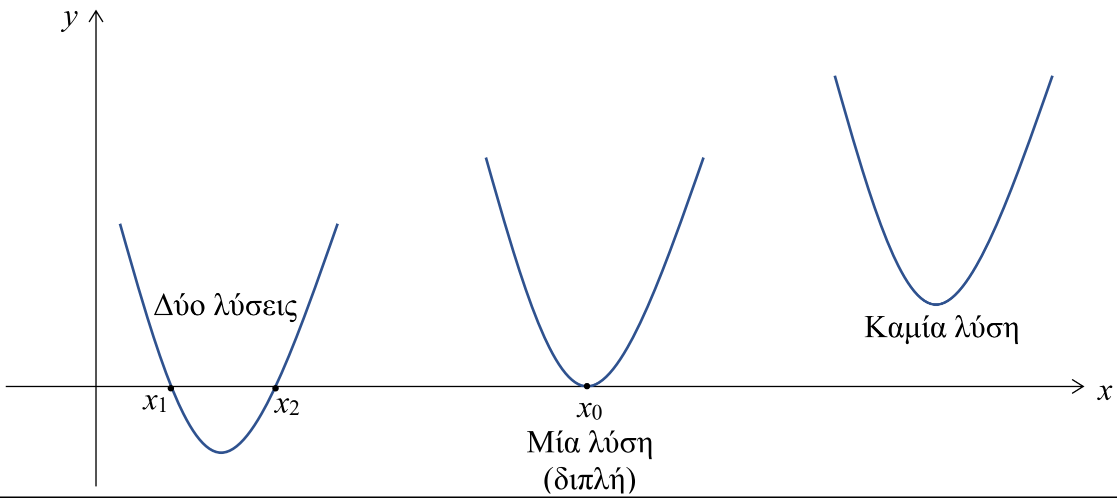
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

όπου $\Delta=b^2-4ac$

Η εξίσωση μπορεί να έχει μία (αν είναι τέλειο τετράγωνο) ή δύο πραγματικές λύσεις.
Αν Δ<0 η εξίσωση δεν έχει λύσεις πραγματικούς αριθμούς

Γραφική παράσταση της $y=ax^2+bx+c$

Τα x για τα οποία y=0, δηλαδή η καμπύλη τέμνει τον οριζόντιο άξονα, είναι οι λύσεις της εξίσωσης.



Τριτοβάθμια $ax^3+bx^2+cx+d=0$

$$x=z-\frac{p}{3z}-\frac{b}{3a}$$

με $z^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\Delta}$

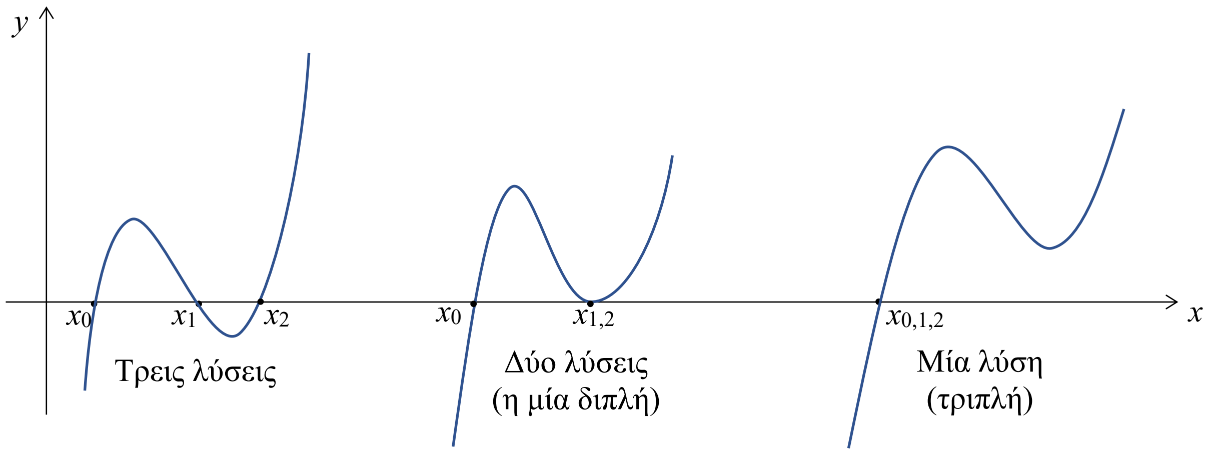
όπου $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ και $p=\frac{3ac-b^2}{3a^2}$, $q=\frac{2b^3+27a^2d-9abc}{27a^3}$

Η εξίσωση έχει πάντα μια πραγματική λύση και μπορεί να έχει έως και τρεις πραγματικές λύσεις

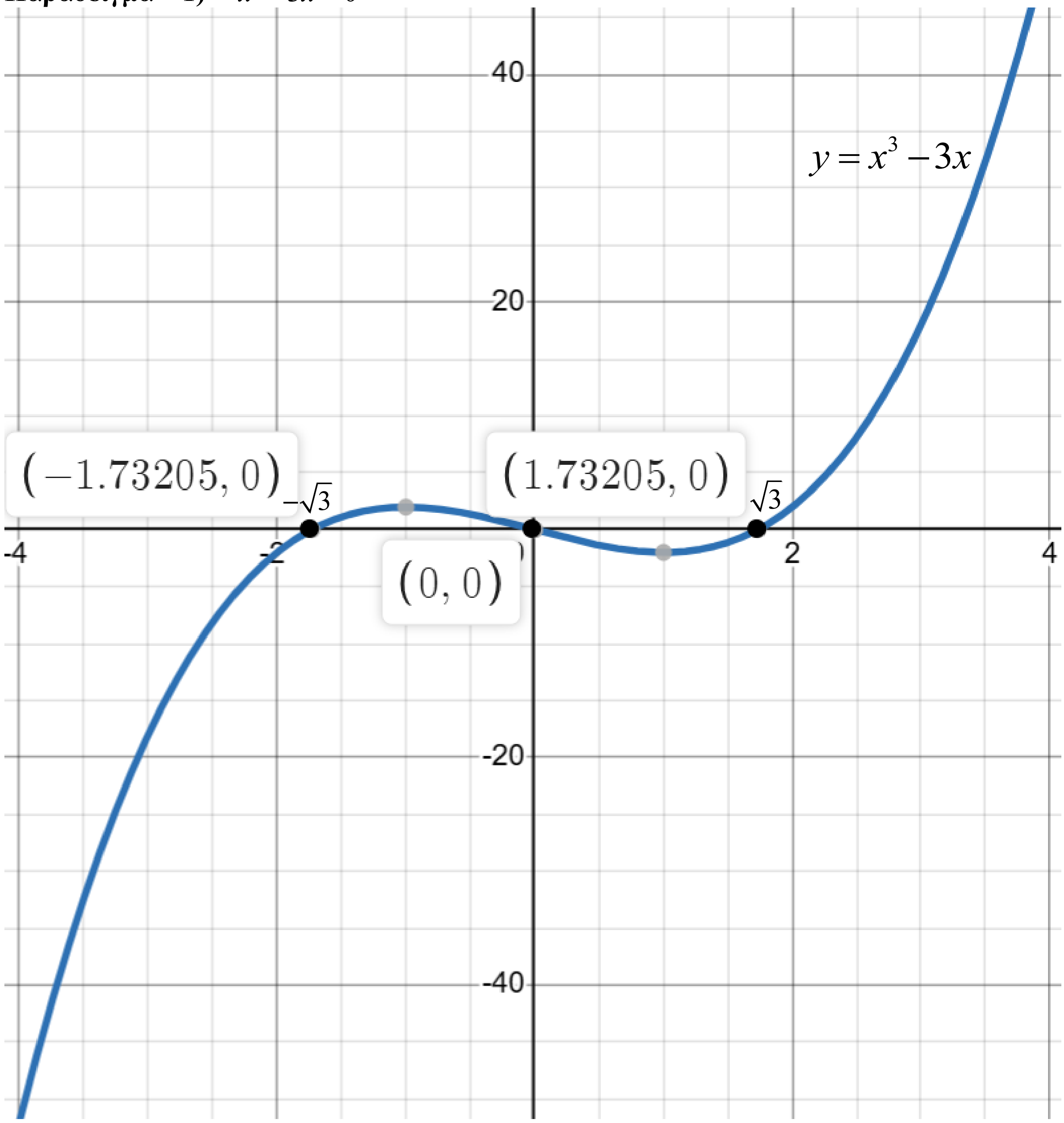
<u>ΟΜΩΣ ακόμα και αν Δ<0 η εξίσωση μπορεί να έχει λύσεις πραγματικούς αριθμούς !</u>
<u>Το γεγονός αυτό οδήγησε στην ανακάλυψη των μιγαδικών αριθμών.</u>

Γραφική παράσταση της $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Τα x για τα οποία y=0, δηλαδή η καμπύλη τέμνει τον οριζόντιο άξονα, είναι οι λύσεις της εξίσωσης.



Παράδειγμα 1) $x^3 - 3x = 0$



Αυτή λύνεται εύκολα χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το γενικό τύπο. Απλώς παραγοντοποιούμε την έκφραση και βλέπουμε ότι έχει τρεις πραγματικές λύσεις

$$x^3-3x=0 \Rightarrow x(x^2-3)=0 \Rightarrow x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=\sqrt{3},\ x_3=-\sqrt{3}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε το γενικό τύπο με $a=1,\ b=0,\ c=-3,\ d=0,\ p=-3,\ q=0$, για να βρούμε αρχικά το z :

$$z^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\Delta}$$

βλέπουμε ότι η διακρίνουσα είναι αρνητική.

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\frac{p^2}{4}+\frac{q^3}{27}}=\sqrt{\frac{0}{4}+\frac{(-3)^3}{27}}=\sqrt{-1}$$

Όμως τώρα δεν μπορούμε να σταματήσουμε και να πούμε ότι δεν υπάρχουν πραγματικές λύσεις επειδή ξέρουμε ότι υπάρχουν!

Πρέπει να βρούμε έναν τρόπο να διαχειριστούμε την ποσότητα $\sqrt{-1}$ σε ενδιάμεσους υπολογισμούς ώστε μετά τις πράξεις που θα κάνουμε, το $\sqrt{-1}$ να εξαφανιστεί στην περίπτωσή μας και να καταλήξουμε στις γνωστές πραγματικές λύσεις. **Έτσι ανακαλύφθηκαν οι μιγαδικοί αριθμοί.**

Θέτουμε $\sqrt{-1}=i$ και το ονομάζουμε φανταστική μονάδα

Άρα $i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1$ και $i^{-1}=\frac{1}{i}=-i$ αφού $i(-i)=1$

Ο τύπος της τριτοβάθμιας δίνει : $z^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\Delta}=0\pm\sqrt{-1}=\pm i \Rightarrow z=\sqrt[3]{\pm i}$

Πρέπει να βρούμε τις κυβικές ρίζες των $\pm i$.

Θεωρούμε ότι θα είναι μια έκφραση που μπορεί να έχει και πραγματικό και φανταστικό μέρος

$$z=\alpha+i\beta$$

και την οποία ονομάζουμε μιγαδικό αριθμό.

Ο κύβος αυτής της έκφρασης πρέπει να δίνει $\pm i$

$z^3=i \Rightarrow (\alpha+i\beta)^3=i \Rightarrow \alpha^3+3\alpha^2 i\beta+3\alpha i^2\beta^2+i^3\beta^3=i \Rightarrow \alpha^3-3\alpha\beta^2+(3\alpha^2\beta-\beta^3)i=i$

Τα δύο σκέλη της εξίσωσης πρέπει να έχουν τα ίδια πραγματικά και φανταστικά μέρη οπότε παίρνουμε δύο εξισώσεις για τους δύο αγνώστους α και β τις οποίες λύνουμε:

$\alpha^3-3\alpha\beta^2=0 \Rightarrow \alpha^3=3\alpha\beta^2 \Rightarrow$ αν $\alpha\neq 0$ $\alpha^2=3\beta^2 \Rightarrow \alpha=\pm\sqrt{3}\beta$

$3\alpha^2\beta-\beta^3=1 \Rightarrow 3\left(\pm\sqrt{3}\beta\right)^2-\beta^3=1 \Rightarrow (9-1)\beta^3=1 \Rightarrow \beta^3=\frac{1}{8} \Rightarrow \beta=\frac{1}{2}$

Άρα $\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ και οι δύο κυβικές ρίζες του i είναι : $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ και $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$

Αν $\alpha=0$ τότε $(i\beta)^3=i \Rightarrow -i\beta^3=i \Rightarrow \beta^3=-1 \Rightarrow \beta=-1$

Άρα η τρίτη κυβική ρίζα του i είναι : $-i$

Οπότε $z^3=i \Rightarrow z=\sqrt[3]{i} \Rightarrow z=-i,\ \frac{\sqrt{3}+i}{2},\ \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$

Οι κυβικές ρίζες του $-i$ θα είναι οι αντίθετοι αριθμοί :

$z'^3=-i \Rightarrow z'=\sqrt{-i} \Rightarrow z'=i,\ -\frac{\sqrt{3}+i}{2},\ \frac{\sqrt{3}-i}{2}$

Από τα z ή z' βρίσκουμε τα $x=z-\frac{p}{3z}-\frac{b}{3a}$:

$$x=z-\frac{p}{3z}-\frac{b}{3a}=z-\frac{-3}{3z}=z+\frac{1}{z}$$

Τώρα πρέπει να βρούμε τον αντίστροφο ενός μιγαδικού αριθμού. Μπορούμε να εργαστούμε όπως και για τις κυβικές ρίζες. Ψάχνουμε έναν μιγαδικό αριθμό $z^{-1} = \frac{1}{z} = \gamma + i\delta$ ώστε

$$zz^{-1} = (\alpha + i\beta)(\gamma + i\delta) = 1$$

Εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη των δύο σκελών της εξίσωσης παίρνουμε δύο εξισώσεις για τους δύο αγνώστους γ και δ τις οποίες λύνουμε. Κάντε το σαν άσκηση.
Θα εργαστούμε αλλιώς. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός

$$\bar{z} = \alpha - i\beta$$

που τον ονομάζουμε συζυγή του z δίνει πραγματικό γινόμενο αν τον πολλαπλασιάσουμε με τον z:

$$z\bar{z} = (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \alpha^2 \cancel{-\alpha i\beta} \cancel{+i\beta\alpha} - i^2\beta^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

Άρα : $$z\frac{\bar{z}}{\alpha^2 + \beta^2} = 1$$

Οπότε ο αντίστροφος του $z = \alpha + i\beta$ είναι ο $\frac{\bar{z}}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$

Ορίζουμε το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + i\beta$ ως : $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

Οπότε ο αντίστροφός ενός μιγαδικού αριθμού είναι ο συζυγής του δια το μέτρο του στο τετράγωνο:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Τα μέτρα όλων των κυβικών ριζών z και z' που βρήκαμε είναι 1:

$$|\pm i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1, \quad \left|\pm\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1, \quad \left|\pm\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$$

Άρα οι αντίστροφοι των z και z' είναι απλά οι συζυγείς τους :

$$z_1 = -i \Rightarrow \frac{1}{z_1} = i \qquad z_1' = i \Rightarrow \frac{1}{z_1'} = -i$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \Rightarrow \frac{1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}-i}{2} \qquad z_2' = -\frac{\sqrt{3}+i}{2} \Rightarrow \frac{1}{z_2'} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$$

$$z_3 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2} \Rightarrow \frac{1}{z_3} = -\frac{\sqrt{3}+i}{2} \qquad z_3' = \frac{\sqrt{3}-i}{2} \Rightarrow \frac{1}{z_3'} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τις ρίζες της τριτοβάθμιας χρησιμοποιώντας τον τύπο της λύσης και να δούμε αν θα είναι πραγματικές και αυτές που ήδη ξέρουμε $x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{3},\ x_3 = -\sqrt{3}$.
Πράγματι βρίσκουμε ότι οι έξι κυβικές ρίζες δίνουν τις τρεις γνωστές πραγματικές λύσεις :

$$x_1 = z_1 + \frac{1}{z_1} = z_1' + \frac{1}{z_1'} = i - i = 0$$

$$x_2 = z_2 + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3'} + z_3' = \frac{\sqrt{3}+i}{2} + \frac{\sqrt{3}-i}{2} = \sqrt{3}$$

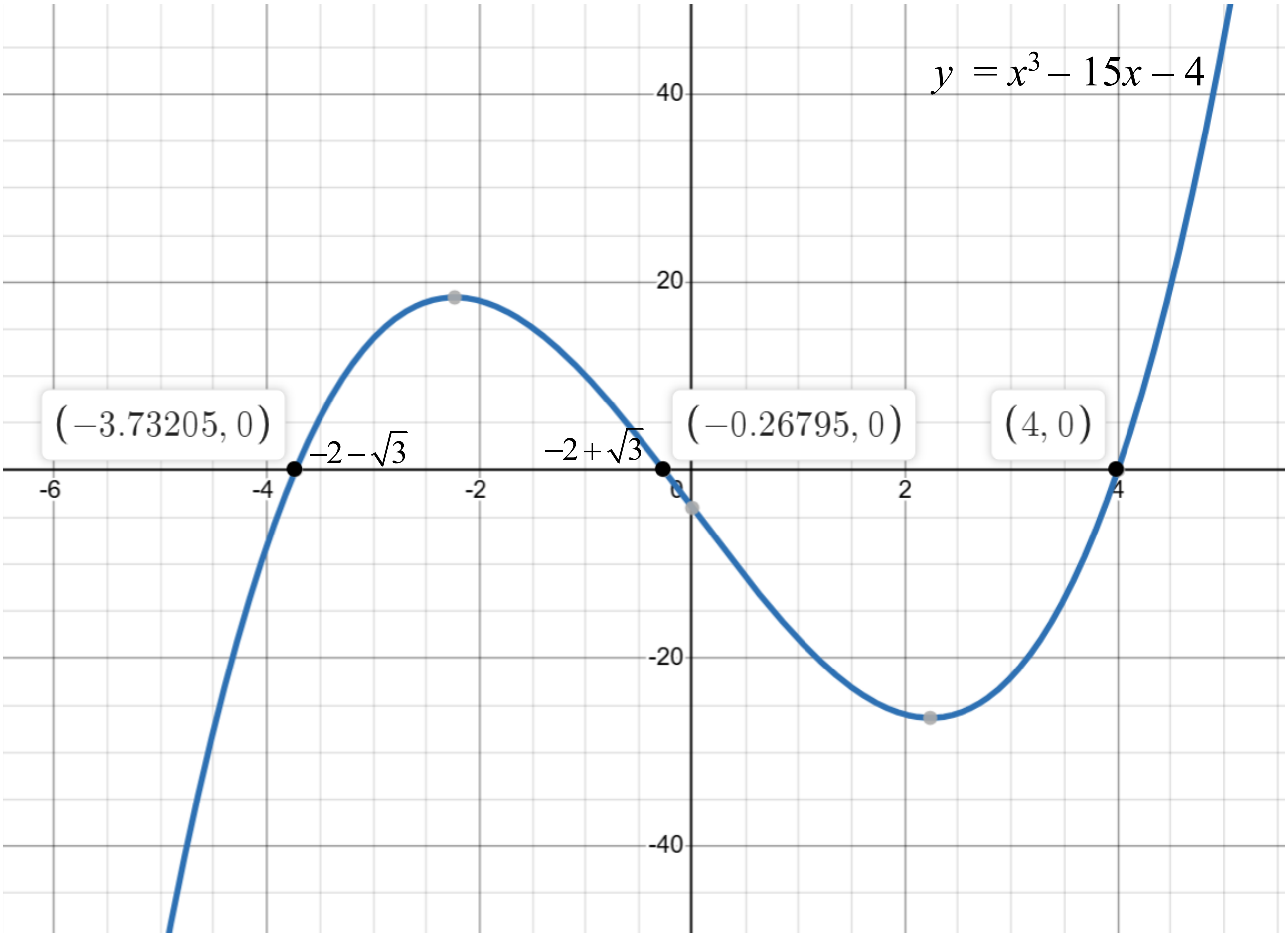
$$x_3 = z_3 + \frac{1}{z_3} = \frac{1}{z_2'} + z_2' = \frac{-\sqrt{3}+i}{2} - \frac{\sqrt{3}+i}{2} = -\sqrt{3}$$

Άρα πράγματι βλέπουμε ότι αν δεχτούμε όλα αυτά τα ενδιάμεσα «παπατζιλίκια» με τους φανταστικούς και τους μιγαδικούς αριθμούς (στην αρχή τους ονόμαζαν πλασματικούς αριθμούς) τότε ο τύπος της λύσης της τριτοβάθμιας δίνει το σωστό αποτέλεσμα στο τέλος.

Ένας άλλος τρόπος να διώχνουμε τους μιγαδικούς από τον παρονομαστή είναι να πολλαπλασιάζουμε και να διαιρούμε με τον συζυγή του παρονομαστή

Π.χ. $z+\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}+i}\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}+\frac{2\left(\sqrt{3}-i\right)}{3+1}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}+\frac{\sqrt{3}-i}{2}=\sqrt{3}$

Παράδειγμα 2) $x^3-15x-4=0$



Και αυτή παραγοντοποιείται εύκολα

$$x^3-15x-4=x^3-16x+x-4=x\left(x^2-16\right)+(x-4)=x(x-4)(x+4)+(x-4)=(x-4)\left[x(x+4)+1\right]$$

$$=(x-4)\left(x^2+4x+1\right)$$

Η μια λύση είναι $x_0=4$ και οι λύσεις του τριωνύμου είναι

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{-4\pm2\sqrt{4-1}}{2}=-2\pm\sqrt{3}$$

Είναι ήδη στην ανηγμένη μορφή $x^3+px+q=0$ με $p=-15,\ q=-4$

Άρα: $$x=z-\frac{p}{3z}=z-\frac{-15}{3z}=z+\frac{5}{z}$$

$$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{(-4)^2}{4}+\frac{(-15)^3}{27}=4-\frac{\cancel{3^3}5^3}{\cancel{27}}=4-125=-121$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{-121}=\sqrt{-11^2}=11\sqrt{-1}=11i$$

$$z^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\Delta}=-\frac{-4}{2}\pm11i=2+11i$$

Πως μπορούμε να βρίσκουμε γρήγορα τις κυβικές ρίζες ή και κάθε ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού $\zeta=\alpha+i\beta$? Χρησιμοποιούμε την πολική μορφή ενός μιγαδικού και τη σχέση Euler.

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το μέτρο $|\zeta| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

$$\zeta = \alpha + i\beta = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{a}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + i\frac{b\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)$$

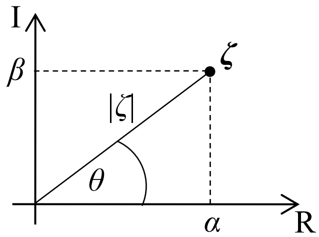
Όμως $-1 < \dfrac{a}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} < 1, \quad -1 < \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} < 1$ και $\left(\dfrac{a}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2 = 1$

Άρα ορίζεται μια γωνία θ με : $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \sin\theta = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \tan\theta = \dfrac{\beta}{\alpha}$

και ο κάθε μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφτεί : $\zeta = \alpha + i\beta = |\zeta|(\cos\theta + i\sin\theta)$

Υπάρχει μια απίστευτη σχέση που ανακάλυψε ο Euler : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
και άρα ένας μιγαδικός αριθμός γράφεται : $\zeta = |\zeta| e^{i\theta}$

Οι μιγαδικοί αριθμοί μπορούν να απεικονιστούν σε ένα επίπεδο με οριζόντιο άξονα το πραγματικό τους μέρος και κάθετο το φανταστικό τους μέρος.



$$\zeta = \alpha + i\beta = |\zeta| e^{i\theta} = |\zeta|(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{με } 0 \le \theta < 2\pi$$

όπου: $\alpha = |\zeta|\cos\theta \qquad |\zeta| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$
$\beta = |\zeta|\sin\theta \qquad \theta = \tan^{-1}(\beta/\alpha)$

Τώρα μπορούμε να βρούμε εύκολα την κυβική του ρίζα

$$\sqrt[3]{\zeta} = \zeta^{1/3} = \left(|\zeta| e^{i\theta}\right)^{1/3} = |\zeta|^{1/3} e^{i\theta/3} = \sqrt[3]{|\zeta|}\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\right)$$

Παρόμοια βρίσκεται και κάθε άλλη ρίζα :

$$\sqrt[n]{\zeta} = \zeta^{1/n} = \left(|\zeta| e^{i\theta}\right)^{1/n} = \sqrt[n]{|\zeta|} e^{i\theta/n} = \sqrt[n]{|\zeta|}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

Δηλαδή παίρνουμε τη νιοστή ρίζα του μέτρου και διαιρούμε τη γωνία διά *n*.
Στην περίπτωσή μας θέλουμε τις κυβικές ρίζες *z* του $\zeta = 2 + 11i = z^3$

Μέτρο : $|\zeta| = \sqrt{2^2 + 11^2} = \sqrt{4+121} = \sqrt{125} = \sqrt{5^3} = 5^{3/2} \Rightarrow \sqrt[3]{|\zeta|} = \left(5^{3/2}\right)^{1/3} = 5^{1/2} = \sqrt{5}$

Γωνία : $\varphi_0 = \dfrac{\theta}{3} = \dfrac{1}{3}\tan^{-1}\left(\dfrac{11}{2}\right) = 0,46364761 \text{ rad} = 26,56505118^{\circ}$

Άρα μια κυβική ρίζα είναι

$$z_0 = \sqrt{5} e^{i\theta/3} = \sqrt{5}\left(\cos 0,46364761 + i\sin 0,46364761\right) = 2 + i$$

Η $e^{i\theta}$ είναι περιοδική με περίοδο 2π : $\zeta = |\zeta| e^{i\theta} = |\zeta| e^{i(\theta + 2k\pi)}$ όπου *k* ακέραιος. Άρα και κάθε άλλος αριθμός που έχει μέτρο $\sqrt{5}$ και η γωνία του $\varphi < 2\pi$ αν πολλαπλασιαστεί επί τρία δίνει $\theta + 2k\pi$ θα είναι κυβική ρίζα του $\zeta = 2 + 11i$:

$$\varphi_0 = \frac{\theta}{3}, \quad \text{για } k = 0$$

$$3\varphi = \theta + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\theta}{3} + k\frac{2\pi}{3} < 2\pi \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}, \quad \text{για } k = 1$$

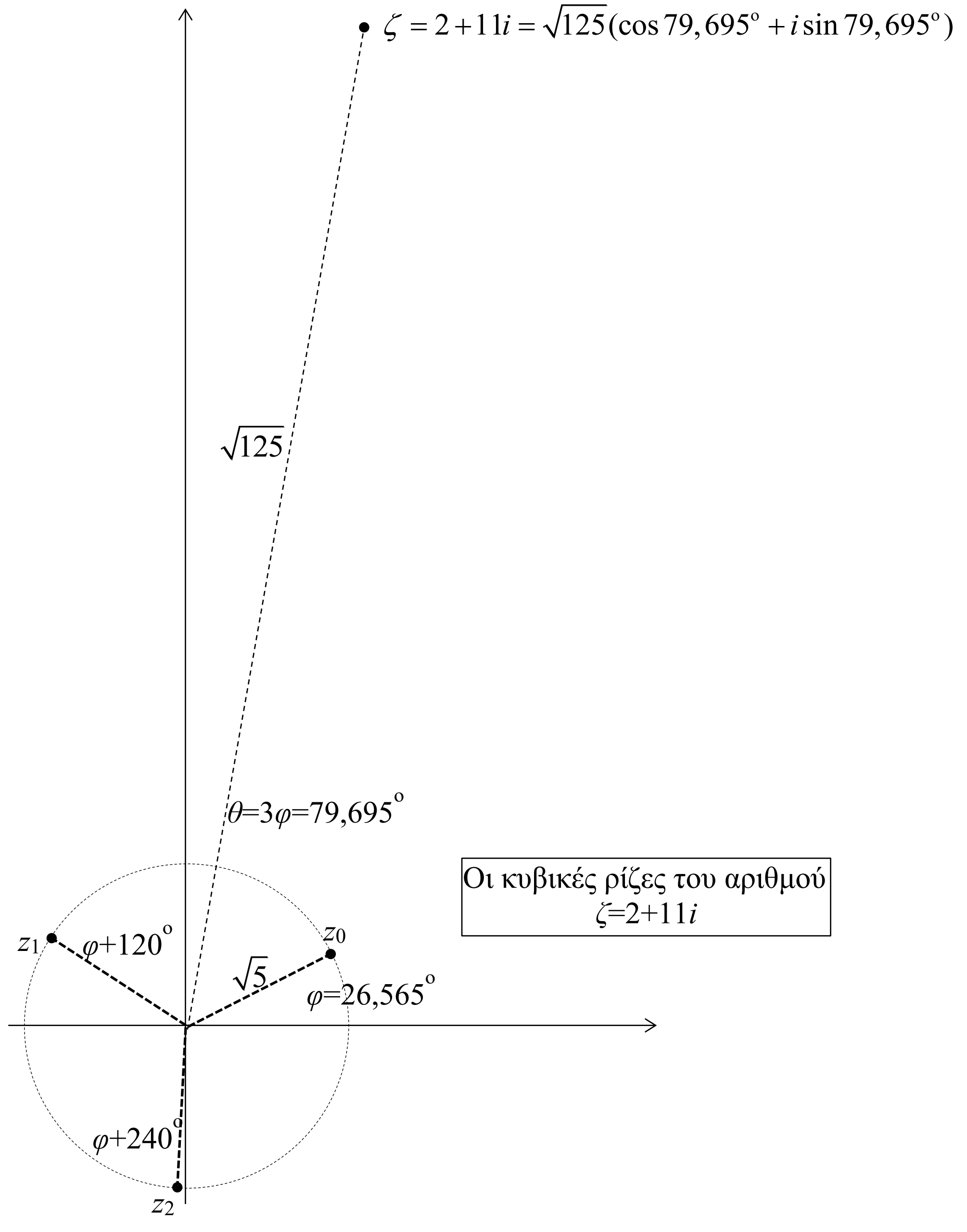
$$\varphi_2 = \frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}, \quad \text{για } k = 2$$

Άρα οι άλλες δύο κυβικές ρίζες του $\zeta = 2 + 11i = z^3$ είναι

$$z_1 = \sqrt{5}e^{i\theta/3+i2\pi/3} = \sqrt{5}e^{i\theta/3}e^{i2\pi/3} = (2+i)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = (2+i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{2+\sqrt{3}}{2} + i\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$$

$$z_2 = \sqrt{5}e^{i\theta/3+i4\pi/3} = \sqrt{5}e^{i\theta/3}e^{i4\pi/3} = (2+i)\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = (2+i)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-2+\sqrt{3}}{2} - i\frac{2\sqrt{3}+1}{2}$$

Παρατηρούμε ότι οι κυβικές ρίζες είναι σημεία ενός κύκλου ακτίνας $\sqrt{5}$ και σε γωνίες που διαφέρουν μεταξύ τους κατά $\frac{2\pi}{3} = 120^{\circ}$



Υπενθυμίζουμε ότι ο αντίστροφος ενός αριθμού είναι $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Πλέον είμαστε σε θέση να γράψουμε τις λύσεις της τριτοβάθμιας

$$x_0 = z_0 + \frac{5}{z_0} = 2 + i + \frac{5}{2+i} = 2 + i + \frac{5}{2+i}\frac{2-i}{2-i} = 2 + i + \frac{5(2-i)}{4+1} = 2 + i + 2 - i = 4$$

$$x_1 = z_1 + \frac{5}{z_1} = z_1 + 5\frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} = z_1 + 5\frac{\bar{z}_1}{5} = z_1 + \bar{z}_1 = -2 - \sqrt{3}$$

$$x_2 = z_2 + \frac{5}{z_2} = z_2 + 5\frac{\overline{z}_2}{|z_2|^2} = z_2 + 5\frac{\overline{z}_2}{5} = z_2 + \overline{z}_2 = -2+\sqrt{3}$$

Βλέπουμε πάλι ότι οι λύσεις και αυτής της τριτοβάθμιας είναι οι πραγματικοί αριθμοί 4, $-2+\sqrt{3}$ και $-2-\sqrt{3}$, αλλά για να καταλήξουμε σε αυτούς πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία των μιγαδικών αριθμών!

Αποδείξεις των τύπων για τις λύσεις

Δευτεροβάθμια $ax^2+bx+c=0$

1) Κλασική μέθοδος συμπλήρωσης του τετραγώνου

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \Rightarrow \text{ συμπληρώνω το τετράγωνο}$$

$$x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \Rightarrow \text{ παίρνω ρίζα}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2) Μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί και στην τριτοβάθμια

Αλλάζω μεταβλητή $x \to y$ γράφοντας $x=y-\xi$ και επιλέγω το ξ ώστε να μηδενιστεί ο γραμμικός όρος του y και να πάρω μια εξίσωση της μορφής $Ay^2+C=0 \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{-C}{A}}$

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a(y-\xi)^2+b(y-\xi)+c \\ &= ay^2-2a\xi y+a\xi^2+by-b\xi+c \\ &= ay^2+(b-2a\xi)y+a\xi^2-b\xi+c \end{aligned}$$

Οπότε επιλέγω : $\xi=\frac{b}{2a}$

και έχω : $ay^2+\cancel{\left(b-2a\frac{b}{2a}\right)}y+a\frac{b^2}{4a^2}-b\frac{b}{2a}+c=ay^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

Οπότε η εξίσωση για το y είναι : $ay^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0 \Rightarrow y^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

και άρα οι λύσεις της $ax^2+bx+c=0$ είναι :

$$x=y-\xi=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Τριτοβάθμια $ax^3+bx^2+cx+d=0$

Όπως και πριν θέτω $x=y-\xi$

$$\begin{aligned} ax^3+bx^2+cx+d &= a(y-\xi)^3+b(y-\xi)^2+c(y-\xi)+d \\ &= ay^3-3a\xi y^2+3a\xi^2 y-a\xi^3+by^2-2b\xi y+b\xi^2+cy-c\xi+d \\ &= ay^3+(b-3a\xi)y^2+(3a\xi^2-2b\xi+c)y-a\xi^3+b\xi^2-c\xi+d \end{aligned}$$

Για $\xi=\frac{b}{3a}$ ο τετραγωνικός όρος μηδενίζεται

$$x = y - \frac{b}{3a}$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ay^3 + \left(\cancel{b - 3a\frac{b}{3a}}\right) y^2 + \left(3a\frac{b^2}{9a^2} - 2b\frac{b}{3a} + c\right) y - a\frac{b^3}{27a^3} + b\frac{b^2}{9a^2} - c\frac{b}{3a} + d$$

$$= ay^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a}\right) y + a\frac{2b^3}{27a^3} + \frac{3ad - bc}{3a}$$

$$= ay^3 + a\underbrace{\left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)}_{p} y + a\underbrace{\frac{2b^3 + 27a^2 d - 9abc}{27a^3}}_{q}$$

$$= a\left(y^3 + py + q\right)$$

Άρα κάθε τριτοβάθμια εξίσωση $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ μπορεί να μετασχηματιστεί στη μορφή:

$$y^3 + py + q = 0$$

Αυτή λέγεται η ανηγμένη (depressed) τριτοβάθμια και αν μπορέσουμε να λύσουμε αυτή τότε θα μπορούμε να λύσουμε κάθε τριτοβάθμια. Κάνοντας άλλον έναν μετασχηματισμό $y = z - \frac{p}{3z}$ (αντικατάσταση του Vieta) η ανηγμένη τριτοβάθμια γίνεται δευτεροβάθμια ως προς z^3

$$y^3 + py + q = \left(z - \frac{p}{3z}\right)^3 + p\left(z - \frac{p}{3z}\right) + q = z^3 - 3z^2\frac{p}{3z} + 3z\frac{p^2}{9z^2} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q$$

$$= z^3 - \cancel{pz} + \cancel{\frac{p^2}{3z}} - \frac{p^3}{27z^3} + \cancel{pz} - \cancel{\frac{p^2}{3z}} + q = ^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = \frac{1}{z^3}\left(z^6 - \frac{p^3}{27} + qz^3\right)$$

Άρα κάθε τριτοβάθμια εξίσωση $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ μπορεί να μετασχηματιστεί στη μορφή:

$$\left(z^3\right)^2 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

Αυτή είναι **δευτεροβάθμια ως προς** z^3 με :

$$\alpha = 1, \quad \beta = q, \quad \gamma = -\frac{p^3}{27}, \quad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = q^2 - 4(-1)\frac{p^3}{27} = 4\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$$

και άρα με λύσεις : $z^3 = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-q \pm 2\sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}}{2} = -\dfrac{q}{2} \pm \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}$

$$\boxed{\text{Οπότε } z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad \text{όπου } p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad \text{και } q = \frac{2b^3 + 27a^2 d - 9abc}{27a^3} \qquad x = z - \frac{p}{3z} - \frac{b}{3a}}$$