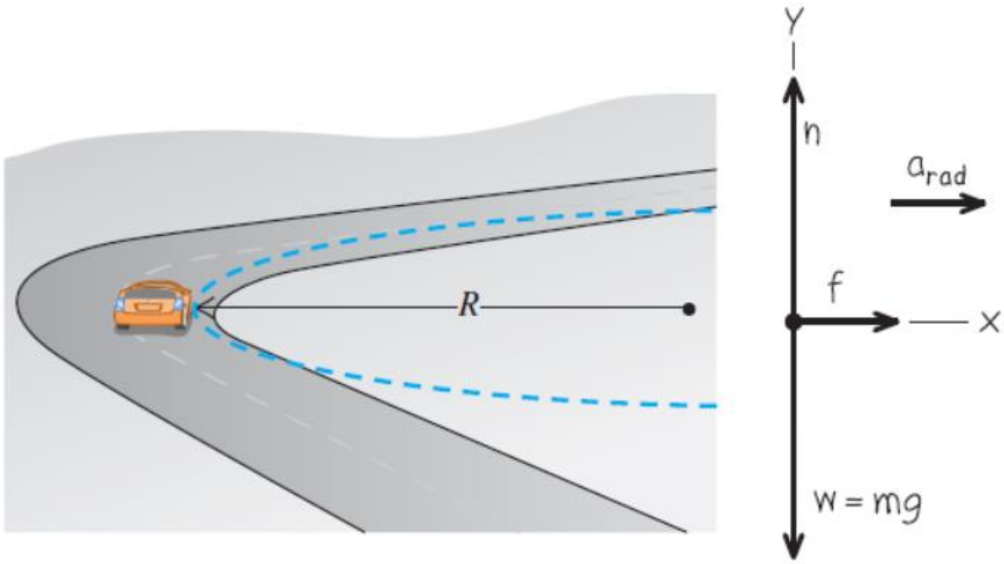
# ΣΥΛΛΟΓΗ ΛΥΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1

## Οριζόντια στροφή

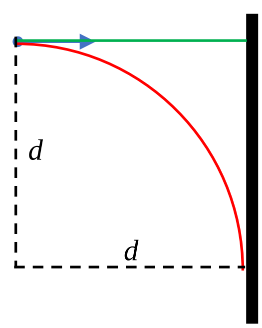



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg$$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow f_s = \frac{m\upsilon^2}{R}$$

$$\mu_s N \geq f_s \Rightarrow \mu_s mg \geq \frac{m\upsilon^2}{R} \Rightarrow \upsilon^2 \leq \mu_s gR \Rightarrow \upsilon_{\max} = \sqrt{\mu_s gR}$$

## Αποφυγή τοίχου




Τι σχέση πρέπει να έχουν ο συντελεστής κινητικής τριβής με τον συντελεστή στατικής τριβής για να μπορώ να αποφύγω τον τοίχο είτε φρενάροντας είτε στρίβοντας?
Με φρενάρισμα (πέδηση)

$$W_f = K_2 - K_1 \Rightarrow -f_k s_{stop} = 0 - \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \mu_k mg s_{stop} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow s_{stop} = \frac{\upsilon^2}{2a} = \frac{\upsilon^2}{2\mu_k g}$$

$$\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 = \upsilon_{\alpha\rho\chi}^2 + 2as \Rightarrow 0 = \upsilon^2 - 2\frac{f_k}{m}s_{stop} \Rightarrow 2\frac{\mu_k mg}{m}s_{stop} = \upsilon^2 \Rightarrow s_{stop} = \frac{\upsilon^2}{2\mu_k g}$$

$$s_{stop} \le d \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{2\mu_k g} \le d \Rightarrow \upsilon \le \sqrt{2\mu_k gd}$$

Με στροφή $\upsilon_{\max} = \sqrt{\mu_s gR} = \sqrt{\mu_s gd}$

$$\upsilon \le \upsilon_{\max} \Rightarrow \sqrt{2\mu_k gd} \le \sqrt{\mu_s gd} \Rightarrow 2\mu_k \le \mu_s$$

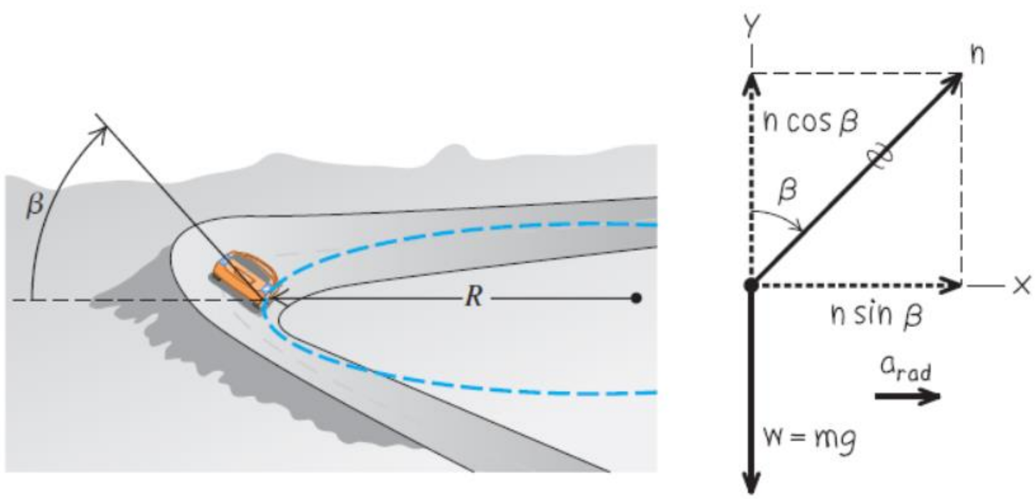
Αυτό ποτέ δεν συμβαίνει επειδή $\mu_s \geq\approx \mu_k$ οπότε για να αποφύγω τον τοίχο με στροφή θα πρέπει να στρίψω όταν είμαι σε απόσταση $2s_{stop}$

Για $\mu_s \approx \mu_k$

$$\upsilon \le \upsilon_{\max} \Rightarrow \sqrt{2\mu_k g s_{stop}} \le \sqrt{\mu_s gR} \Rightarrow 2s_{stop} \le R$$

**Κεκλιμένη στροφή**

Τι κλίση πρέπει να έχει η στροφή ώστε να μπορούμε να την πάρουμε με ταχύτητα $\upsilon$ ακόμα και αν ο δρόμος είναι καλυμμένος με πάγο, δηλαδή χωρίς τριβή. Λόγω της κλίσης η κάθετη αντίδραση θα παίξει τώρα το ρόλο της κεντρομόλου.




$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N\cos\beta = mg$$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow N\sin\beta = \frac{m\upsilon^2}{R}$$

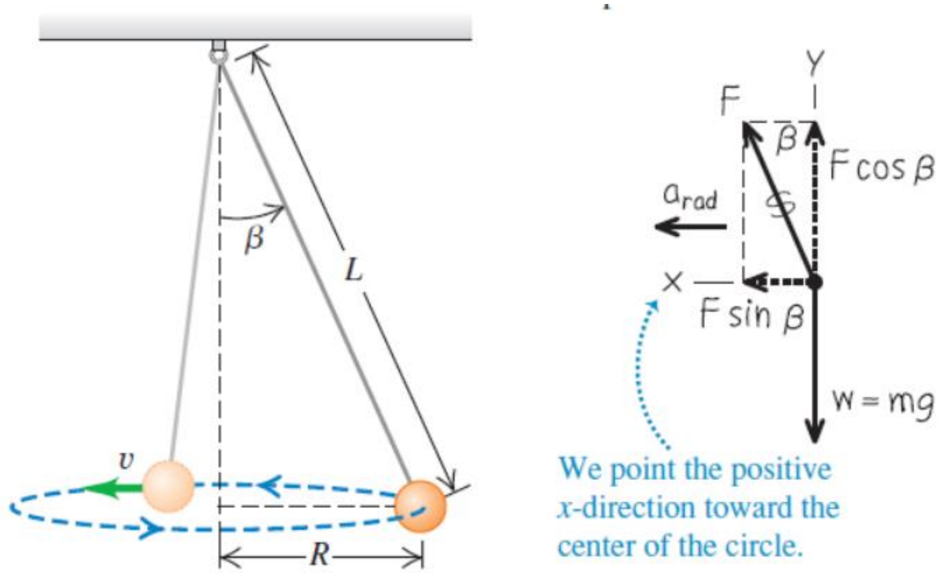
Διαιρώντας : $\tan\beta = \dfrac{\upsilon^2}{gR}$

Αριθμητική εφαρμογή $\upsilon = 120\ \mathrm{km/h} = 33{,}3\ \mathrm{m/s}$, $R = 500\ \mathrm{m}$

$$\beta = \arctan\left(\frac{\upsilon^2}{gR}\right) = \arctan\left(\frac{33{,}3^2}{9{,}8\cdot\ 500}\right) = \arctan(0{,}226) = 12{,}8^{\circ}$$

**Κωνικό εκκρεμές**

Έχει ίδιο διάγραμμα δυνάμεων με την κεκλιμένη στροφή.




Αν το νήμα έχει μήκος $L$ και η μάζα κινείται με ταχύτητα $\upsilon$ σε γωνία $\beta$ από την κατακόρυφο πόση είναι η τάση $F$ του νήματος και η περίοδος $T$ της κυκλικής κίνησης ?

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F\cos\beta = mg \Rightarrow F = \frac{mg}{\cos\beta}$$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow F\sin\beta = \frac{m\upsilon^2}{R}$$

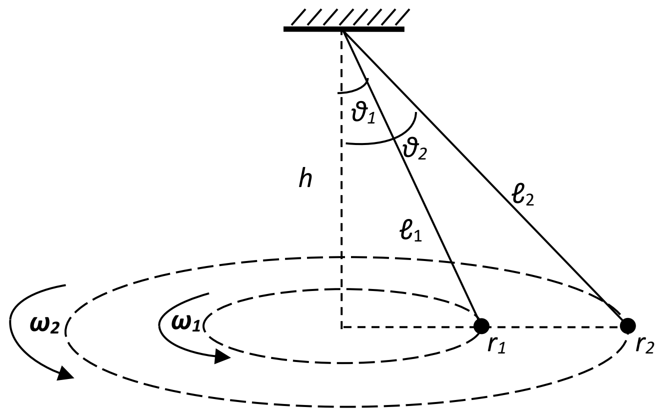
Διαιρώντας παίρνουμε πάλι : $\tan\beta = \dfrac{\upsilon^2}{gR}$

Αντικαθιστούμε $\upsilon = \dfrac{2\pi R}{T}$ και $R = L\sin\beta$, οπότε

$$\tan\beta = \frac{\upsilon^2}{gR} \Rightarrow \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2 gR} = \frac{4\pi^2}{g}L\sin\beta \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\beta}{g}}$$

**Γωνιακή ταχύτητα κωνικού εκκρεμούς**

Δύο κωνικά εκκρεμή διαγράφουν οριζόντιους κύκλους στην ίδια απόσταση από την οροφή. όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



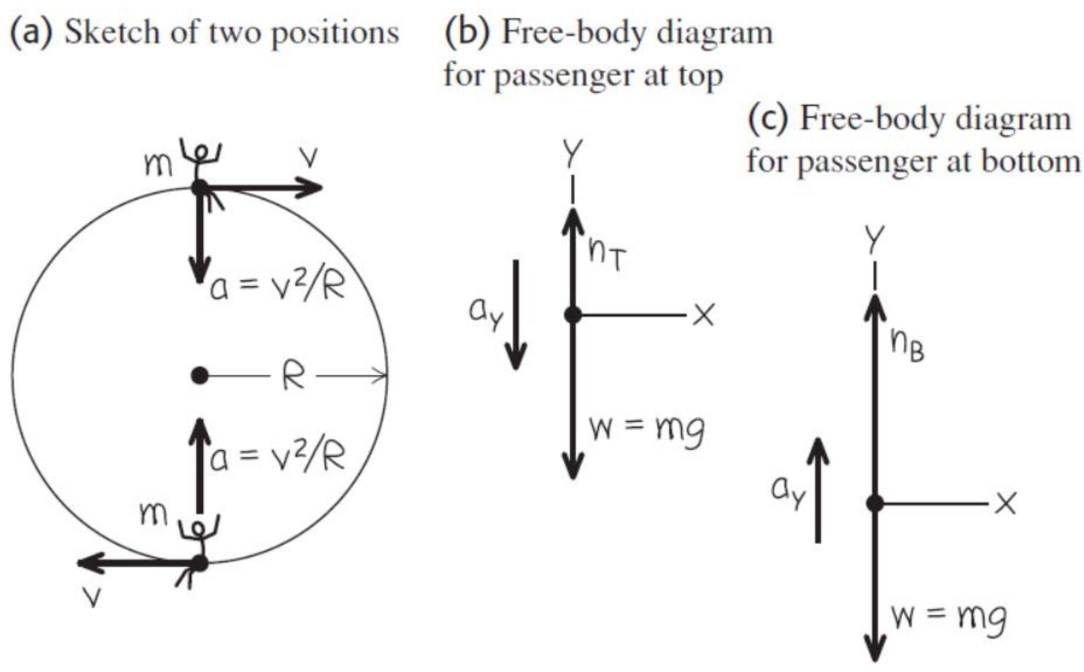

Για τις γωνιακές τους ταχύτητες ισχύει : Α. $\omega_1 < \omega_2$ Β. $\omega_1 = \omega_2$ Γ. $\omega_1 > \omega_2$

Σωστή απάντηση : Β $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \sqrt{\frac{g}{\ell_1 \cos\theta_1}} = \sqrt{\frac{g}{h}} = \sqrt{\frac{g}{\ell_2 \cos\theta_2}} = \omega_2$

**Κατακόρυφος κύκλος**

Κάθετη αντίδραση στην κορυφή και στο χαμηλότερο σημείο

Επιβάτης διαγράφει κύκλο με σταθερή ταχύτητα $\upsilon$ σε ρόδα λούνα παρκ ακτίνας *R*. Το κάθισμα του παραμένει πάντα όρθιο. Τι κάθετη αντίδραση δέχεται από το κάθισμα όταν βρίσκεται στην κορυφή και στο χαμηλότερο σημείο του κύκλου.



Η κάθετη αντίδραση και το βάρος συνεισφέρουν στην κεντρομόλο επιτάχυνση.

Κορυφή : $\sum F_y = ma_y \Rightarrow N_T - mg = -\dfrac{m\upsilon^2}{R} \Rightarrow N_T = m\left(g - \dfrac{\upsilon^2}{R}\right)$

Χαμηλότερο σημείο : $\sum F_y = ma_y \Rightarrow N_B - mg = \dfrac{m\upsilon^2}{R} \Rightarrow N_B = m\left(g + \dfrac{\upsilon^2}{R}\right)$

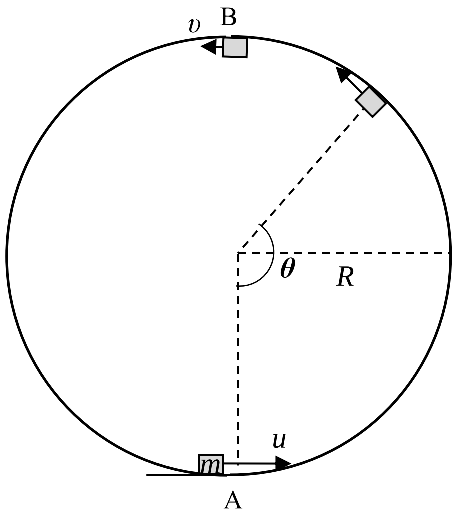
Παρατηρούμε ότι στην κορυφή όσο αυξάνεται η ταχύτητα η κάθετη αντίδραση μειώνεται. Για κάποια ταχύτητα η κάθετη αντίδραση γίνεται μηδέν. Αυτή είναι :

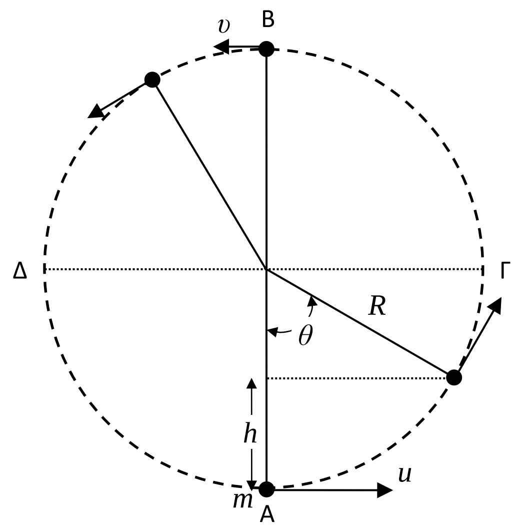
$$N_T = 0 \Rightarrow m\left(g - \frac{m\upsilon_{\max}^2}{R}\right) = 0 \Rightarrow \upsilon_{\max} = \sqrt{gR}$$

Τότε το βάρος από μόνο του αρκεί για να προκαλεί την κεντρομόλο επιτάχυνση. Για ακόμα μεγαλύτερη ταχύτητα το βάρος δεν θα επαρκεί και ο επιβάτης θα φύγει από τη θέση του και θα εκτελέσει οριζόντια βολή.

Ταχύτητα ανακύκλωσης

Σώμα μάζας εισέρχεται σε κατακόρυφο κυκλικό οδηγό (ή ισοδύναμα κρέμεται στην άκρη νήματος και του δίνεται οριζόντια ώθηση). Ποια είναι η ελάχιστη αρχική ταχύτητα *u* ώστε να εκτελέσει ανακύκλωση.



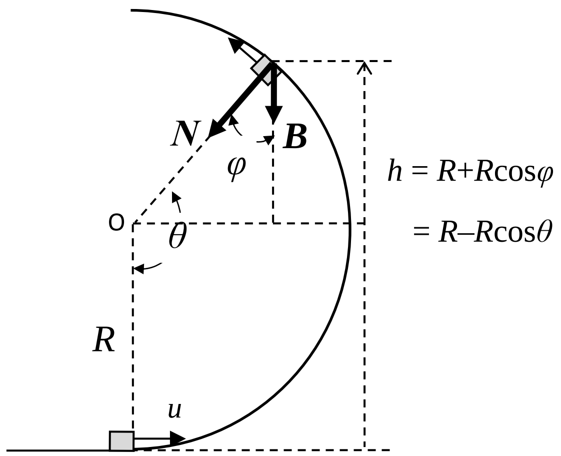



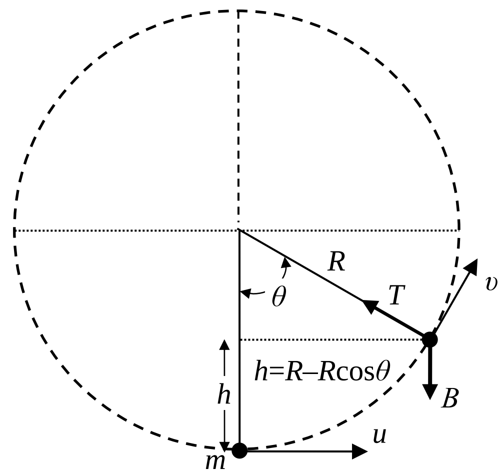

Η ελάχιστη ταχύτητα με την οποία μπορεί να περάσει από την κορυφή παραμένοντας στον κύκλο είναι αυτή στην οποία η κάθετη αντίδραση (τάση νήματος) γίνεται μηδέν και το βάρος μόνο είναι η κεντρομόλος δύναμη : $\upsilon = \sqrt{gR}$

Για να έχει αυτήν την ταχύτητα στην κορυφή, από διατήρηση της ενέργειας, θα πρέπει στη βάση να έχει ταχύτητα :

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + mgh \Rightarrow u^2 = gR + 2\cdot\ g\cdot\ 2R \Rightarrow u = \sqrt{5gR}$$

Κάθετη αντίδραση σε τυχαία θέση




Το ύψος $h$ και η γωνία $\theta$ από την κατακόρυφο συνδέονται με τη σχέση
$h = R - R\cos\theta$
Η αρχική ταχύτητα $u$ με την ταχύτητα $\upsilon$ σε τυχαίο ύψος συνδέονται με τη διατήρηση της ενέργειας

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + mgh \Rightarrow \upsilon^2 = u^2 - 2gh = u^2 - 2gR(1-\cos\theta)$$

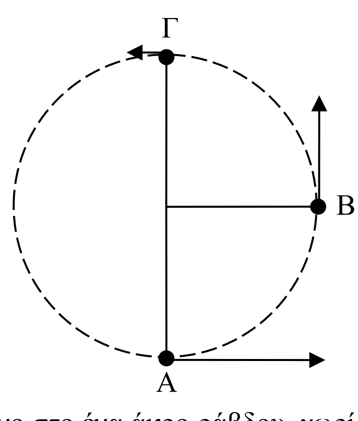
Η ακτινική συνιστώσα του βάρους με φορά προς το κέντρο είναι

$$B_r = mg\cos\varphi = -mg\cos\theta$$

Η κάθετη αντίδραση και η ακτινική συνιστώσα του βάρους προκαλούν την κεντρομόλο επιτάχυνση

$$N + B_r = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N - mg\cos\theta = m\frac{u^2 - 2gR(1-\cos\theta)}{R} \Rightarrow N = \frac{mu^2}{R} - mg(2-3\cos\theta)$$

**Κατακόρυφος κύκλος** (ράβδος)




Σώμα μάζας $m$ = 2 kg είναι προσαρτημένο στο ένα άκρο ράβδου, χωρίς μάζα, μήκους $\ell$ = 0,1 m, και περιστρέφεται κατακόρυφα όπως στο παραπάνω σχήμα.
Ποια είναι η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το σώμα στη βάση του κύκλου (Α) για να μπορέσει να εκτελέσει ανακύκλωση?

Επειδή εδώ έχουμε ράβδο η οποία μπορεί και να σπρώχνει και να τραβά το σώμα για να εκτελέσει το σώμα ανακύκλωση πρέπει απλά να φτάσει στην κορυφή, δηλ. να έχει $\upsilon$=0 στην κορυφή :

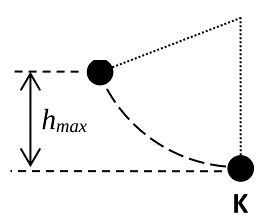
$$\frac{1}{2}mu^2 + 0 = 0 + mgh \Rightarrow u^2 = 2g \cdot\ 2\ell \Rightarrow u = 2\sqrt{g\ell} = 2 \text{ m/s}$$

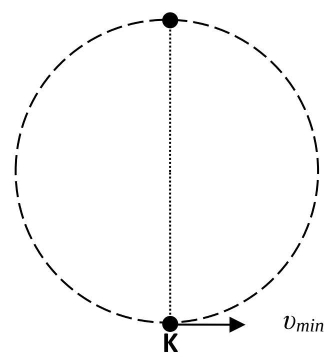
Έστω ότι οι ταχύτητες του σώματος στα αντίστοιχα σημεία της τροχιάς του είναι :

$$\upsilon_A = \sqrt{4,25}\ \text{ m/s}, \qquad \upsilon_B = 1,5\,\text{m/s}, \qquad \upsilon_A = 0,5\,\text{m/s}$$

Από τις τιμές των ταχυτήτων να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη δύναμη που να παράγει έργο στο σώμα, π.χ. αντίσταση του αέρα.
Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε στο σχήμα την δύναμη $F$ που ασκεί η ράβδος στο σώμα στα σημεία Α, Β και Γ. Να φαίνεται καθαρά η φορά της σε κάθε σημείο.

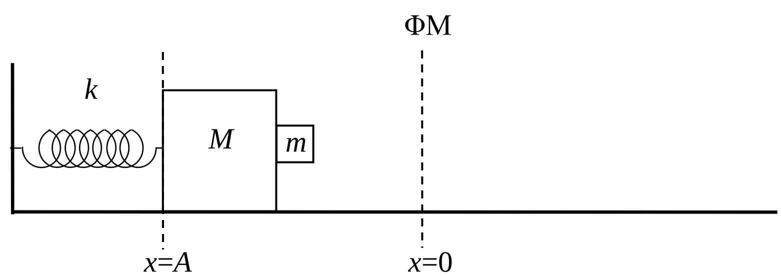
**Κατακόρυφος κύκλος** (νήμα)
Διαθέτουμε νήμα με όριο θραύσης $T_{θραύσης}$=60 N. Κατασκευάζουμε εκκρεμές με μήκος νήματος $\ell$ = 1 m στο οποίο κρεμάμε σώμα μάζας $M$= 5 kg . Ποιο είναι το μέγιστο ύψος από το οποίο μπορούμε να αφήσουμε ελεύθερο το εκκρεμές να ταλαντωθεί ώστε το νήμα να μην σπάσει όταν θα διέρχεται από το κατώτατο σημείο της τροχιάς K ;




Αντικαθιστούμε την προηγούμενη μάζα $M$ με μια μικρότερη μάζα $m$ = 1 kg. Ποια είναι η ελάχιστη ταχύτητα $\upsilon$ με την οποία πρέπει να την εκτοξεύσουμε οριζόντια από το σημείο K ώστε το εκκρεμές να εκτελέσει ανακύκλωση ;

## Κατακόρυφη στατική τριβή




Σπρώχνουμε τα σώματα $M$ και $m$ ώστε το ελατήριο να συσπειρωθεί και στη συνέχεια τα αφήνουμε να κινηθούν πάνω στο οριζόντιο λείο επίπεδο. Το σώμα $m$ δεν είναι συγκολλημένο στο σώμα $M$ και ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ τους είναι $\mu$. Για ποια τιμή του $x$ το σώμα $m$ δεν θα μπορεί πλέον να συγκρατηθεί στη θέση του και θα ολισθήσει προς τα κάτω;

Α) $\dfrac{(M+m)g}{k\mu}$ Β) $\dfrac{mg}{k\mu}$ Γ) $\dfrac{Mg}{k\mu}$ Δ) $\dfrac{Mmg}{(M+m)k\mu}$ Ε) $\dfrac{(1+m/M)mg}{k\mu}$

**Α)** Στην οριζόντια διεύθυνση τα σώματα κάνουν απλή αρμονική ταλάντωση αφού η συνισταμένη δύναμη στο σύστημα είναι μόνο η δύναμη του ελατηρίου

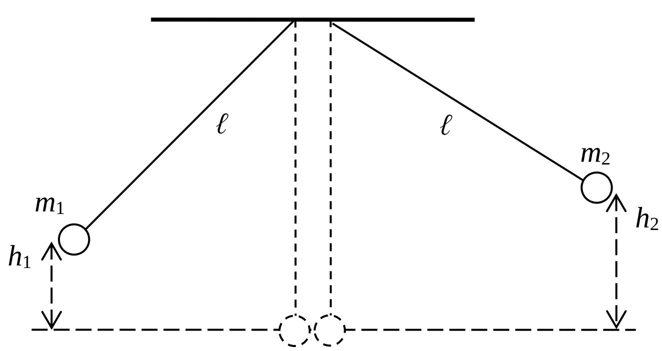
$$\sum_{m+M} F_x = -kx \Rightarrow (m+M)a = -kx \Rightarrow a = -\omega^2 x \qquad \text{με } \omega^2 = \frac{k}{M+m}$$

Οπότε για το σώμα $m$ ισχύει : $\sum_{m} F_x = ma \Rightarrow N = -m\omega^2 x$

Η κάθετη αντίδραση είναι η δύναμη επαναφοράς για το σώμα $m$.
Για να ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση θα πρέπει η στατική τριβή να είναι ίση με το βάρος του : $B = f_s \le \mu|N| = \mu m\omega^2 x \Rightarrow mg = \mu m\omega^2 x_{\min} \Rightarrow x_{\min} = \dfrac{(M+m)g}{k\mu}$

Σε αυτήν τη θέση η τριβή δεν επαρκεί για να κρατήσει το σώμα ψηλά και αυτό θα ολισθήσει προς το οριζόντιο δάπεδο. Η επαφή με το σώμα $M$ δεν έχει χαθεί ακόμα. Θα χαθεί για $x$=0.

**Κούνια του Νεύτωνα 1**

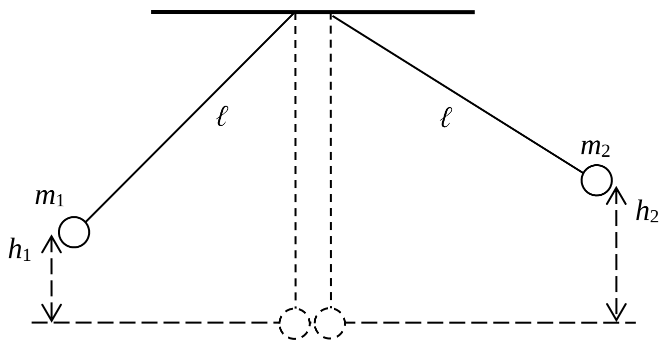



Οι δύο σφαίρες ίσης μάζας $m_1$=$m_2$ αφήνονται από τα αντίστοιχα ύψη και συγκρούονται ελαστικά όταν τα νήματά τους είναι κατακόρυφα. Η σφαίρα 1 μετά την κρούση ανέρχεται σε ύψος :

Α) $h_1$ Β) $h_2$ Γ) $\dfrac{h_1+h_2}{2}$ Δ) $\dfrac{h_2-h_1}{2}$ Ε) $\sqrt{h_1(h_1+h_2)}$

**Β)**
Αφού τα σώματα έχουν ίσες μάζες, κατά την ελαστική κρούση θα ανταλλάξουν ταχύτητες και άρα από ΑΔΜΕ θα ανταλλάξουν και ύψη.

**Κούνια του Νεύτωνα 2**




Οι δύο σφαίρες, με μάζες $m_1$ και $m_2$ αντίστοιχα, αφήνονται από τα αντίστοιχα ύψη και συγκρούονται ελαστικά όταν τα νήματά τους είναι κατακόρυφα. Βρείτε τα ύψη στα οποία θα ανέλθουν οι σφαίρες αν $h_1$=4 cm, $m_1$=1,5 kg, $h_2$=9 cm, $m_2$=0,5 kg.

Οι ταχύτητες των σφαιρών πριν την κρούση θα είναι (από ΑΔΜΕ) :

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2\cdot 1000\cdot 4} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 5\cdot 100\cdot 4} = 40\sqrt{5}\ \text{cm/s},$$

$$\upsilon_2 = -\sqrt{2gh_2} = -\sqrt{2\cdot 1000\cdot 9} = -60\sqrt{5}\ \text{cm/s}$$

Οι ταχύτητες μετά την κεντρική ελαστική κρούση υπολογίζονται ως συνήθως από :

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = \frac{1}{2}40\sqrt{5} + \frac{1}{2}\left(-60\sqrt{5}\right) = -10\sqrt{5}\ \text{cm/s} \quad \text{και}$$

$$\upsilon_2' + \upsilon_2 = \upsilon_1' + \upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = \upsilon_1' + \upsilon_1 - \upsilon_2 = -10\sqrt{5} + 40\sqrt{5} - \left(-60\sqrt{5}\right) = 90\sqrt{5}\ \text{cm/s}$$

Τα ύψη που θα ανέλθουν μετά την κρούση (πάλι από ΑΔΜΕ) θα είναι :

$$h_1' = \frac{\upsilon_1'^2}{2g} = \frac{100\cdot 5}{2000} = 0,25\ \text{cm} \quad \text{και}$$

$$h_2' = \frac{\upsilon_2'^2}{2g} = \frac{8100\cdot 5}{20000} = \frac{81}{40} = 20,25\ \text{cm}$$

Επαλήθευση

$$m_1gh_1 + m_2gh_2 = m_1gh_1' + m_2gh_2' \Rightarrow m_1h_1 + m_2h_2 = m_1h_1' + m_2h_2' \Rightarrow$$

$$1,5\cdot 4 + 0,5\cdot 9 = 1,5\cdot 0,25 + 0,5\cdot 20,25 \Rightarrow 6 + 4,5 = 0,375 + 10,125 \Rightarrow$$

$$10 = 10$$

Αν θέλουμε να βρούμε τον τύπο που δίνει τα τελικά ύψη από τα αρχικά κάνουμε τις πράξεις:

$$h_1' = \frac{\upsilon_1'^2}{2g} = \frac{1}{2g}\Big[\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2\Big]^2 = \frac{1}{2g(m_1+m_2)^2}[(m_1-m_2)^2\upsilon_1^2 + 2\cdot(m_1-m_2)2m_2\upsilon_1\upsilon_2 + 4m_2^2\upsilon_2^2] =$$

$$= \frac{1}{2g(m_1+m_2)^2}[(m_1-m_2)^2 2gh_1 - 2\cdot(m_1-m_2)2m_2 2g\sqrt{h_1 h_2} + 4m_2^2 2gh_2] =$$

$$= \frac{(m_1-m_2)^2 h_1 - 4m_2(m_1-m_2)\sqrt{h_1 h_2} + 4m_2^2 h_2}{(m_1+m_2)^2}$$

$$= \frac{(1,5-0.5)^2 4 - 4\cdot 0,5(1,5-0.5)\sqrt{4\cdot 9} + 4\cdot 0,5^2\cdot 9}{(1,5+0.5)^2} = \frac{4-2\cdot 2\cdot 3+9}{4} = \frac{13-12}{4} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ cm}$$

$$h_2' = \frac{\upsilon_2'^2}{2g} = h_1'(1 \leftrightarrow 2)$$

**Σύγκρουση στο CM**

Δύο υλικά σημεία συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά με αντίθετες ορμές. Να δείξετε ότι οι ταχύτητές τους μετά την κρούση απλά αναστρέφονται. Δηλαδή $\upsilon_1' = -\upsilon_1$ και $\upsilon_2' = -\upsilon_2$.

Αντίθετες ορμές αρχικά σημαίνει : $p_1 = -p_2 \Rightarrow m_1\upsilon_1 = -m_2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = -\frac{m_1}{m_2}\upsilon_1$

(1)
Οι τελικές ταχύτητες δίνονται από τους γνωστούς τύπους της κεντρικής ελαστικής κρούσης

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2 \quad \text{και} \quad \upsilon_2' = \upsilon_1'(\text{με } 1 \leftrightarrow 2) \quad (2)$$

Οπότε αντικαθιστώντας την (1) στην (2) παίρνουμε απευθείας :

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 - \frac{2m_2}{m_1+m_2}\cdot\frac{m_1}{m_2}\upsilon_1 = \frac{m_1 - m_2 - 2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 = -\upsilon_1$$

Παρόμοια με τον αντίστοιχο τύπο και για την $\upsilon_2'$

Ή από τη σχέση $\upsilon_2' + \upsilon_2 = \upsilon_1' + \upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' + \upsilon_2 = 0 \Rightarrow \upsilon_2' = -\upsilon_2$

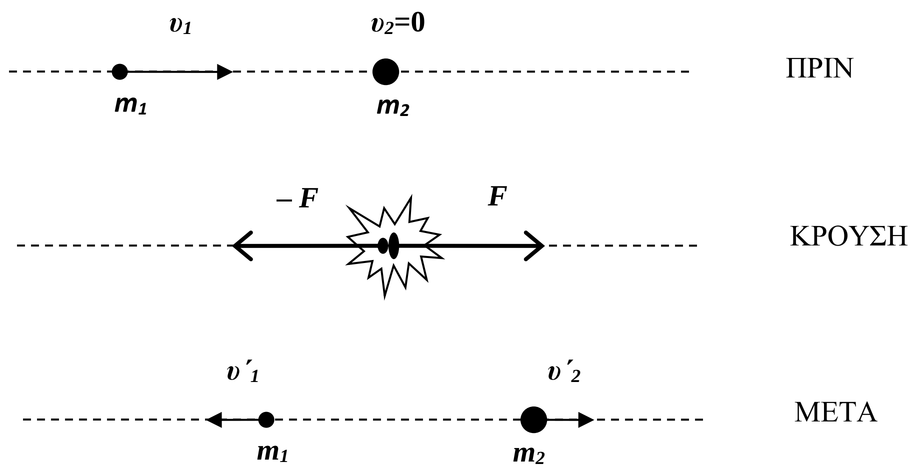
**Λόγος μαζών 1:3**

Σώμα μάζας $m_1$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας $m_2 = 3m_1$. Να δείξετε ότι οι ταχύτητές τους μετά την κρούση είναι αντίθετες $\upsilon_1' = -\upsilon_2'$ .

Από τη διατήρηση της ορμής και της κινητικής ενέργειας

$$\left.\begin{aligned} m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 &= m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' \\ \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_2^2 &= \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_2'^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 &= m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon' \\ \upsilon_1 + \upsilon_1' &= \upsilon_2 + \upsilon' \end{aligned}$$

καταλήγουμε στους τύπους της κεντρικής ελαστικής κρούσης (τους οποίους παίρνουμε έτοιμους χωρίς να τους αποδεικνύουμε) :




$$\boxed{\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2} \qquad \boxed{\upsilon_2' = \upsilon_1 + \upsilon_1' - \upsilon_2}$$

Οπότε για $\upsilon_2$=0 (ακίνητο στόχο) παίρνουμε:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{m_1 - 3m_1}{m_1 + 3m_1}\upsilon_1 = \frac{-2m_1}{4m_1}\upsilon_1 = -\frac{\upsilon_1}{2}$$

$$\upsilon_2' = \upsilon_1 - \frac{\upsilon_1}{2} - 0 = \frac{\upsilon_1}{2}$$

Δηλαδή $\upsilon_1' = -\upsilon_2'$

**Εισχώρηση καρφιού**

Μια κοτρώνα 5 kg αφήνεται να πέσει πάνω σε ένα όρθιο καρφί το οποίο βρίσκει με ταχύτητα 10 m/s και το καρφώνει 0,025 m μέσα σε ξύλο.

1) Αν η πέτρα έμεινε διαρκώς σε επαφή με το καρφί, πόση μέση δύναμη του άσκησε όσο εισχωρούσε στο ξύλο.

Α) 10 N
Β) 100 N
Γ) 1.000 N
Δ) 10.000 N
Ε) 100.000 N

2) Πόσο διήρκησε η εισχώρηση ?

Α) 5 s
Β) 0,5 s
Γ) 0,05 s
Δ) 0,005 s
Ε) 0,0005 s

**1: Δ) 2: Δ)**

Και τα δύο ερωτήματα απαντώνται από τις σχέσεις : $\frac{\Delta K}{\Delta x} = F_{o\lambda} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$

Η πρώτη είναι το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας και η δεύτερη ο 2ος νόμος του Νεύτωνα.
Η συνισταμένη δύναμη στην πέτρα είναι : $F_{ολ} = N_{από\ καρφί} - B$ οπότε

$$N_{από\ καρφί} = F_{ολ} + B = \frac{\Delta K}{\Delta x} + B = \frac{0 - m\upsilon^2/2}{\Delta x} + mg = -\frac{5(-10)^2/2}{-0,025} + 5 \cdot 9,8 = \frac{2,5 \cdot 100}{0,025} + 48 = 100 \cdot 100 + 48 \Rightarrow$$

$N_{από\ καρφί} = 10.048\ \text{N}$

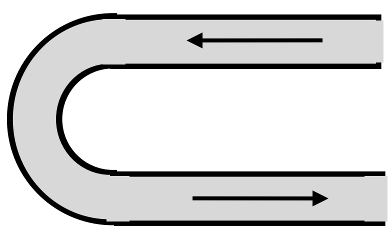
Το καρφί δέχεται από την πέτρα την αντίθετη δύναμη $\boxed{N_{στο\ καρφί} = -10.048\ \text{N}}$ άρα Δ)

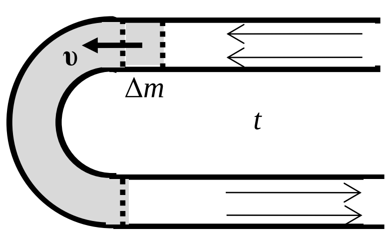
Η εισχώρηση του καρφιού διήρκησε

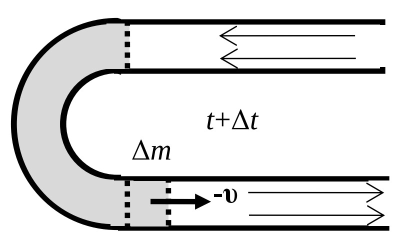
$$F_{ολ} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta p}{F_{ολ}} = \frac{0 - m\upsilon}{N_{από\ καρφί} - B} = \frac{0 - 5 \cdot (-10)}{10.048 - 48} = \frac{50}{10.000} = 0,005\ \text{s}$$

**Δύναμη σε σωλήνα**

Ένας σωλήνας που περιλαμβάνει ημικυκλική στροφή διοχετεύει νερό με παροχή $\Delta V/\Delta t = 10\ \text{L/s}$ . Δηλαδή από κάθε διατομή του περνούν 10 L νερό κάθε δευτερόλεπτο. Η ταχύτητα του νερού είναι 15 m/s και η πυκνότητά του 1000 kg/m$^3$. Πόση δύναμη δέχεται το ημικυκλικό μέρος του σωλήνα από την κίνηση του νερού ;






Τη μια χρονική στιγμή μια μικρή μάζα νερού μπαίνει στο ημικύκλιο και την επόμενη χρονική στιγμή μετά από Δ$t$ μια άλλη ίση μάζα νερού βγαίνει από το ημικύκλιο με αντίθετη ταχύτητα. Όλο το υπόλοιπο νερό στο ημικύκλιο δεν αλλάζει την κατάστασή του. Η εικόνα είναι παρόμοια με τη μπάλα που αναπηδά στο πάτωμα. Η δύναμη στον ημικυκλικό σωλήνα προκαλείται από την αλλαγή ορμής της μικρής μάζας νερού σε χρονικό διάστημα Δ$t$.

Η μικρή μάζα νερού εκφράζεται μέσω της πυκνότητας και του όγκου : $\Delta m = \rho \Delta V$

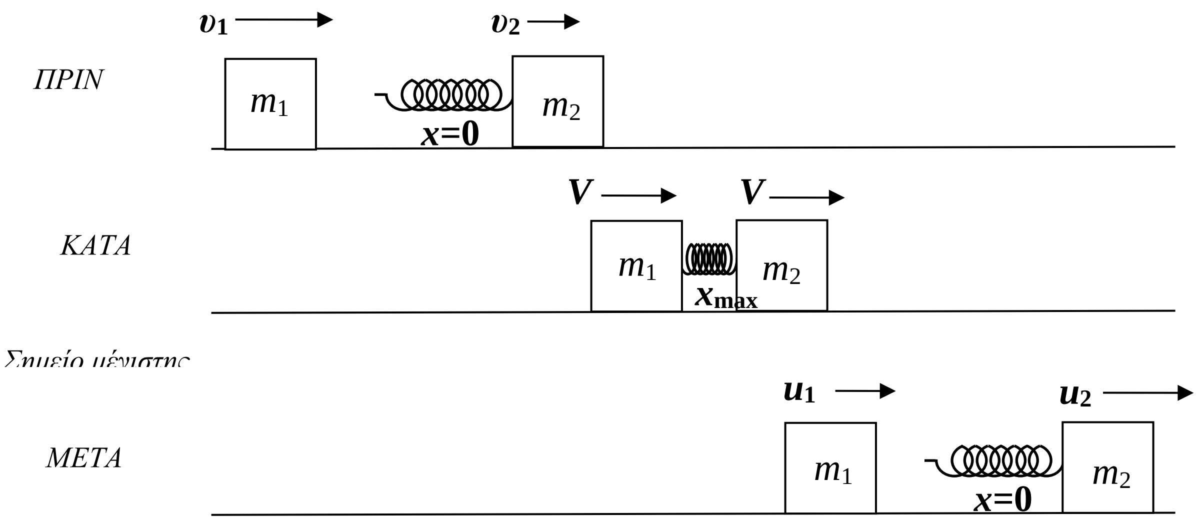
Η παροχή του νερού είναι $\dfrac{\Delta V}{\Delta t}=10\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{s}}=10\cdot 10^{-3}\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}=10^{-2}\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$

Η δύναμη που δέχεται το νερό είναι προς τα δεξιά :

$$F=\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{\Delta m\cdot(-\upsilon)-\Delta m\cdot\upsilon}{\Delta t}=-2\upsilon\frac{\Delta m}{\Delta t}=-2\upsilon\rho\frac{\Delta V}{\Delta t}=-2\cdot 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 10^3\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot 10^{-2}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}=-300\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}=-300\mathrm{N}$$

Άρα ο ημικυκλικός σωλήνας δέχεται δύναμη 300 N προς τα αριστερά.

**Ελαστική κρούση μέσω ελατηρίου**




Οι μάζες του σχήματος ολισθαίνουν χωρίς τριβή στο οριζόντιο δάπεδο. Η μάζα $m_1$= 6 kg κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα $\upsilon_1$= 1,8 m/s   και συγκρούεται ελαστικά με την μάζα $m_2$= 3 kg που κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα $\upsilon_2$= 0,9 m/s. Το ελατήριο που είναι προσαρμοσμένο στη μάζα 2 έχει σταθερά $k$= 200 N/m .

Α) Να βρείτε τις ταχύτητες των μαζών $u_1$ και $u_2$ μετά την κρούση

Β) Να βρείτε την κοινή ταχύτητα $V$   των μαζών στο σημείο πλησιέστερης προσέγγισης όπου το ελατήριο έχει την μέγιστη συσπείρωση του.

Γ) Πόση είναι η μέγιστη συσπείρωση $x_{max}$ του ελατηρίου?

$$u_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1+\frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2=\frac{6-3}{6+3}\cdot 1{,}8+\frac{2\cdot 3}{6+3}\cdot 0{,}9=\frac{3}{9}\cdot 1{,}8+\frac{6}{9}\cdot 0{,}9=3\cdot 0{,}2+6\cdot 0{,}1\Rightarrow$$

$$\boxed{u_1=1{,}2\ \mathrm{m/s}}$$

$$u_2=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_2+\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1=\frac{3-6}{6+3}\cdot 0{,}9+\frac{2\cdot 6}{6+3}\cdot 1{,}8=\frac{-3}{9}\cdot 0{,}9+\frac{12}{9}\cdot 1{,}8=-3\cdot 0{,}1+12\cdot 0{,}2\Rightarrow$$

$$\boxed{u_2=2{,}1\ \mathrm{m/s}}$$

$$m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2=m_1V+m_2V\Rightarrow V=\frac{m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2}{m_1+m_2}=\frac{6\cdot 1{,}8+3\cdot 0{,}9}{6+3}=6\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}1=1{,}5\ \mathrm{m/s}$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2=\frac{1}{2}m_1V^2+\frac{1}{2}m_2V^2+\frac{1}{2}kx_{\max}^2 \Rightarrow kx_{\max}^2=m_1\upsilon_1^2+m_2\upsilon_2^2+(m_1+m_2)V^2 \Rightarrow$$

$$200x_{\max}^2=6\cdot 1,8^2+3\cdot 0,9^2-9\cdot 1,5^2=1,62 \Rightarrow x_{\max}^2=\frac{1,62}{200}=0,0081 \Rightarrow x_{\max}=0,09 \text{ m}$$

Πιο γρήγορα

$$E=K+U_{\varepsilon\lambda}=K_{CM}+K_{\sigma\chi\varepsilon\tau}+U_{\varepsilon\lambda}=\frac{1}{2}(m_1+m_2)V_{CM}^2+\frac{1}{2}\mu\upsilon_{\sigma\chi\varepsilon\tau}^2+\frac{1}{2}kx^2=\sigma\tau\alpha\theta$$

$$E_0=E_{CA} \Rightarrow K_{CM0}+K_{\sigma\chi\varepsilon\tau 0}+U_{\varepsilon\lambda 0}=K_{CMCA}+K_{\sigma\chi\varepsilon\tau CA}+U_{\varepsilon\lambda CA} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)V_{CM}^2+\frac{1}{2}\mu\upsilon_{\sigma\chi\varepsilon\tau}^2+0=\frac{1}{2}(m_1+m_2)V_{CM}^2+0+\frac{1}{2}kx_{\max}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\mu\upsilon_{\sigma\chi\varepsilon\tau}^2=\frac{1}{2}kx_{\max}^2 \Rightarrow x_{\max}^2=\frac{\mu}{k}\upsilon_{\sigma\chi\varepsilon\tau}^2=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{1}{k}(\upsilon_1-\upsilon_2)^2 \Rightarrow$$

$$x_{\max}^2=\frac{3\cdot 9}{3+9}\cdot\frac{1}{200}(1,8-0,9)^2=\frac{2}{200}0,9^2=\frac{0,9^2}{10^2} \Rightarrow x_{\max}=0,09 \text{ m}$$

**Έκρηξη σε τρία θραύσματα**

Αρχικά ακίνητο σώμα διασπάται σε τρία θραύσματα. Δύο από αυτά έχουν ίσες μάζες και ταχύτητες (1,2,0) και (2,3,-2). Το τρίτο θραύσμα έχει μάζα μισή από αυτή των άλλων δύο. Ποια είναι η ταχύτητά του;

Α) (-3,-1,4)  Β) (-6,-2,8)  Γ) (-6,-2,-2)  Δ) (-6,-10,4)  Ε) (3,-1,-4)

**Δ)**

$$2m(1,2,0)+2m(2,3,-2)+m(\upsilon_{3x},\upsilon_{3y},\upsilon_{3z})=0 \Rightarrow \begin{array}{l}\upsilon_{3x}=-6\\ \upsilon_{3y}=-10\\ \upsilon_{3z}=4\end{array}$$

**Η δύναμη είναι η βαθμίδα της δυναμικής ενέργειας**

Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος δίνεται από την έκφραση $U(x,y)=3xy^2-2x^2$. Η δύναμη που ασκείται στο σώμα όταν βρίσκεται στη θέση (-1,1) είναι :

Α) $\vec{F}=(-7,6)$

Β) $\vec{F}=(-3,2)$

Γ) $\vec{F}=(3,-2)$

Δ) $\vec{F}=(-1,1)$

Ε) $\vec{F}=(-3,-2)$

**Α)** $\vec{F}=-\vec{\nabla}U=-\dfrac{\partial U}{\partial x}\hat{x}-\dfrac{\partial U}{\partial y}\hat{y}=-(3y^2-4x)\hat{x}-6xy\hat{y}=(4x-3y^2,-6xy) \Rightarrow$

$$\vec{F}(-1,1)=(4(-1)-3\cdot 1^2,-6(-1)1)=(-7,6)$$

**Ταχύτητα κυκλικής τροχιάς $\upsilon_c$ στην βαρύτητα**

$r = R = \sigma\tau\alpha\theta$

Η βαρυτική δύναμη $F = GM\dfrac{m}{r^2}$ είναι η κεντρομόλος :

$$\sum F_r = ma_c \Rightarrow GM\frac{m}{R^2} = m\frac{\upsilon_c^2}{R} \Rightarrow \upsilon_c = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Π.χ. ταχύτητα διεθνούς διαστημικού σταθμού που βρίσκεται σε ύψος 409 km πάνω από την επιφάνεια της Γης

$M_E = (5,9722 \pm 0,0006)\times 10^{24}$ kg

$G = 6,67430(15)\times 10^{-11}$ m$^3$kg$^{-1}$s$^{-2}$

$\mu = GM = 39,860\times 10^{13}$ m$^3$s$^{-2}$

$R_E = 6.371$ km

$R = R_E + h = 6.371 + 409 = 6.780$ km

$$\upsilon = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{39,860\times 10^{13}}{0,6780\times 10^{7}}} = 10^3\sqrt{58,7906} = 7,67 \text{ km/s}$$

Περίοδος $T = \dfrac{2\pi r}{\upsilon} = \dfrac{2\pi\cdot\ 6.780}{7,67} = 5.555,7 \text{ s} \approx 92,6 \text{ min}$

Π.χ. ταχύτητα δορυφόρου σε ύψος λίγο πάνω από την επιφάνεια της Γης (tree top satellite)

$R = R_E$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{GM}{R_E}} = \sqrt{\frac{39,860\times 10^{13}}{0,6371\times 10^{7}}} = 10^3\sqrt{62,56475} = 7,91 \text{ km/s}$$

**Περίοδος κυκλικής τροχιάς**

$$\upsilon_c = \sqrt{\frac{GM}{R}} \Rightarrow \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{GM}{R}} \Rightarrow \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{GM}{R} \Rightarrow T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)R^3$$ 3$^{ος}$ νόμος Kepler

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

**Γεωστατική ή Γεωσύγχρονη τροχιά**

Δορυφόρος γύρω από τον Ισημερινό με περίοδο ίση με την περίοδο περιστροφής της Γης ώστε να φαίνεται στατικός πάνω από το ίδιο πάντα σημείο της επιφάνειας της Γης.

$M_E = (5,9722 \pm 0,0006)\times 10^{24}$ kg

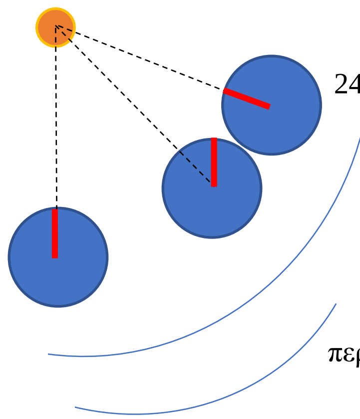
$R_E = 6.371$ km

$G = 6,67430(15)\times 10^{-11}$ m$^3$kg$^{-1}$s$^{-2}$

$\mu = GM_E = 39,8603\times 10^{13}$ m$^3$s$^{-2}$

Ηλιακή ημέρα $T = 24\ \text{h} = 1.440\ \text{min} = 86.400\ \text{s}$

Αστρική ημέρα $T_{sidereal} = 86.164,0905\ \text{s} = 23\text{h}\ 56\ \text{min}\ 4,0905\ \text{s} \approx 1436\ \text{min}$




$$F = \mu \frac{m}{r^2}$$

$$\sum F_r = m a_c \Rightarrow \mu \frac{m}{r^2} = m \frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow \frac{\mu}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{\mu T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{39,8603 \times 10^{13} \cdot\ 864^2 \times 10^4}{4 \cdot\ (3,1415)^2}} \Rightarrow$$

$$r = 10^6 \sqrt[3]{\frac{39,8603 \cdot\ 864^2 \times 0,1}{4 \cdot\ (3,1415)^2}} = 42,241 \times 10^6\ \text{m} = 42.241\ \text{km}$$

$$r_s = 10^6 \sqrt[3]{\frac{39,860 \cdot\ 861,640905^2 \times 0,1}{4 \cdot\ (3,1415)^2}} = 42,164 \times 10^6\ \text{m} = 42.164\ \text{km}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{6.371}{42.241} = 6,630$$

$$h = r - R = 42.241 - 6.371 = 35.870\ \text{km}$$

$$\frac{h}{R} = 5,63$$

$$\upsilon = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot\ 42.164\ \text{km}}{86.164,0905\ \text{s}} = 3,0746\ \text{km/s}$$

**Ενέργεια κυκλικής τροχιάς**

$$K = \frac{1}{2} m \upsilon_c^2 = \frac{1}{2} m \frac{GM}{R}$$

$$U = -m\frac{GM}{R}$$

Παρατηρούμε ότι $U = -2K \Rightarrow K = -\frac{U}{2}$

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\frac{GM}{R} - m\frac{GM}{R} = -\frac{GMm}{2R} < 0$$

Παρατηρούμε ότι

$$E = -K \quad \text{και} \quad E = \frac{U}{2}$$

**Στροφορμή κυκλικής τροχιάς**

$$L = m\upsilon_c R = m\sqrt{\frac{GM}{R}}R = m\sqrt{GMR}$$

**Ταχύτητα διαφυγής** $\upsilon_{esc}$

Η απαιτούμενη ταχύτητα σε απόσταση *r* ώστε το σώμα μόλις και να φτάσει στο άπειρο διαφεύγοντας από την βαρυτική έλξη.

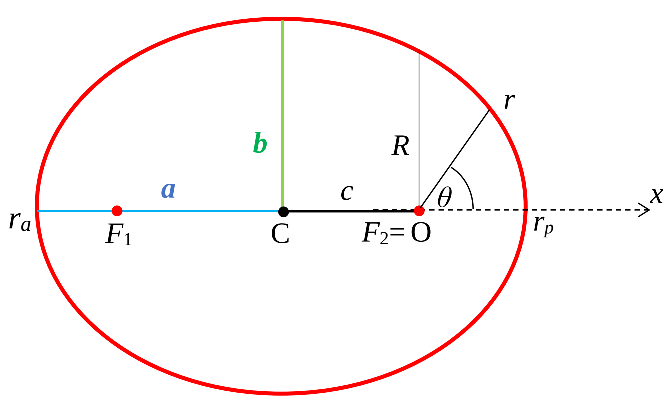
$$E_r = E_\infty \Rightarrow U_r + K_r = U_\infty + K_\infty \Rightarrow -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}m\upsilon_{esc}^2 = 0 + 0 \Rightarrow \upsilon_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \upsilon_c\sqrt{2}$$

Π.χ. ταχύτητα διαφυγής από τη Γη

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2\cdot\ 39,860\times10^{13}}{6.371\times10^{3}}} = 10^5\sqrt{0,01251295} = 11,2 \text{ km/s}$$

**Ενέργεια ελλειπτικής τροχιάς**

Η γεωμετρία της έλλειψης δίνεται στο παρακάτω σχήμα




$a$ , $0<e<1$

$b = a\sqrt{1-e^2}$

$c=ea$

$R= a\,(1-e^2)$

$$a = \frac{r_a + r_p}{2}$$

$$b = \sqrt{r_a r_p}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$r = \frac{R}{1 + e\cos\theta}$$

Στο απόκεντρο (αποαψίδα) $r_a$ και στο περίκεντρο (περιαψίδα) $r_p$ η ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτίνα ενώ η στροφορμή και η ενέργεια διατηρούνται.

$$E = \frac{1}{2}m\upsilon_a^2 - m\frac{GM}{r_a} = \frac{1}{2}m\upsilon_p^2 - m\frac{GM}{r_p} \quad (1)$$

$$L = m\upsilon_a r_a = m\upsilon_p r_p \qquad (2)$$

Από την (1) χρησιμοποιώντας την (2) βρίσκουμε την ταχύτητα $\upsilon_a$ σαν συνάρτηση του $r_a$ και υπολογίζουμε την $E$.

$$\frac{1}{2}\upsilon_a^2 - \frac{GM}{r_a} = \frac{1}{2}\upsilon_p^2 - \frac{GM}{r_p} \Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon_a^2 - \frac{1}{2}\frac{r_a^2}{r_p^2}\upsilon_a^2 = GM\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon_a^2\left(\frac{r_p^2 - r_a^2}{r_p^2}\right) = GM\frac{r_p - r_a}{r_p r_a} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\upsilon_a^2\frac{(r_p - r_a)(r_p + r_a)}{r_p} = GM\frac{r_p - r_a}{r_a} \Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon_a^2 2a = GM\frac{r_p}{r_a} \Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon_a^2 = GM\frac{2a - r_a}{2ar_a} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\upsilon_a^2 = GM\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{2a}\right)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την $a = \dfrac{r_a + r_p}{2}$.

Οπότε η ενέργεια της τροχιάς είναι

$$E = \frac{1}{2}m\upsilon_a^2 - m\frac{GM}{r_a} = mGM\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{2a}\right) - m\frac{GM}{r_a} \Rightarrow E = -\frac{GMm}{2a}$$

Επιβεβαιώνουμε ότι παίρνουμε την ενέργεια της κυκλικής τροχιάς για $a=r$.

**Ταχύτητα ελλειπτικής τροχιάς**

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 - m\frac{GM}{r} = -m\frac{GM}{2a} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

Επιβεβαιώνουμε ότι παίρνουμε την ταχύτητα της κυκλικής τροχιάς για $r=a=R$.

**Στροφορμή ελλειπτικής τροχιάς**

Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις $r_a + r_p = 2a$ και $r_a r_b = b^2$

$$\frac{1}{2}\upsilon_a^2 = GM\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{2a}\right) \Rightarrow \upsilon_a^2 = 2GM\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_a + r_p}\right) = 2GM\left(\frac{r_a + r_p - r_a}{r_a(r_a + r_p)}\right) \Rightarrow \upsilon_a^2 = \frac{GM}{a}\frac{r_p}{r_a} \Rightarrow$$

$$\upsilon_a^2 = \frac{GM}{a}\frac{b^2}{r_a^2} \Rightarrow \upsilon_a = \sqrt{\frac{GM}{a}}\frac{b}{r_a}$$

$$L = m\upsilon_a r_a = m\sqrt{\frac{GM}{a}}\frac{b}{r_a}r_a \Rightarrow L = mb\sqrt{\frac{GM}{a}}$$

Επιβεβαιώνουμε ότι παίρνουμε τη στροφορμή της κυκλικής τροχιάς για $a=b=R$.

**Περίοδος ελλειπτικής τροχιάς**

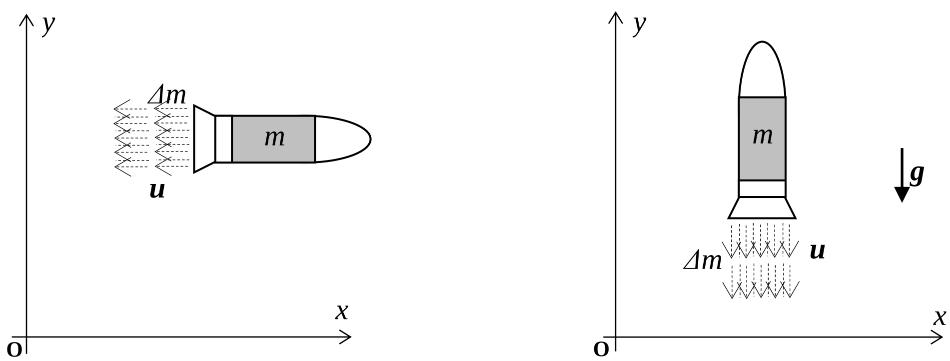
Η εμβαδική ταχύτητα είναι σταθερή ($2^{ος}$ νόμος Kepler) και είναι ανάλογη της στροφορμής. Το εμβαδόν της έλλειψης είναι ίσο με $A=\pi ab$ (δείτε ότι παίρνουμε το εμβαδόν του κύκλου για $a=b=R$)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \Rightarrow \frac{\pi ab}{T} = mb\sqrt{\frac{GM}{a}}\frac{1}{2m} \Rightarrow T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)a^3 \qquad 3^{ος} \text{ νόμος Kepler}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

Επιβεβαιώνουμε ότι παίρνουμε την περίοδο της κυκλικής τροχιάς για $a=R$.

**Εξισώσεις πυραύλου**




Σύστημα = πύραυλος (rocket) = Υλικό (πιλοτήριο, δεξαμενή καυσίμων, μηχανή, προσωπικό, χρήσιμο φορτίο) + Εναπομείναντα καύσιμα

Μάζα πυραύλου τη χρονική στιγμή $t$: $m_R(t)$

Μάζα πυραύλου την επόμενη χρονική στιγμή $t+dt$ :

$$m_R(t+dt) = m_R(t) - dm$$

$$\frac{dm_R(t)}{dt} = -\frac{dm}{dt}$$

Ταχύτητα πυραύλου ως προς το σημείο αναφοράς Ο : $\vec{\upsilon}_R \equiv \vec{\upsilon}_{R/O}$

Ταχύτητα καυσαερίων ως προς τον πύραυλο : $\vec{u}_E \equiv \vec{\upsilon}_{E/R}$

Ταχύτητα καυσαερίων ως προς το σημείο αναφοράς Ο :

$$\vec{\upsilon}_E \equiv \vec{\upsilon}_{E/O} = \vec{\upsilon}_{E/R} + \vec{\upsilon}_{R/O} = \vec{u}_E + \vec{\upsilon}_R$$

Ορμή συστήματος τη χρονική στιγμή $t$: $\vec{p}(t) = m_R(t)\upsilon_R(t)$

Ορμή συστήματος την επόμενη χρονική στιγμή *t+dt*:

$$\vec{p}(t+dt)=\vec{p}(t)-\vec{\upsilon}_E dm=\vec{p}(t)-(\vec{u}_E+\vec{\upsilon}_R)dm$$

Ρυθμός μεταβολής ορμής : $\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{\vec{p}(t+dt)-\vec{p}(t)}{dt}=-\frac{dm}{dt}(\vec{u}_E+\vec{\upsilon}_R)=\frac{dm_R}{dt}(\vec{u}_E+\vec{\upsilon}_R)$

Όμως μαθηματικώς : $\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m_R(t)\vec{\upsilon}_R(t))}{dt}=\frac{dm_R}{dt}\vec{\upsilon}_R+m_R\frac{d\vec{\upsilon}_R}{dt}$

Εξισώνοντας παίρνουμε την εξίσωση του πυραύλου :

$$\frac{dm_R}{dt}\vec{\upsilon}_R+m_R\frac{d\vec{\upsilon}_R}{dt}=\frac{dm_R}{dt}(\vec{u}_E+\vec{\upsilon}_R)\Rightarrow \qquad m_R\frac{d\vec{\upsilon}_R}{dt}=\vec{u}_E\frac{dm_R}{dt} \qquad (1)$$

Αν ο πύραυλος δεν είναι στο κενό αλλά μέσα σε κάποιο πεδίο δυνάμεων τότε στη μεταβολή της ορμής του θα συνεισφέρει και η εξωτερική δύναμη, έστω βαρυτική $\vec{F}=m_R\vec{g}$ :

Ορμή συστήματος την επόμενη χρονική στιγμή *t+dt*:

$$\vec{p}(t+dt)=\vec{p}(t)-\vec{\upsilon}_E dm+\vec{F}dt=\vec{p}(t)-(\vec{u}_E+\vec{\upsilon}_R)dm+\vec{F}dt\Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{\vec{p}(t+dt)-\vec{p}(t)}{dt}=-\frac{dm}{dt}(\vec{u}_E+\vec{\upsilon}_R)+\vec{F}\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{dm_R}{dt}(\vec{u}_E+\vec{\upsilon}_R)+\vec{F}$$

Εξισώνοντας πάλι με $\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m_R(t)\vec{\upsilon}_R(t))}{dt}=\frac{dm_R}{dt}\vec{\upsilon}_R+m_R\frac{d\vec{\upsilon}_R}{dt}$

παίρνουμε την εξίσωση του πυραύλου στο πεδίο βαρύτητας :

$$m_R\frac{d\vec{\upsilon}_R}{dt}=\vec{u}_E\frac{dm_R}{dt}+\vec{F}\Rightarrow \qquad m_R\frac{d\vec{\upsilon}_R}{dt}=\vec{u}_E\frac{dm_R}{dt}+m_R\vec{g} \qquad (2)$$

Όταν δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη η κίνηση είναι μονοδιάστατη:

$$m_R\frac{d\vec{\upsilon}_R}{dt}=\vec{u}_E\frac{dm_R}{dt}\xrightarrow[\text{διάσταση } x]{\text{κίνηση σε μια}} m\frac{d\upsilon}{dt}=-u\frac{dm}{dt}\Rightarrow md\upsilon=-udm \qquad (3)$$

Όταν η κίνηση είναι κατακόρυφη στο πεδίο βαρύτητας η κίνηση είναι επίσης μονοδιάστατη :

$$m_R\frac{d\vec{\upsilon}_R}{dt}=\vec{u}_E\frac{dm_R}{dt}+m_R\vec{g}\xrightarrow[\text{διάσταση } y]{\text{κίνηση σε μια}} m\frac{d\upsilon}{dt}=-u\frac{dm}{dt}-mg\Rightarrow md\upsilon=-udm-mg \qquad (4)$$

Όπου στις παραπάνω εξισώσεις παραλείψαμε τον δείκτη *R* (rocket).

***Γιατί επιθυμούμε να εμφανίζεται η σχετική ταχύτητα u ;***

Επειδή η σχετική ταχύτητα των καυσαερίων είναι σταθερή. Προσδιορίζεται από θερμοχημεία και διατήρηση της ενέργειας.

Η εκλυόμενη ενέργεια από την καύση θα είναι ανάλογη της μάζας Δ*m* που αντιδρά και μπορούμε να γράψουμε :

$$Q=\lambda\Delta m\Rightarrow dQ=\lambda dm$$

όπου $\lambda$ με μονάδες J/kg=m$^2$/s$^2$, είναι κάποια σταθερά από τη θερμοχημεία. Αν όλη αυτή η χημική ενέργεια μετατραπεί σε κινητική θα έχουμε για την κινητική ενέργεια στο κέντρο μάζας

$$K' = Q \Rightarrow dK' = dQ$$

Όμως $K' = \frac{1}{2}\mu u^2$ όπου $u$ η σχετική ταχύτητα των δύο «σωμάτων» $m$ και $\Delta m$ και $\mu$ η ανηγμένη μάζα τους. Αυτή είναι

$$\mu = \frac{m\Delta m}{m+\Delta m} \xrightarrow[\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta m \to 0}]{} dm$$

Άρα $dK' = \frac{1}{2} dm u^2$

Οπότε θα έχουμε $dK' = dQ \Rightarrow \frac{1}{2} dm u^2 = \lambda dm \Rightarrow \qquad u = \sqrt{2\lambda}$

Η ταχύτητα των καυσαερίων εξαρτάται αποκλειστικά από το καύσιμο που χρησιμοποιούμε. Τα διαθέσιμα καύσιμα που υπάρχουν δίνουν τιμές από 2,2 έως 4,5 km/s.

Ο ρυθμός μείωσης της μάζας $dm/dt$ ελέγχεται και μπορεί να διατηρηθεί σταθερός. Είναι ανάλογος της ταχύτητας της αντίδρασης η οποία εξαρτάται από διάφορους παράγοντες (συγκέντρωση αντιδρώντων, θερμοκρασία, πίεση, κατάσταση, κλπ.) τους οποίους μπορούμε να ρυθμίζουμε.

***Λύση στο κενό***

Παραλείπουμε το δείκτη $R$ και αναγνωρίζουμε ότι η κίνηση πραγματοποιείται σε μια διάσταση

$$m_R \frac{d\vec{\upsilon}_R}{dt} = \vec{u}_E \frac{dm_R}{dt} \xrightarrow[\text{διάσταση } x]{\text{κίνηση σε μια}} m\frac{d\upsilon}{dt} = -u\frac{dm}{dt} \Rightarrow m d\upsilon = -u dm$$

Θεωρούμε σταθερό ρυθμό καύσης $\frac{dm}{dt} = -c = \frac{m-m_0}{t}$, $dm = -cdt \Leftrightarrow dt = -\frac{dm}{c}$

και σταθερή ταχύτητα $u$ εκτόξευσης των καυσαερίων ως προς τον πύραυλο. Τα δύο αυτά μεγέθη θεωρούνται δεδομένα του προβλήματος.

Ολοκλήρωση :

$$m d\upsilon = -u dm = -u dm \Rightarrow d\upsilon = -u\frac{dm}{m} \Rightarrow$$

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = -u\int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} \Rightarrow \upsilon - \upsilon_0 = -u\ln\left(\frac{m}{m_0}\right) \Rightarrow \frac{\Delta\upsilon}{u} = \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

$$\Delta\upsilon = u\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - ct}\right)$$

$\upsilon = \upsilon_0 - u \ln\left(1 - \frac{c}{m_0} t\right)$ (ο λογάριθμος είναι αρνητικός επειδή το όρισμά του είναι μικρότερο από τη μονάδα και άρα η ταχύτητα αυξάνει)

$$\frac{\Delta\upsilon}{u} = \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) \Rightarrow \frac{m_0}{m} = e^{\Delta\upsilon/u} \Rightarrow m = m_0 e^{-\Delta\upsilon/u}$$

Ολοκληρώνοντας την $\upsilon = \upsilon_0 + u \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$ βρίσκουμε τη θέση του πυραύλου

$$\upsilon \equiv \frac{dx}{dt} = \upsilon_0 + u \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) \Rightarrow dx = \upsilon_0 dt + u \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) dt = \upsilon_0 dt + u \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)\left(\frac{-dm}{c}\right) \Rightarrow$$

$$\int_0^x dy = \upsilon_0 \int_0^t dt + \frac{u}{c} \int_{m_0}^m \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) dm \Rightarrow$$

$$x = \upsilon_0 t + \frac{u}{c} m_0 \int_1^{m/m_0} \ln r dr \quad \text{με} \quad r = \frac{m}{m_0}, \ dm = m_0 dr$$

Όμως $\int \ln r dr = r \ln r - r + C$, οπότε

$$x = \upsilon_0 t + \frac{u}{c} m_0 \left(r \ln r - r\right)_1^{m/m_0} = \upsilon_0 t + \frac{u}{c} m_0 \left[\frac{m}{m_0} \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) - \frac{m}{m_0} + 1\right] =$$

$$= \upsilon_0 t + \frac{u}{(m_0 - m)/t}\left[m \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) - m + m_0\right] \Rightarrow$$

$$x = (\upsilon_0 + u)t + \frac{mut}{m_0 - m} \ln\left(\frac{m}{m_0}\right)$$

***Παράδειγμα***

Αγνοούμε την επίδραση της βαρύτητας (που διαρκεί μερικά λεπτά και μειώνεται όπως ο πύραυλος απομακρύνεται από τη Γη από 9,80 σε 8,67), αγνοούμε την αντίσταση του αέρα (που είναι περίπου ίση με το 2 % του βάρους του πυραύλου) και αγνοούμε τις μικρές πλαϊνές ωθήσεις που χρειάζεται ο πύραυλος για να στρίψει ώστε η τελική του ταχύτητα να είναι εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά του. Το καύσιμο που χρησιμοποιούμε δίνει $u$=3,5 km/s. Τι ποσοστό της αρχικής μάζας του χρειάζεται να κάψει σε καύσιμα ο πύραυλος, ώστε να μπει σε κυκλική τροχιά στο ύψος του διεθνούς διαστημικού σταθμού όπου πρέπει να έχει ταχύτητα $\upsilon = 7,67$ km/s.

Η τελική μάζα του πυραύλου θα είναι

$$\frac{m_f}{m_0} = e^{-\Delta\upsilon/u} = e^{-7,67/3,5} = 0,1118 \Rightarrow m_f = 11,2\% m_0$$

Η μάζα του καυσίμου που χρησιμοποιήθηκε είναι

$$m_{\pi\rho o\omega\theta\eta\tau\iota\kappa o\acute{\upsilon}} = m_0 - m_f = m_0(1-e^{-\Delta\upsilon/u}) = m_0(1-0,112) = 0,888m_0 = 88,8\%m_0$$

Άρα θα έχει κάψει σε καύσιμα το 88,8% της μάζας του. Η μάζα του σκάφους και του χρήσιμου φορτίου πρέπει να είναι μικρότερα από 11,2% της συνολικής μάζας του πυραύλου κατά την εκτόξευση. Είναι εντυπωσιακό που με αυτές τις χονδροειδείς προσεγγίσεις πέφτουμε τόσο κοντά σε ρεαλιστικές τιμές. Π.χ. για τον πύραυλο Saturn V : σκάφος 11%, καύσιμα 85%, φορτίο 4%

**Λύση σε σταθερό πεδίο βαρύτητας για κατακόρυφη εκτόξευση**

$$md\upsilon = -udm - mgdt$$

$$\frac{dm}{dt} = -c = \frac{m-m_0}{t},\ \ dm = -cdt \Leftrightarrow dt = -\frac{dm}{c}$$

$$md\upsilon = -udm - mgdt = -udm - g\frac{dm}{-c} \Rightarrow d\upsilon = \left(\frac{g}{c} - \frac{u}{m}\right)dm \Rightarrow$$

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = \int_{m_0}^{m}\left(\frac{g}{c} - \frac{u}{m}\right)dm \Rightarrow \ \upsilon - \upsilon_0 = \frac{g}{c}(m-m_0) - u\ln\left(\frac{m}{m_0}\right)$$

$$\upsilon = \upsilon_0 + \frac{g}{-t/m-m_0}(m-m_0) + u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right) \Rightarrow \ \upsilon = \upsilon_0 - gt + u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

Επειδή $m = m_0 - ct \Rightarrow t = \dfrac{m_0 - m}{c}$ , ο χρόνος μπορεί να απαλειφθεί

$$\upsilon = \upsilon_0 - \frac{g}{c}(m_0 - m) + u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

$$\upsilon \equiv \frac{dy}{dt} = \upsilon_0 - gt + u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right) \Rightarrow dy = \upsilon_0 dt - gtdt + u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)dt = \upsilon_0 dt - gtdt + u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)\left(\frac{-dt}{c}\right) \Rightarrow$$

$$\int_0^y dy = \int_0^t (\upsilon_0 - gt)dt + \frac{u}{c}\int_{m_0}^{m}\ln\left(\frac{m}{m_0}\right)dm \Rightarrow$$

$$y = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{u}{c}m_0 \int_1^{m/m_0}\ln x dx \quad \text{με} \quad x = \frac{m}{m_0},\ \ dm = m_0 dx$$

$$\int \ln x dx = x\ln x - x + C$$

$$y=\upsilon_0 t-\frac{1}{2}gt^2+\frac{u}{c}m_0\left(x\ln x-x\right)_1^{m/m_0}=\upsilon_0 t-\frac{1}{2}gt^2+\frac{u}{c}m_0\left[\frac{m}{m_0}\ln\left(\frac{m}{m_0}\right)-\frac{m}{m_0}+1\right]=$$

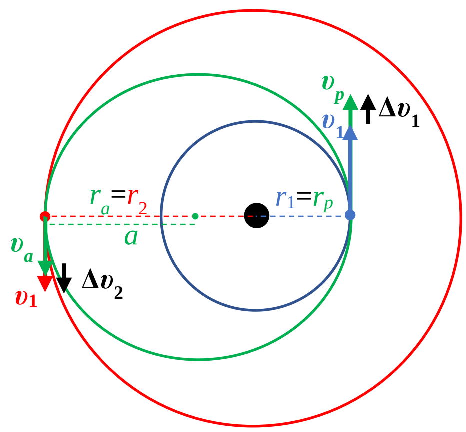
$$=\upsilon_0 t-\frac{1}{2}gt^2+\frac{u}{m_0-m/t}\left[m\ln\left(\frac{m}{m_0}\right)-m+m_0\right]\Rightarrow$$

$$y=(\upsilon_0+u)t-\frac{1}{2}gt^2+\frac{mut}{m_0-m}\ln\left(\frac{m}{m_0}\right)$$

**Μετάβαση Hohmann**

Στο διάστημα δεν υπάρχουν βενζινάδικα. Αν σου τελειώσουν τα καύσιμα πέθανες. Για το λόγο αυτό δεν χρησιμοποιούμε την προώθηση των πυραύλων μας συνεχώς για να κάνουμε ελιγμούς αλλά προσπαθούμε να εκμεταλλευτούμε τη βαρύτητα. Χρησιμοποιούμε προώθηση μόνο για πολύ μικρά χρονικά διαστήματα που μας επιτρέπουν να πηδάμε από μια τροχιά σε άλλη. Όντας πάνω στην τροχιά μας κινεί το βάρος και δεν χρειάζεται να καίμε καύσιμα

Μια τέτοια μετάβαση είναι η μετάβαση Hohmann. Την χρησιμοποιούμε για να μεταβούμε από μια κυκλική τροχιά ακτίνας $r_1$ σε κυκλική τροχιά μεγαλύτερης ακτίνας $r_2>r_1$ με δύο ωστικές προωθήσεις ($\Delta t\approx 0$) $\Delta\upsilon_1$ και $\Delta\upsilon_2$ μέσω ενδιάμεσης ελλειπτικής τροχιάς.




$$a=\frac{r_1+r_2}{2}$$

1η ώθηση

$$\upsilon_1=\sqrt{\frac{GM}{r_1}},\ \upsilon_p=\sqrt{GM\left(\frac{2}{r_1}-\frac{1}{a}\right)}$$

$$\Delta\upsilon_1=\upsilon_p-\upsilon_1=\sqrt{GM\left(\frac{2}{r_1}-\frac{1}{a}\right)}-\sqrt{\frac{GM}{r_1}}\Rightarrow\Delta\upsilon_1=\sqrt{\frac{GM}{r_1}}\left(\sqrt{\left(2-\frac{r_1}{a}\right)}-1\right)$$

$$2-\frac{r_1}{a}=2-\frac{2r_1}{r_1+r_2}=\frac{2(r_1+r_2)-2r_1}{r_1+r_2}=\frac{2r_2}{r_1+r_2}$$

$$\Delta\upsilon_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}}-1\right)$$

2η ώθηση

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}}\,,\ \ \upsilon_a = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_2}-\frac{1}{a}\right)}$$

$$\Delta\upsilon_2 = \upsilon_2 - \upsilon_a = ... = \sqrt{\frac{GM}{r_2}}\left(1-\sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right)$$

Ο χρόνος μετάβασης θα είναι το μισό της περιόδου της ελλειπτικής τροχιάς που υπολογίζεται από τον 3ο νόμο του Kepler

$$t_H = \frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{(r_1+r_2)^3}{2GM}}$$

Αριθμητική εφαρμογή

Από τον διεθνή διαστημικό σταθμό να πάμε σε γεωστατική τροχιά.

$r_1 = 6.780\text{ km}$, $\upsilon_1 = 7,67\text{ km/s}$

$r_2 = 42.164\text{ km}$, $\upsilon_2 = 3,07\text{ km/s}$

$$a = \frac{r_1+r_2}{2} = \frac{6.780+43.164}{2} = 24.472\text{ km}$$

$$\mu = GM_E = 39,8603\times10^{13}\ \text{m}^3\text{s}^{-2}$$

Μέτρο ταχύτητας περίγειου ελλειπτικής τροχιάς

$$\upsilon_p = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_1}-\frac{1}{a}\right)} = \sqrt{39,8603\times10^{13}\left(\frac{2}{6.780}-\frac{1}{24.472}\right)10^{-3}} = 10,06\text{ km/s}$$

Μέτρο ταχύτητας απόγειου ελλειπτικής τροχιάς

$$\upsilon_a = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_2}-\frac{1}{a}\right)} = \sqrt{39,8603\times10^{13}\left(\frac{2}{42.164}=\frac{1}{24.472}\right)10^{-3}} = 1,62\text{ km/s}$$

1η πυροδότηση πυραύλου και είσοδος στην ελλειπτική τροχιά

$$\Delta\upsilon_1 = \upsilon_p - \upsilon_1 = 10,06 - 7,67 = 2,39\text{ km/s}$$

Παραμονή στην ελλειπτική τροχιά για

$$t_H = \pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} = \pi\sqrt{\frac{(24,472\times10^6)^3}{3,98603\times10^{14}}} = 19.049,51\text{ s} = 5\text{ h }17\text{ min }29,51\text{ s}$$

μέχρι να φτάσουμε στο απόγειό της.

2η πυροδότηση πυραύλου και είσοδος στην γεωστατική τροχιά

$$\Delta\upsilon_2 = \upsilon_2 - \upsilon_a = 3,07 - 1,62 = 1,45\text{ km/s}$$

Η συνολική μεταβολή των μέτρων της ταχύτητας είναι

$$\Delta\upsilon_{o\lambda} = \Delta\upsilon_1 + \Delta\upsilon_2 = 2,39 + 1,45 = 3,84 \text{ km/s}$$

Παρατηρούμε ότι αυτή είναι μεγαλύτερη από τη διαφορά που θα χρειαζόμασταν για να πετύχουμε ταχύτητα διαφυγής στην απόσταση $r_1$. Αν οι δύο ωθήσεις πραγματοποιούνταν ταυτόχρονα θα εκτοξευόμασταν εκτός πεδίου βαρύτητας της Γης και δεν θα επιστρέφαμε.

$$\upsilon_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r_1}} = \sqrt{2}\upsilon_1, \qquad \Delta\upsilon_{esc} = \upsilon_{esc} - \upsilon_1 = (\sqrt{2}-1)\upsilon_1 = 0,414\cdot\ 7,67 = 3,18 \text{ km/s}$$

Έστω ότι έχουμε τα καλύτερα διαθέσιμα καύσιμα με $u = 4,50$ km/s. Αν η μάζα του σκάφους είναι 10 % της συνολικής μάζας του πυραύλου τι ποσοστό των καυσίμων μας καταναλώνουμε με αυτό τον ελιγμό? Έχουμε αρκετά καύσιμα για να επιστρέψουμε στην αρχική μας τροχιά αφού πάλι θα χρειαστούμε τις ίδιες μεταβολές ταχύτητας με την ανάστροφη σειρά και στην αντίθετη κατεύθυνση?

| | | |
|---|---|---|
| Συνολική αρχική μάζα σκάφους και καυσίμων: | | $m_0$ |
| Μάζα σκάφους | : | $m_S = 0,10m_0$ |
| Αρχική μάζα καυσίμων | : | $m_{F0} = 0,90m_0$ |

Εξίσωση πυραύλου:

$$\frac{\Delta\upsilon_1}{u} + \frac{\Delta\upsilon_2}{u} = \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right) + \ln\left(\frac{m_1}{m_2}\right) = \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\frac{m_1}{m_2}\right) = \ln\left(\frac{m_0}{m_2}\right) \Rightarrow$$

$$m_2 = m_0 e^{-(\Delta\upsilon_1+\Delta\upsilon_2)/u} = m_0 e^{-(2,39+1,45)/4,50} = m_0 e^{-0,853} = 0,426m_0$$

Η διαφορά της μάζας είναι ίση με τη μάζα των καυσίμων που καταναλώθηκαν

$$\Delta m_F = m_0 - m_2 = m_0\left(1 - e^{-\Delta\upsilon_{o\lambda}/u}\right) \Rightarrow \Delta m_F = m_0(1-0,426) = 0,574m_0$$

Ή ισοδύναμα, η μάζα καυσίμων που μας έμεινε είναι ίση με

$$m_{F2} = m_2 - m_S = 0,426m_0 - 0,10m_0 = 0,326m_0$$

και αυτή που καταναλώσαμε είναι

$$\Delta m_F = m_{F0} - m_{F2} = 0,90m_0 - 0,326m_0 = 0,574m_0 = \frac{0,574}{0,90}m_F = 0,538m_F$$

53,8% της αρχικής ποσότητας καυσίμων μας. Δηλαδή καταναλώσαμε πάνω από τα μισά καύσιμά μας.

Μπορούμε να γυρίσουμε στην αρχική μας τροχιά αφού πάλι θα χρειαστούμε τις ίδιες μεταβολές ταχύτητας με την ανάστροφη σειρά και στην αντίθετη κατεύθυνση?

Ναι στην συγκεκριμένη περίπτωση, επειδή είμαστε ελαφρότεροι και άρα για την ίδια μεταβολή ταχύτητας χρειαζόμαστε λιγότερη ώθηση. Όμως αυτό πρέπει να υπολογίζεται κάθε φορά.

Τώρα η $m_2$ είναι η αρχική μας μάζα και η τελική μας μάζα στην επιστροφή θα είναι :

$$m_f = m_2 e^{-(\Delta\upsilon_1+\Delta\upsilon_2)/u} = 0,426m_0 e^{-0,853} = (0,426)^2 m_0 = 0,181m_0$$

δηλαδή 18,1% της αρχικής. Αφού αυτή είναι μεγαλύτερη από τη μάζα του σκάφους που είναι 10% της αρχικής συνολικής μάζας, σημαίνει ότι θα μας έχουν απομείνει καύσιμα στη δεξαμενή και άρα θα έχουμε καταφέρει να γυρίσει.
Επειδή η μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας ικανοποιεί την αθροιστική ιδιότητα και είναι ανεξάρτητη από την κατεύθυνση που γίνεται η μεταβολή, η συνθήκη για την δυνατότητα ταξιδιού μετ' επιστροφής βρίσκεται εύκολα.
Έστω $f$ το κλάσμα της μάζας του σκάφους ως προς την αρχική συνολική μάζα του πυραύλου και $r = e^{-\Delta\upsilon_{o\lambda}/u}$ το κλάσμα της συνολικής μάζας που απομένει μετά την ολοκλήρωση κάθε σκέλους του ταξιδιού ως προς τη συνολική μάζα στην έναρξη του ταξιδιού. Η τελική μάζα που απομένει μετά το ταξίδι μετ' επιστροφής δηλαδή για δύο διαδρομές, βρίσκεται από:

$$\left(\frac{\Delta\upsilon_1}{u}+\frac{\Delta\upsilon_2}{u}\right)+\left(\frac{\Delta\upsilon_2}{u}+\frac{\Delta\upsilon_1}{u}\right)=\ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right)+\ln\left(\frac{m_1}{m_2}\right)+\ln\left(\frac{m_2}{m_3}\right)+\ln\left(\frac{m_3}{m_f}\right)\Rightarrow$$

$$2\frac{\Delta\upsilon_{o\lambda}}{u}=\ln\left(\frac{m_0}{m_1}\frac{m_1}{m_2}\frac{m_2}{m_3}\frac{m_3}{m_f}\right)\Rightarrow 2\frac{\Delta\upsilon_{o\lambda}}{u}=\ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right)\Rightarrow\frac{m_0}{m_f}=e^{2\Delta\upsilon_{o\lambda}/u}\Rightarrow$$

$$m_f = m_0 e^{-2\Delta\upsilon_{o\lambda}/u}\Rightarrow m_f = r^2 m_0$$

Για $n$ διαδρομές θα παίρναμε $m_f = r^n m_0$

Θέλουμε η τελική μας μάζα να είναι μεγαλύτερη ή το πολύ ίση με τη μάζα του σκάφους ώστε να μας έχουν απομείνει καύσιμα.

$$m_f \ge m_S \Rightarrow r^2 m_0 \ge f m_0 \Rightarrow r^2 \ge f \Rightarrow e^{-2\Delta\upsilon_{o\lambda}/u} \ge f \Rightarrow$$

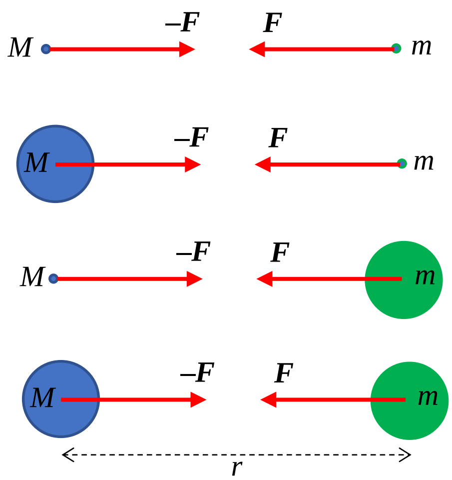
$$-2\frac{\Delta\upsilon_{o\lambda}}{u}\ge \ln f \Rightarrow \frac{\Delta\upsilon_{o\lambda}}{u}\le -\frac{\ln f}{2}$$

Στη δική μας περίπτωση ισχύει $\frac{3,84}{4,50}<-\frac{\ln 0,1}{2}\Rightarrow 0,853<1,151$.

Οι πιο ισχυροί πύραυλοι που υπάρχουν έχουν $f = 0,15$.

**Μηδέν βαρυτική δύναμη στο εσωτερικού κελύφους**

Το πρώτο πράγμα που έκανε ο Νεύτωνας όταν διατύπωσε το νόμο της παγκόσμιας βαρύτητας ήταν να αποδείξει ότι ισχύει όχι μόνο για υλικά σημεία αλλά και για σφαιρικά σώματα (πλανήτες), με $r$ την απόσταση των κέντρων των δύο σφαιρών. Αυτό του πήρε κάποια χρόνια και είναι ένας από τους λόγους που καθυστέρησε η δημοσίευση των Principia. Στην πορεία ανακάλυψε ένα νέο κλάδο των μαθηματικών την ανάλυση (παράγωγοι και ολοκληρώματα). Δεν θα το δείξουμε τώρα επειδή είναι απλά μια άσκηση ολοκληρώσεων αλλά το θεωρούμε δεδομένο. Άρα όλες οι δυνάμεις στο παρακάτω σχήμα είναι ίσες.

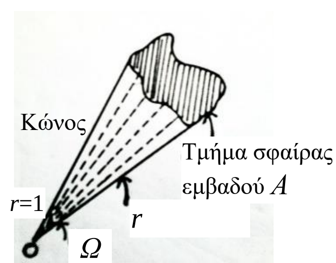



***Ταυτόχρονα έδειξε ότι μια μάζα στο εσωτερικό ενός σφαιρικού φλοιού δεν θα δέχεται καθόλου δύναμη από τον σφαιρικό φλοιό!***

Και τα δυο παραπάνω αποτελέσματα είναι συνέπεια του νόμου του αντίστροφου τετραγώνου $F \propto 1/r^2$. Το δεύτερο αποδεικνύεται πολύ εύκολα αρκεί να ξέρετε τι σημαίνει στερεά γωνία.

***Στερεά γωνία***. Ανάλογα με τον ορισμό της επίπεδης γωνίας που είναι ίση με το μήκος του τόξου δια την ακτίνα του κύκλου $\theta = \frac{s}{r}$ ορίζεται η στερεά γωνία ως ο λόγος του εμβαδού της επιφάνειας τμήματος της σφαίρας προς την ακτίνα της σφαίρας στο τετράγωνο $\Omega = \frac{A}{r^2}$

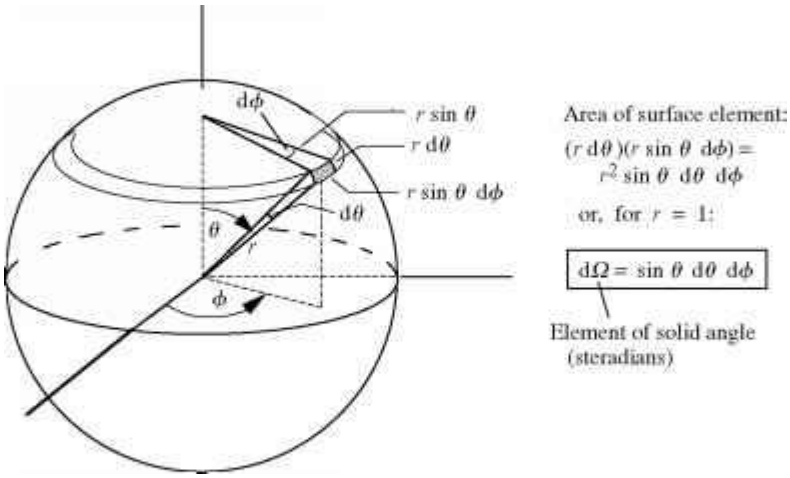

$$\theta = \frac{s}{r}$$




$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

Η στοιχειώδης επιφάνεια τμήματος σφαίρας ακτίνας $r$ που εκτείνεται σε εύρος πολικής γωνίας $d\theta$ και εύρος αζιμουθιακής γωνίας $d\varphi$ σε σφαιρικές συντεταγμένες δεν είναι παρά το γινόμενο των μηκών των δύο τόξων (βάση επί ύψος) τα οποία είναι ίσα με $rd\theta$ και $r\sin\theta d\varphi$ αντίστοιχα. Άρα

$$dA = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \quad \text{και} \quad d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin\theta d\theta d\varphi$$




Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε το γνωστό εμβαδόν της σφαίρας

$$\int d\Omega = \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -\int_1^{-1} d(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\cdot\ 2\pi = 4\pi$$

$$A_S = \int_S dA = \int_S r^2 d\Omega = r^2 \int_S d\Omega = 4\pi r^2$$

Αν ολοκληρώσουμε και ως προς *r* βρίσκουμε το γνωστό τύπο του όγκου της σφαίρας

$$V_S = \int_S dV = \int_S drdA = \int_0^r r^2 dr \int d\Omega = \frac{r^3}{3}\cdot\ 4\pi = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Μια μάζα *m* στο εσωτερικό ομογενούς λεπτού σφαιρικού φλοιού συνολικής μάζας *M* δέχεται δυνάμεις από κάθε κατεύθυνση από κάθε τμήμα του φλοιού. Για κάθε στοιχειώδες τμήμα του φλοιού όμως, έστω 1, το αντιδιαμετρικό του τμήμα 2, που εκτείνεται σε ίση στερεά γωνία *dΩ* ασκεί ακριβώς την αντίθετη δύναμη οπότε η συνολική δύναμη είναι μηδέν. Η μάζα του είναι μεγαλύτερη, όμως είναι πιο μακριά. Η αύξηση της μάζας του τμήματος 2 που είναι ανάλογη του αντίστοιχου εμβαδού του φλοιού που καλύπτει ( $dM \propto da \propto r^2 d\Omega$ ), αντισταθμίζεται ακριβώς από την αύξηση της απόστασης *r* στον παρονομαστή του τύπου της βαρυτικής δύναμης. Αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι η βαρυτική δύναμη είναι αντιστρόφως ανάλογη με το τετράγωνο της απόστασης ( $F \propto 1/r^2$ ) και δεν θα συνέβαινε αν ήταν ανάλογη με κάποιο άλλο εκθέτη της απόστασης. Το ίδιο συμβαίνει και με την ηλεκτροστατική δύναμη. Για την ακρίβεια αυτή είναι η πειραματική επιβεβαίωση/απόδειξη, του γεγονότος ότι η δύναμη εξαρτάται από το αντίστροφου του τετραγώνου της απόστασης. Ακόμα και σήμερα μετράμε με απίστευτα μεγάλη ακρίβεια για να επιβεβαιώσουμε αυτό το γεγονός ελπίζοντας να το διαψεύσουμε και να ανακαλύψουμε νέα φυσική. Προς το παρών τίποτα, ο νόμος ισχύει ως έχει.

Η δύναμη από κάποιο στοιχειώδες τμήμα *i* του φλοιού στη μάζα *m* θα είναι :

$$dF_i = G\frac{mdM_i}{r_i^2} = G\frac{m\rho dV_i}{r_i^2} = Gm\rho dh\frac{da_i}{r_i^2}$$

όπου $r_i$ η απόστασή του από τη μάζα *m*, $\rho$ η πυκνότητα του φλοιού, *dh* το πάχος του και $da_1$ το εμβαδόν του στοιχειώδους τμήματος *i* του φλοιού.
Μπορούμε να δείξουμε ότι για το σημείο *j* του φλοιού που είναι το «αντιδιαμετρικό» του σημείου *i* ως προς τη μάζα *m*, ισχύει

$$\frac{da_i}{r_i^2} = \frac{da_j}{r_j^2}$$

Άρα οι δύο δυνάμεις θα έχουν ίσα μέτρα και επειδή είναι αντίθετες θα αναιρούνται

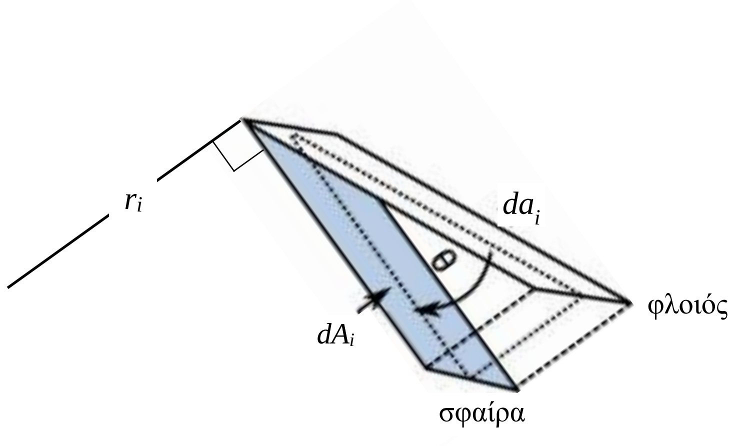
$$dF_i = G\frac{mdM_i}{r_i^2} = Gm\rho dh\frac{da_i}{r_i^2} = Gm\rho dh\frac{da_j}{r_j^2} = G\frac{mdM_j}{r_j^2} = dF_j$$

Η ισότητα $da_i / r_i^2 = da_j / r_j^2$ μεταξύ δύο «αντιδιαμετρικών» σημείων του φλοιού φαίνεται εύκολα από τα παρακάτω σχήματα.
Τα δύο τμήματα εκτείνονται σε ίσες κατακορυφήν γωνίες (αυτό σημαίνει «αντιδιαμετρικά»):

$$d\Omega_i = d\Omega_j \Rightarrow \frac{dA_i}{r_i^2} = \frac{dA_i}{r_i^2}$$

όπου $dA_i$ , $dA_j$ τα στοιχειώδη εμβαδά των σφαιρών με ακτίνες $r_i$ , $r_j$ και κέντρο την *m* που ορίζουν τη στερεά γωνία. Το σφαιρικό εμβαδόν $dA_i$ δεν είναι παρά η προβολή του εμβαδού του φλοιού $da_i$ πάνω στην αντίστοιχη σφαίρα ακτίνας $r_i$ :

$$dA_i = \cos\theta_i da_i$$



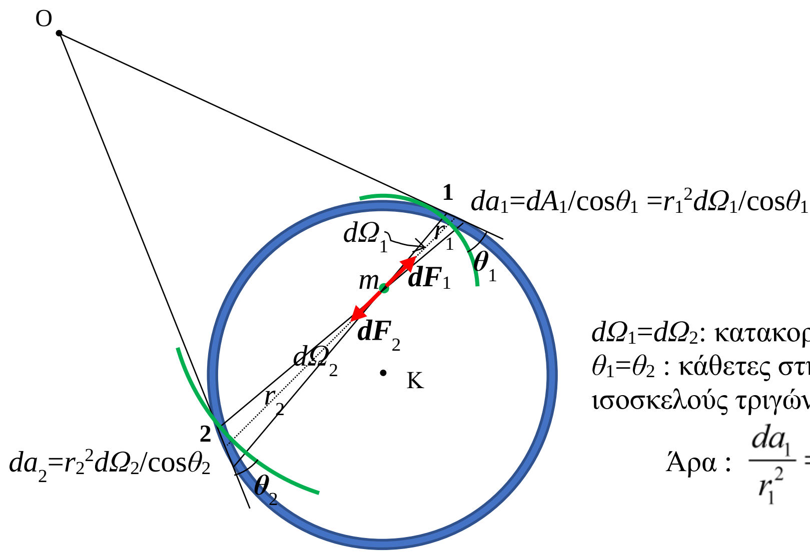

Οπότε $da_i = \dfrac{dA_i}{\cos\theta_i} = \dfrac{r_i^2 d\Omega_i}{\cos\theta_i}$

Όμως οι γωνίες $\theta_i$ και $\theta_2$ με τις οποίες τέμνουν το φλοιό οι αντίστοιχες σφαίρες είναι ίσες επειδή οι σφαίρες τέμνουν κάθετα τη χορδή *ij* που ενώνει τα δύο σημεία (έχουν τα κέντρα τους πάνω στη χορδή στη μάζα *m*) και η χορδή αυτή είναι η βάση ισοσκελούς τριγώνου, του 1Ο2 αφού οι ευθείες *i*O και *j*O που τέμνονται στο O είναι εφαπτόμενες στον φλοιό (να θυμηθείτε την Ευκλείδεια γεωμετρία από το λύκειο). Άρα :

$$\theta_i = \theta_j \Rightarrow \cos\theta_i = \cos\theta_j$$

που μας δίνει :

$$\frac{da_i}{r_i^2} = \frac{d\Omega_i}{\cos\theta_i} = \frac{d\Omega_j}{\cos\theta_j} = \frac{da_j}{r_j^2}$$

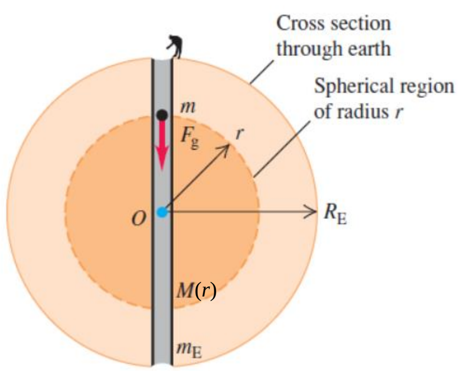



$d\Omega_1 = d\Omega_2$: κατακορυφήν
$\theta_1 = \theta_2$ : κάθετες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου **1O2**

Άρα : $\dfrac{da_1}{r_1^2} = \dfrac{da_2}{r_2^2}$

**Ταλάντωση δια μέσου της Γης**

Τι είναι πιο γρήγορο για να στείλουμε ένα πακέτο στην άλλη άκρη της Γης? Να το αφήσουμε να πέσει μέσω μιας σήραγγας που διαπερνά τη Γη ή να το θέσουμε σε κυκλική τροχιά στο ύψος της επιφάνειας της Γης?




Το πακέτο που θα περάσει μέσα από τη Γη θα δέχεται βαρυτική έλξη μόνο από το μέρος της Γης, τη σφαίρα, που βρίσκεται από κάτω του. Άρα η δύναμη που θα του ασκείται όταν θα βρίσκεται απόσταση $r$ από το κέντρο της Γης θα είναι :

$$\vec{F}(r) = -G\frac{M(r)m}{r^2}\hat{r} = -G\rho m\frac{V(r)}{r^2}\hat{r} = -G\frac{M_E}{4\pi R_E^3/3}m\frac{4\pi r^3/3}{r^2}\hat{r} = -m\frac{GM_E}{R_E^2}\frac{r}{R_E}\hat{r} = -mg\frac{r}{R_E}\hat{r}$$

Αυτή είναι δύναμη επαναφοράς με «σταθερά ελατηρίου» $k = \dfrac{mg}{R_E}$ .

Άρα το πακέτο θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{mR_E}} = \sqrt{\frac{g}{R_E}}$$

και περίοδο

$$T_{shm} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R_E}{g}}$$

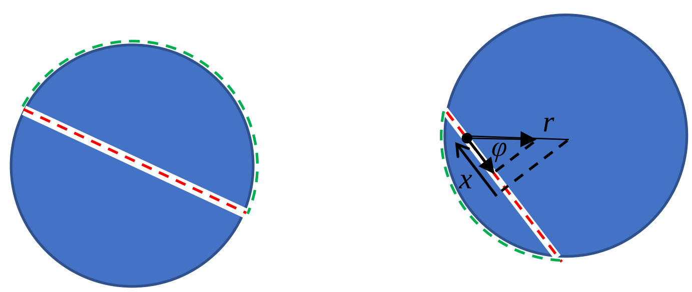
Όταν φτάσει στην άλλη άκρη της Γης, θα πρέπει κάποιος να το πιάσει αλλιώς θα ξαναγυρίσει πίσω. Για να φτάσει στην άλλη άκρη θα χρειαστεί χρόνο μισής περιόδου, δηλαδή :

$$t_{shm} = \frac{T_{shm}}{2} = \pi\sqrt{\frac{R_E}{g}}$$

Ο χρόνος αυτός προκύπτει ότι είναι ίσος με την ημιπερίοδο της κυκλικής τροχιάς ($3^{ος}$ νόμο του Kepler) :

$$t_c = \frac{T_c}{2} = \pi\sqrt{\frac{R_E^3}{GM_E}} = \pi\sqrt{\frac{R_E}{g}}$$

οπότε δεν συμφέρει να σκάψουμε διαμέσου της Γης. Τα δύο πακέτα θα φτάσουν μαζί.




Μήπως θα κερδίσουμε κάτι σε χρόνο αν σκάψουμε μια κοντύτερη σήραγγα που να μην διαπερνά όλη τη Γη?

Αν φτιάξουμε τη σήραγγα εντελώς λεία και εξαλείψουμε τις τριβές τότε η μόνη δύναμη κατά μήκος της, στη διεύθυνση $x$ , θα είναι η συνιστώσα της βαρυτικής δύναμης στη διεύθυνση $x$ :

$$F(x) = F(r)\cos\varphi = F(r)\frac{x}{r} = -mg\frac{r}{R_E}\frac{x}{r} = -\frac{mg}{R_E}x$$

Πάλι η δύναμη είναι δύναμη επαναφοράς με το ίδιο $k$ άρα θα προκαλέσει απλή αρμονική ταλάντωση με την ίδια κυκλική συχνότητα $\omega$ και την ίδια περίοδο $T$. Το πακέτο θα κάνει πάλι τον ίδιο χρόνο να περάσει απέναντι, ίσο με το χρόνο που χρειάζεται να διαπεράσει όλη τη Γη, μισή περίοδο της κυκλικής τροχιάς. Οπότε πλέον όχι μόνο δεν κερδίζουμε αλλά χάνουμε σε διαφορά χρόνου επειδή το πακέτο δορυφόρος στην κυκλική τροχιά ακτίνας $R_E$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και θα χρειαστεί λιγότερο χρόνο από τη μισή του περίοδο για να διαγράψει το μικρότερο τόξο

**Σύγκρουση αυτοκινήτου με μεγάλο σκύλο**
Μάζα αυτοκινήτου $M$ = 1000 kg
Μάζα σκύλου $m$ =20 kg
Πλάτος σκύλου $d$ = 0,25 m
Ταχύτητα αυτοκινήτου $\upsilon$= 54 km/h = 15 m/s

Η κρούση είναι πλαστική.

$$V_{\sigma\upsilon\sigma} = \frac{M\upsilon}{M+m} \approx \upsilon$$

Επειδή η διαφορά των μαζών είναι πολύ μεγάλη το αυτοκίνητο δεν θα αλλάξει πρακτικά ταχύτητα και ο σκύλος θα κινείται μετά την σύγκρουση με την αρχική ταχύτητα του αυτοκινήτου.
Η κρούση θα διαρκέσει περίπου όσο χρειάζεται να διανύσει το αυτοκίνητο τα 0,25 m που είναι το πλάτος του σκύλου

$$\Delta t = \frac{d}{\upsilon}$$

Η μέση δύναμη στο σκύλο (και άρα και στο αυτοκίνητο από τον σκύλο) θα είναι

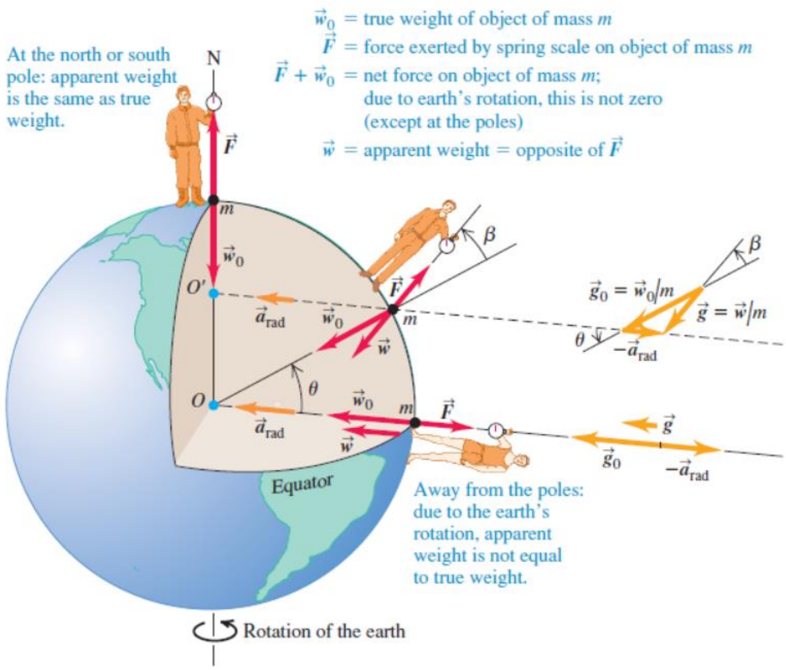
$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m\upsilon - 0}{d/\upsilon} = \frac{m\upsilon^2}{d} = \frac{30 \cdot\ 15^2}{0,25} = 27.000 \text{ N}$$

Δηλαδή περίπου ίση με το βάρος 2,7 τόνων.

Αν το σκυλί ήταν Chihuahua (τσιουάουα) $m$= 2,5 kg   $d$=0,1 m

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m\upsilon - 0}{d/\upsilon} = \frac{m\upsilon^2}{d} = \frac{2,5 \cdot\ 15^2}{0,1} = 5.625 \text{ N}$$

**Φαινόμενο βάρος λόγω περιστροφής της Γης**
Πραγματικό βάρος $w_0$ : $w_0 = G\dfrac{M_E m}{R_E^2} = mg$
Ότι δείχνει η ζυγαριά (δυναμόμετρο), αν η ζυγαριά δεν επιταχύνεται.




Στους πόλους : $\sum F_y = 0 \Rightarrow F - w_0 = 0 \Rightarrow F = w_0$

η ένδειξη $F$ της ζυγαριάς είναι το πραγματικό βάρος

Στον Ισημερινό όμως το σώμα περιστρέφεται :

$$\sum F_y = ma_c \Rightarrow w_0 - F = m\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow F = w_0 - m\frac{\upsilon^2}{r}$$

άρα το ¨βάρος¨ $F$ που θα μετράει η ζυγαριά θα είναι μικρότερο.

Αυτό ισοδυναμεί σε μείωση της έντασης του πεδίου βαρύτητας από $g_0 = w_0/m$ σε $g = F/m$ για έναν παρατηρητή στον Ισημερινό :

$$g = g_0 - \frac{\upsilon^2}{r}$$

Ακτίνα στον Ισημερινό : $r = R_{Ee} = 6.378$ km

Αστρική μέρα : $T = 86.164$ s

Ταχύτητα : $\upsilon = \dfrac{2\pi R_{Ee}}{T} = \dfrac{2\pi \cdot 6.378 \times 10^3 \text{m}}{86.164 \text{ s}} = 465 \text{ m/s}$

$$\frac{\upsilon^2}{r} = \frac{465^2}{6.378 \times 10^3} = 0,0339 \text{ m/s}^2$$

Μεταβολή περίπου ίση με 3,4%. Π.χ. ένα σώμα μάζας 100 kg στους πόλους θα φαινόταν σαν 100(1-0,0339)=96,61 kg στον Ισημερινό

Τι περίοδο έπρεπε να έχει η Γη ώστε στον Ισημερινό το φαινόμενο βάρος μας να ήταν μηδέν ?

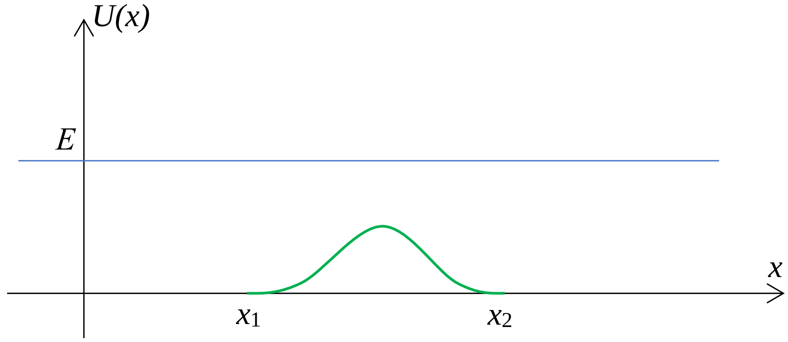
$$g = 0 \Rightarrow g_0 = \frac{\upsilon^2}{r} = \omega^2 r \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g_0}{R_{Ee}}} = 0,001240 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 5.069 \text{ s} = 1,408 \text{ h} = 1 \text{ h } 24,5 \text{ min}$$

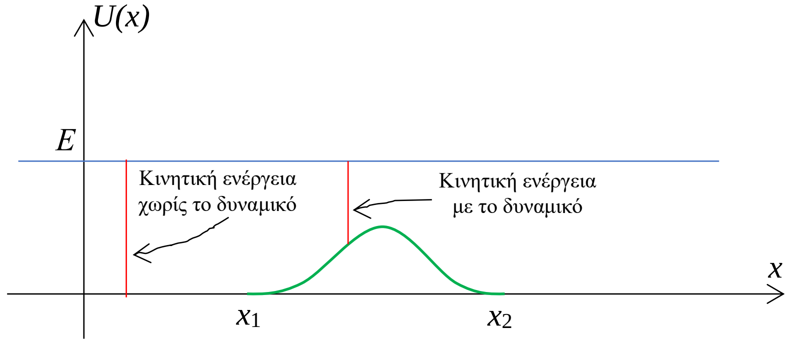
**Κίνηση σε δυναμικό 1**

Υλικό σημείο ενέργειας $E$ κινείται ευθύγραμμα και ομαλά μέχρι να συναντήσει το φράγμα δυναμικού του σχήματος το οποίο εκτείνεται από τη θέση $x_1$ έως τη θέση $x_2$. Αν $\Delta t_0$ και $\Delta t_p$ είναι τα αντίστοιχα χρονικά διαστήματα για την μετατόπιση $\Delta x = x_2 - x_1$ όταν το σωματίδιο κινείται ελεύθερο και όταν κινείται παρουσία του δυναμικού, τότε ισχύει

Α) $\Delta t_0 = \Delta t_p$ Β) $\Delta t_0 > \Delta t_p$ Γ) $\Delta t_0 < \Delta t_p$



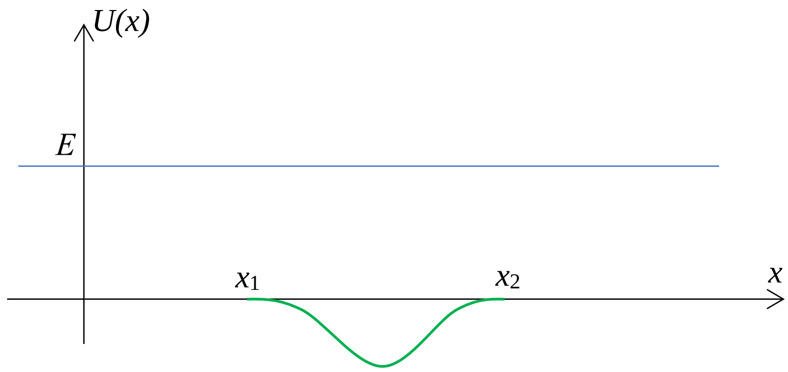

Γ) Σε κάθε σημείο της περιοχής $[x_1, x_2]$ του φράγματος δυναμικού το σωματίδιο θα έχει μικρότερη κινητική ενέργεια από αυτήν που θα είχε απουσία του δυναμικού $K_p < K_0 \Rightarrow \upsilon_p < \upsilon_0$. Άρα θα κινείται με μικρότερη ταχύτητα και θα χρειαστεί περισσότερο χρόνο να διατρέξει το διάστημα $x_2 - x_1$ όταν υπάρχει το φράγμα δυναμικού από το χρόνο που θα χρειαζόταν αν κινούνταν ελεύθερο.




**Κίνηση σε δυναμικό 2**

Υλικό σημείο ενέργειας $E$ κινείται ευθύγραμμα και ομαλά μέχρι να συναντήσει το φρεάτιο δυναμικού του σχήματος το οποίο εκτείνεται από τη θέση $x_1$ έως τη θέση $x_2$. Αν $\Delta t_0$ και $\Delta t_p$ είναι τα αντίστοιχα χρονικά διαστήματα για την μετατόπιση $\Delta x = x_2 - x_1$ όταν το σωματίδιο κινείται ελεύθερο και όταν κινείται παρουσία του δυναμικού, τότε ισχύει

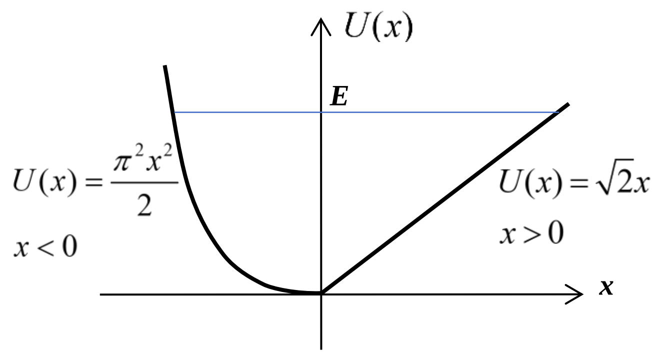
Α) $\Delta t_0 = \Delta t_p$ Β) $\Delta t_0 > \Delta t_p$ Γ) $\Delta t_0 < \Delta t_p$




Β) Σε κάθε σημείο της περιοχής [$x_1$, $x_2$] του φρεατίου δυναμικού το σωματίδιο θα έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια από αυτήν που θα είχε απουσία του δυναμικού $K_p > K_0 \Rightarrow \upsilon_p > \upsilon_0$. Άρα θα κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα και θα χρειαστεί λιγότερο χρόνο να διατρέξει το διάστημα $x_2 - x_1$ του φρεατίου δυναμικού από το χρόνο που θα χρειαζόταν αν κινούνταν ελεύθερο.

**Κίνηση σε δυναμικό 3**

Σώμα μάζας $m$=0,25 kg κινείται με συνολική ενέργεια $E$=4 J και δυναμική ενέργεια που δίνεται στην παραπάνω γραφική παράσταση. Η περίοδος της ταλάντωσης είναι :




Α) 0,5 s Β) 1 s Γ) 1,5 s Δ) 2 s Ε) 2,5 s

**Ε)** $T = \frac{T_{\alpha\alpha\tau}}{2} + 2t_{\alpha\nu o\delta} = 0,5 + 2 = 2,5$ s

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = E \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 4\sqrt{2} \text{ m/s}$$

$$U(x) = \frac{\pi^2 x^2}{2} \Rightarrow F = -\pi^2 x \Rightarrow \frac{T_{\alpha\alpha\tau}}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{\pi^2}} = 0,5 \text{ s}$$

$$U(x) = \sqrt{2}x \Rightarrow F = -\sqrt{2} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow t_{\alpha\nu o\delta} = \frac{\sqrt{2}}{m\upsilon_0} = \frac{\sqrt{2}}{0,25 \cdot 4\sqrt{2}} = 1 \text{ s}$$

**Κίνηση σε δυναμικό 4**

Ένα σωματίδιο μάζας $m$ κινείται στην περιοχή της διατηρητικού πεδίου που περιγράφεται από τη δυναμική ενέργεια $U(x,y,z)=b(yz+x^2e^{-y})$ (SI), όπου $b$ θετική σταθερά. Στο σωματίδιο αυτό ασκείται επιπλέον μια δύναμη της μορφής $\vec{f}=a(\vec{k}\times\vec{\upsilon})$ (SI), όπου $a$ θετική σταθερά, $\vec{k}$ μια σταθερή διανυσματική ποσότητα με μονάδες ταχύτητας και $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα του σωματιδίου. Τη χρονική στιγμή $t_0$ το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $\vec{r}_0=1\hat{x}$ και τη χρονική στιγμή $t_1$ στη θέση $\vec{r}_1=1\hat{y}+1\hat{z}$ , όπου $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα της x, y, z κατευθύνσεις αντίστοιχα. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου $K_1-K_0$ έχει αριθμητική τιμή ίση με :
Α) $2b$  Β) 0  Γ) $2ak+b$  Δ) $a+b$

**Β)** Η θέση $\vec{r}_0=1\hat{x}$ είναι το σημείο $\vec{r}_0=(1,0,0)$ και η θέση $\vec{r}_1=1\hat{y}+1\hat{z}$ το σημείο $\vec{r}_1=(0,1,1)$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Για τη λύση χρησιμοποιούμε απλώς το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας : $\Delta K=\sum_i W_i \Rightarrow K_1-K_0=W_U+W_f$

Η μία δύναμη, η $f$, δεν παράγει έργο γιατί είναι διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα και άρα στη μετατόπιση (θυμηθείτε ότι το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ένα διάνυσμα κάθετο και στα δύο διανύσματα από τα οποία ορίζεται). Όσο για τη δεύτερη αφού είναι διατηρητική το έργο της θα είναι απλά η διαφορά της δυναμικής της ενέργειας, από το αρχικό στο τελικό σημείο, η οποία της δίνεται. Αντικαθιστούμε λοιπόν απλά στον τύπο της συντεταγμένες $x,y,z$, κάθε σημείου και παίρνουμε :

$$K_1-K_0=U_0-U_1+0=U(1,0,0)-U(0,1,1)=b(0\cdot 0+1^2\cdot e^0)-b(1\cdot 1+0^2\cdot e^{-1})=b-b=0$$

**Κεντρική δύναμη**

Για δυναμική ενέργεια του τύπου $U=kr^n$ , όπου $k$ θετική σταθερά, το διάνυσμα της δύναμης είναι:
α) $\vec{F}=-knr^{n-2}\vec{r}$  β) $\vec{F}=-knr^{n-1}\vec{r}$  γ) $\vec{F}=knr^{n-2}\vec{r}$  δ) $\vec{F}=knr^{n-1}\vec{r}$

**Α)** Απλή άσκηση εφαρμογής του ορισμού της δύναμης μέσω της δυναμικής ενέργειας από τον τύπο $\vec{F}=-\vec{\nabla}U$. Προσοχή : της απαντήσεις η δύναμη δεν έχει γραφτεί συναρτήσει του μοναδιαίου ακτινικού διανύσματος $\hat{r}$ αλλά του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ το οποίο περιέχει μια πρόσθετη δύναμη του $r$ : $\vec{r}=r\hat{r}$. Επειδή η δυναμική ενέργεια εξαρτάται μόνο από το $r$, $U(r,\theta,\varphi)=U(r)$ , οι παράγωγοι ως της $\theta$ και $\varphi$, σε σφαιρικές συντεταγμένες θα δώσουν μηδέν. Έτσι δεν χρειάζεται καν να γνωρίζετε τον πλήρη τύπο της απόκλισης $\vec{\nabla}$ σε σφαιρικές συντεταγμένες η οποία καταλήγει σε μια απλή παραγώγιση ως της $r$. Έτσι η δύναμη δίνεται της σε μια απλή μονοδιάστατη περίπτωση :

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}U(r)=-\frac{dU(r)}{dr}\hat{r}=-\frac{d(kr^n)}{dr}\hat{r}=-nkr^{n-1}\hat{r}=-nkr^{n-2}\vec{r}$$

$$\hat{r}=\frac{\vec{r}}{r}$$

**Κυκλική τροχιά**

Ένα σωματίδιο μάζας $m$ κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r$ γύρω από ένα σταθερό σημείο υπό την επίδραση μιας ελκτικής δύναμης μέτρου $F = \frac{k}{r^3}$ , όπου $k > 0$. Αν η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου είναι μηδέν για $r \to \infty$ , τότε η ολική ενέργεια του σωματιδίου στην κυκλική τροχιά είναι :

Α) $-\frac{k}{r^2}$ Β) $-\frac{k}{2r^2}$ Γ) 0 Δ) $\frac{k}{r^2}$

**Γ)** Στην κυκλική τροχιά η ταχύτητα και άρα η κινητική ενέργεια συναρτήσει της ακτίνας $r$ βρίσκεται από το 2ο νόμο του Νεύτωνα :

$$F_{ολ} = ma_c \Rightarrow \frac{k}{r^3} = m\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{k}{2r^2}$$

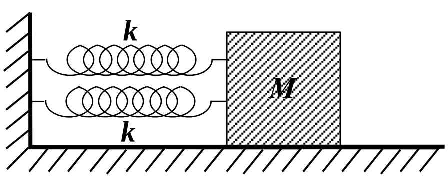
Η δυναμική ενέργεια προκύπτει, από τον ορισμό της, με ολοκλήρωση από τη δύναμη (έργο):

$$U_r - U_\infty = W_{r\to\infty} \Rightarrow U_r = \int_r^\infty F dr' = \int_r^\infty \frac{k}{r'^3} dr' = k\int_r^\infty r'^{-3} dr = k\left.\frac{r'^{-3+1}}{-3+1}\right|_r^\infty = -\frac{k}{2r^2}$$

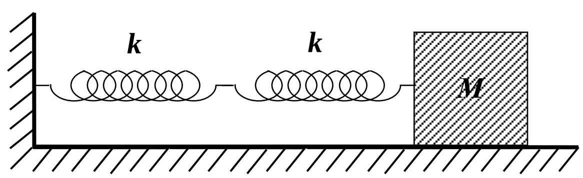
Οπότε η ολική ενέργεια σε μια κυκλική τροχιά θα είναι μηδέν :

$$E = K + U = \frac{k}{2r^2} - \frac{k}{2r^2} = 0$$

**Συνδυασμός ελατηρίων**




Εικόνα 1




Εικόνα 2

Δύο όμοια ελατήρια σταθεράς $k$ συνδέονται σε όμοια σώματα μάζας $M$, της φαίνεται στην παραπάνω εικόνα. Ο λόγος της περιόδου της ταλάντωσης όταν τα ελατήρια είναι συνδεδεμένα παράλληλα (Εικόνα 1) της την περίοδο της ταλάντωσης όταν τα ελατήρια είναι συνδεδεμένα σε σειρά (Εικόνα 2) είναι :

Α) $\frac{1}{2}$ Β) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ Γ) 1 Δ) $\sqrt{2}$ Ε) 2

**Α)** $$\frac{T_p}{T_s} = \frac{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{M}{k_p}}}{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{M}{k_s}}} = \sqrt{\frac{k_s}{k_p}} = \sqrt{\frac{kk/(k+k)}{k+k}} = \sqrt{\frac{k^2}{2k\cdot 2k}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Όταν τα ελατήρια είναι παράλληλα υφίστανται την ίδια παραμόρφωση αλλά ασκούν διαφορετικές δυνάμεις. Την ίδια παραμόρφωση θα πρέπει να υφίσταται και το ισοδύναμο ελατήριο και να ασκεί δύναμη ίση με τη συνολική δύναμη που ασκούν τα δύο ελατήρια:

$$x_1 = x_2 = x$$

$$F = F_1 + F_2 \Rightarrow -kx = -k_1 x_1 - k_2 x_2 = -(k_1 + k_2)x \Rightarrow k = k_1 + k_2$$

Όταν τα ελατήρια είναι σε σειρά δεν παραμορφώνονται το ίδιο, όμως βρίσκονται υπό την ίδια τάση και ασκούν την ίδια δύναμη. Το ισοδύναμο ελατήριο πρέπει να ασκεί την ίδια δύναμη για παραμόρφωση ίση με το άθροισμα των παραμορφώσεων των δυο ελατηρίων:

$$F = F_1 = F_2$$

$$x_1 + x_2 = x \Rightarrow -\frac{F_1}{k_1} - \frac{F_2}{k_2} = -\frac{F}{k} \Rightarrow F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) = \frac{F}{k} \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

**Έργο έκρηξης**

Άνθρωπος μάζας $m$ που βρισκόταν σε μια ακίνητη βάρκα μάζας $M$ βγαίνει από αυτήν πηδώντας προς τα αριστερά με οριζόντια ταχύτητα. Αμέσως μετά το άλμα παρατηρούμε ότι η βάρκα κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα $\upsilon$. Πόσο έργο έκανε ο άνθρωπος κατά το άλμα (και στο σώμα του και στη βάρκα);

Α) $\frac{1}{2}M\upsilon^2$ Β) $\frac{1}{2}m\upsilon^2$ Γ) $\frac{1}{2}(M+m)\upsilon^2$ Δ) $\frac{1}{2}\left(M + \frac{M^2}{m}\right)\upsilon^2$

Ε) $\frac{1}{2}\left(\frac{Mm}{M+m}\right)\upsilon^2$

**Δ)** $m\upsilon_{\alpha\nu\theta\rho} = M\upsilon \Rightarrow \upsilon_{\alpha\nu\theta\rho} = \frac{M}{m}\upsilon$

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\nu\theta\rho}^2 + \frac{1}{2}M\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\frac{M^2}{m^2}\upsilon^2 + \frac{1}{2}M\upsilon^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{M^2}{m} + M\right)\upsilon^2$$

**Κλάσμα απώλειας ενέργειας στην πλαστική κρούση με ακίνητο στόχο**

Σώμα μάζας $2m$ συγκρούεται κεντρικά με ακίνητο σώμα μάζας $m$. Αν η κρούση είναι πλαστική, τι κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας χάνεται κατά την κρούση;

Α) 0 Β) $\frac{1}{4}$ Γ) $\frac{1}{3}$ Δ) $\frac{1}{2}$ Ε) $\frac{2}{3}$

**Γ)**

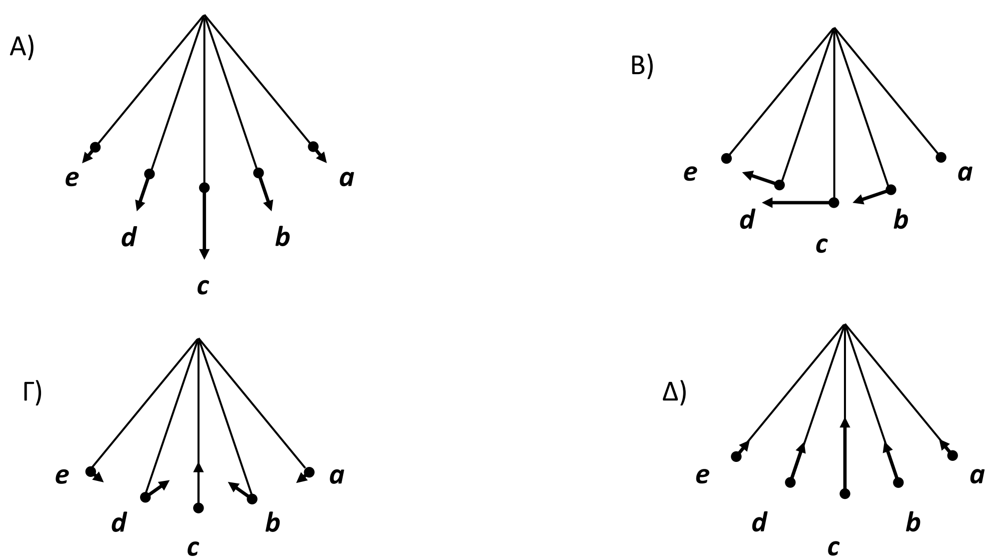
Αν το θυμάστε, για πλαστική κρούση σε ακίνητο στόχο ισχύει : $\frac{|\Delta K|}{K_{\alpha\rho\chi}} = \frac{M_{\alpha\kappa\iota\nu}}{M_{o\lambda}} = \frac{m}{2m+m} = \frac{1}{3}$

Αλλιώς, το δείχνετε: $2m\upsilon = (2m+m)V \Rightarrow V = \dfrac{2\upsilon}{3}$

$$\left|\Delta K\right| = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}2m\upsilon^2 - \frac{1}{2}3m\left(\frac{2\upsilon}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}2m\upsilon^2\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}K_{\alpha\rho\chi}$$

**Κατακόρυφος κύκλος πάλι**

Ποια από της παρακάτω εικόνες αντιπροσωπεύει καλύτερα την επιτάχυνση της μαθηματικού εκκρεμούς που κινείται από το σημείο ***a*** στο σημείο ***e;***




**Γ)** Δεν είναι η Δ) γιατί η κίνηση μπορεί να είναι κυκλική αλλά δεν είναι ομαλή κυκλική. Υπάρχει επιτρόχια επιτάχυνση (και επιβράδυνση) και άρα η επιτάχυνση δείχνει προς τα κοίλα της τροχιάς. Η Δ) είναι η τάση του νήματος η οποία μαζί με το βάρος δίνει την Γ) για τη συνολική δύναμη. Η Β) είναι η ταχύτητα του εκκρεμούς (εφαπτόμενη στην τροχιά).

**Κεντρομόλος και επιτρόχια επιτάχυνση**

Ένα υλικό σημείο κινείται στην περιφέρεια της κύκλου ακτίνας *R*. Η ταχύτητά του δίνεται από τη σχέση $\upsilon = ks^{3/2}$ , όπου *s* είναι το διανυόμενο τόξο πάνω στον κύκλο και *k* είναι μια σταθερά. Ο λόγος της κεντρομόλου, $\alpha_\kappa$ , της την επιτρόχιο, $\alpha_\varepsilon$ , επιτάχυνση είναι :

A) $\dfrac{\alpha_\kappa}{\alpha_\varepsilon} = \dfrac{2s}{R}$ B) $\dfrac{\alpha_\kappa}{\alpha_\varepsilon} = \dfrac{3s}{R}$ Γ) $\dfrac{\alpha_\kappa}{\alpha_\varepsilon} = \dfrac{s}{2R}$ Δ) $\dfrac{\alpha_\kappa}{\alpha_\varepsilon} = \dfrac{2s}{3R}$

**Δ)** $a_\varepsilon = \dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d\upsilon}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{3}{2}ks^{1/2}\cdot ks^{3/2} = \dfrac{3k^2}{2}s^2$

$$a_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{k^2s^3}{R}$$

**Επιτάχυνση ως προς τη θέση**

Ένα σωματίδιο μοναδιαίας μάζας κινείται σε μία διάσταση έτσι ώστε η ταχύτητα του να δίνεται από τη σχέση $\upsilon(x) = ax^{-n}$, όπου *a*, *n* είναι σταθερές και *x* η θέση του σωματιδίου. Ποια είναι η επιτάχυνση του σωματιδίου ως συνάρτηση της θέσης *x* ;

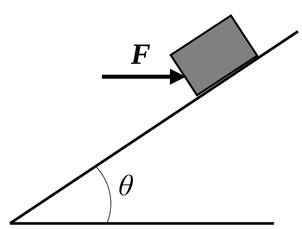
Α) $-na^2x^{-2n-1}$ Β) $-na^2x^{-n-1}$ Γ) $-ax^{-n+1}$ Δ) $-ax^{-2n+1}$

**Α)** Απλή άσκηση εφαρμογής του ορισμού της επιτάχυνσης που απαιτεί μόνο γνώση παραγώγισης και κανόνα αλυσίδας

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\upsilon = \frac{d}{dt}(ax^{-n})\cdot ax^{-n} = -nax^{-n-1}\cdot ax^{-n} = -na^2x^{-2n-1}$$

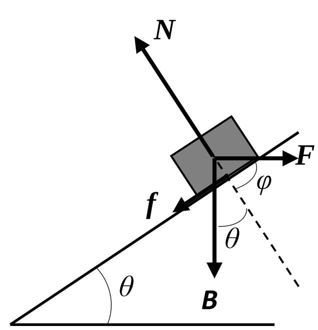
**Τριβή σε κεκλιμένο επίπεδο**

Μια οριζόντια δύναμη σπρώχνει σώμα μάζας *m*, σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας *θ* ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ του σώματος και του κεκλιμένου επιπέδου είναι *μ*. Το μέτρο της δύναμης της τριβής που ασκείται στο σώμα είναι :




Α) $\mu mg\cos\theta$ Β) $\dfrac{\mu mg}{\cos\theta}$ Γ) $\mu(mg\cos\theta + F\sin\theta)$ Δ) $\mu(mg\cos\theta - F\sin\theta)$

**Γ)** Απλή άσκηση ορισμών. Η τριβή είναι ανάλογη της κάθετης αντίδρασης της προσέξτε ότι η κάθετη στο επίπεδο δεν ταυτίζεται με την κατακόρυφη αφού αυτό είναι κεκλιμένο. Η τροχιά του σώματος είναι πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο άρα δεν επιταχύνεται στην κάθετη όπου πρέπει οι δυνάμεις να ισορροπούν. Σχεδιάζουμε της δυνάμεις




και έχουμε

$$\theta + \varphi = 90^\circ \Rightarrow \sin\theta = \cos\varphi$$
$$N = B_\perp + F_\perp = B\cos\theta + F\cos\varphi = mg\cos\theta + F\sin\theta$$
$$f = \mu N = \mu(mg\cos\theta + F\sin\theta)$$

**Υπολογισμός ροπής**

Έστω ότι εφαρμόζουμε τη δύναμη $\vec{F}$ = (5, 3, -2) N στη θέση $\vec{r}$ = (-2, 1, -3) m. Η ροπή, $\vec{\tau}$, της της δύναμης ως της την αρχή των αξόνων είναι:

A) $\vec{\tau}$ = (7, -19, -11) Nm B) $\vec{\tau}$ = (11, 11, 1) Nm

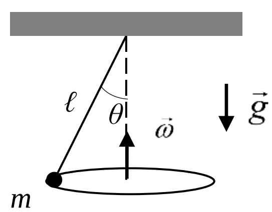
Γ) $\vec{\tau}$ = (-11, -11, -1) Nm Δ) $\vec{\tau}$ = (-7, 19, 11) Nm

**A)** Απλή εφαρμογή του ορισμού της ροπής ως εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 5 & 3 & -2 \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \end{vmatrix} = \hat{x}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + \hat{y}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + \hat{z}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= \hat{x}[1\cdot(-2) - (-3)\cdot 3] - \hat{y}[(-2)\cdot(-2) - (-3)\cdot 5] + \hat{z}[(-2)\cdot 3 - 1\cdot 5] = 7\hat{x} - 19\hat{y} - 11\hat{z} = (7, -19, -11)$$

**Κωνικό εκκρεμές πάλι**

Στο κωνικό εκκρεμές του σχήματος μια μάζα *m* που κρέμεται από αβαρές νήμα μήκους $\ell$, εκτελεί μέσα στο πεδίο βαρύτητας μια ομοιόμορφη κυκλική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. Για τη γωνία, *θ*, που σχηματίζει το νήμα με τον κατακόρυφο άξονα ισχύει:




A) $\cos\theta = \dfrac{g}{\ell\omega^2}$ B) $\sin\theta = \dfrac{g}{\ell\omega^2}$ Γ) $\tan\theta = \dfrac{g}{\ell\omega^2}$ Δ) $\cot\theta = \dfrac{g}{\ell\omega^2}$

**A)**

Κατακόρυφα : $F_{o\lambda,y} = 0 \Rightarrow T\cos\theta - B = 0 \Rightarrow T\cos\theta = mg$

Οριζόντια : $F_{o\lambda,x} = ma_x \Rightarrow T\sin\theta = ma_\kappa \Rightarrow T\sin\theta = m\dfrac{\upsilon^2}{R}$

Διαιρώντας κατά μέλη καταλήγουμε στην εξίσωση :

$$\tan\theta = \frac{\upsilon^2}{gR}$$

Οπότε αντικαθιστώντας $R = \ell \sin\theta$ και $\upsilon = \omega R$ οδηγεί στην απάντηση Α):
$$\tan\theta = \frac{\upsilon^2}{gR} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\omega^2 R}{g} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\omega^2 \ell \sin\theta}{g} \Rightarrow \cos\theta = \frac{g}{\ell\omega^2}.$$

**Θέμα διαστατικής ανάλυσης**

Ένα σώμα μάζας *m* φέρει ένα ελατήριο σταθεράς *k* και αμελητέας μάζας της φαίνεται στο σχήμα και κινείται με σταθερή ταχύτητα *υ* πάνω σ' ένα οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές. Στο τέλος της διαδρομής του υπάρχει της σταθερός τοίχος. Η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου είναι:


Α) $\upsilon\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ Β) $\sqrt{\dfrac{k}{\upsilon m}}$ Γ) $\sqrt{\dfrac{\upsilon k}{m}}$ Δ) $\upsilon\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

**Δ)** Μόνο αυτή η απάντηση έχει διαστάσεις μήκους. Θυμάστε από την περίοδο του απλού αρμονικού ταλαντωτή ότι ο συνδυασμός $\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ έχει διαστάσεις χρόνου $\left[\sqrt{\dfrac{m}{k}}\right] = \mathrm{s}$ και άρα ο $\upsilon\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ θα έχει διαστάσεις μήκους $\left[\upsilon\sqrt{\dfrac{m}{k}}\right] = [\upsilon]\left[\sqrt{\dfrac{m}{k}}\right] = \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\mathrm{s} = \mathrm{m}$

Αλλιώς χρησιμοποιείται την αρχή διατήρησης της ενέργειας καθώς η μόνη δύναμη που ενεργεί οριζόντια, αυτή του ελατηρίου, είναι διατηρητική :
$$E_A = E_B \Rightarrow K_A + U_{sA} = K_B + U_{sB} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x = \upsilon\sqrt{\frac{m}{k}}$$

**Απόσταση ακινητοποίησης με φρενάρισμα**

Δύο πανομοιότυπα σώματα (1 και 2) μάζας *m* και σχήματος παραλληλεπιπέδου ολισθαίνουν πάνω σε δύο διαφορετικά οριζόντια επίπεδα με συντελεστές τριβής ολίσθησης $\mu_1$ και $\mu_2$ αντίστοιχα, για της οποίους ισχύει $\mu_1 = 2\mu_2$ . Αν την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$ τα σώματα αυτά ξεκινούν με αρχικές ταχύτητες $\upsilon_{01}$ και $\upsilon_{02}$ αντίστοιχα, και ισχύει $\upsilon_{01} = 2\upsilon_{02}$, τότε ο λόγος των αποστάσεων $s_1$ και $s_2$ που διανύουν τα σώματα 1 και 2, αντίστοιχα, έως ότου σταματήσουν είναι:

Α) $\dfrac{s_1}{s_2} = 2$ Β) $\dfrac{s_1}{s_2} = \dfrac{1}{2}$ Γ) $\dfrac{s_1}{s_2} = 4$ Δ) $\dfrac{s_1}{s_2} = \dfrac{1}{4}$

**A)** Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας βρίσκουμε την απόσταση που χρειάζεται να ενεργήσει η τριβή για να σταματήσει το σώμα

$$\Delta K = W_f \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m\upsilon_0^2 = -\mu Ns = -\mu mgs \Rightarrow s = \frac{\upsilon_0^2}{2\mu g}$$

Το ίδιο τύπο θα παίρναμε και από κινηματική $s = \dfrac{\upsilon_0^2}{2a}$ αφού :

$$a = F_{o\lambda}/m = f/m = \mu N/m = \mu mg/m = \mu g$$

Άρα :

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\upsilon_{01}^2/2\mu_1 g}{\upsilon_{02}^2/2\mu_2 g} = \left(\frac{\upsilon_{01}}{\upsilon_{02}}\right)^2 \frac{\mu_2}{\mu_1} = 2^2 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

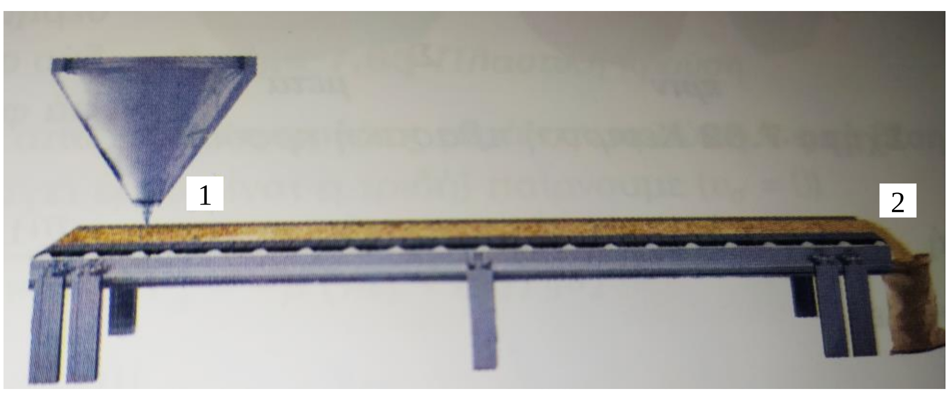
**Ιμάντας**

Ο ιμάντας δέχεται μάζα με ρυθμό $\dfrac{dm_1}{dt}$ και ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1' = 0$ στο σημείο 1 και την αδειάζει με ρυθμό $\dfrac{dm_2}{dt}$ και ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2' = \vec{\upsilon}$ στο σημείο 2. Έστω ότι οι ρυθμοί αυτοί είναι ίσοι, άρα η μάζα του ιμάντα θα παραμένει σταθερή.

$\dfrac{dm_1}{dt} = \dfrac{dm_2}{dt} = \mu$ , εφόσον γεμίσει ο ιμάντας $m = \sigma\tau\alpha\theta$

Ο τύπος που εφαρμόζεται σε σύστημα μεταβλητής μάζας γενικεύεται σε :

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm_1}{dt}(\vec{\upsilon}_1' - \vec{\upsilon}) + \frac{dm_2}{dt}(\vec{\upsilon}_2' - \vec{\upsilon})$$




$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F + \mu(0-\upsilon) + \mu(\upsilon-\upsilon) \Rightarrow m\frac{d\upsilon}{dt} = F - \mu\upsilon$$

Για να κινείται με σταθερή ταχύτητα ο ιμάντας πρέπει να του ασκείται δύναμη

$$0 = F - \mu\upsilon \Rightarrow F = \mu\upsilon$$

Αν σταματήσει να ασκείται αυτή η δύναμη

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=0-\mu\upsilon \Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon}=-\frac{\mu}{m}dt \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon}=-\int_0^t\frac{\mu}{m}dt \Rightarrow \ln\upsilon\Big|_{\upsilon_0}^{\upsilon}=-\frac{\mu}{m}t \Rightarrow$$

$$\upsilon(t)=\upsilon_0 e^{-\frac{\mu}{m}t}$$

ο ιμάντας θα σταματήσει εκθετικά

Αριθμητική εφαρμογή.
Τι δύναμη χρειάζεται για να κινείται ο ιμάντας με ταχύτητα $\upsilon$=2 m/s όταν η μάζα του μαζί με το φορτίο είναι 500 kg και τον φορτώνουμε με ρυθμό $\frac{dm_1}{dt}=\mu=50$ kg/s .
Αν η παραπάνω δύναμη σταματήσει να ασκείται σε πόσο χρονικό διάστημα η ταχύτητα του ιμάντα θα πέσει στο ένα εκατοστό της?

$$F=\mu\upsilon=50\cdot\ 2=100\ \text{N}$$

$$\upsilon(t)=\upsilon_0 e^{-\frac{\mu}{m}t} \Rightarrow \frac{\upsilon_0}{100}=\upsilon_0 e^{-\frac{5}{500}t} \Rightarrow 100=e^{0,01t} \Rightarrow \ln 100=0,01t \Rightarrow$$

$$t=\frac{2\ln 10}{0,01}=469,5\ \text{s}=7\ \text{min}\ 40,5\ \text{s}$$

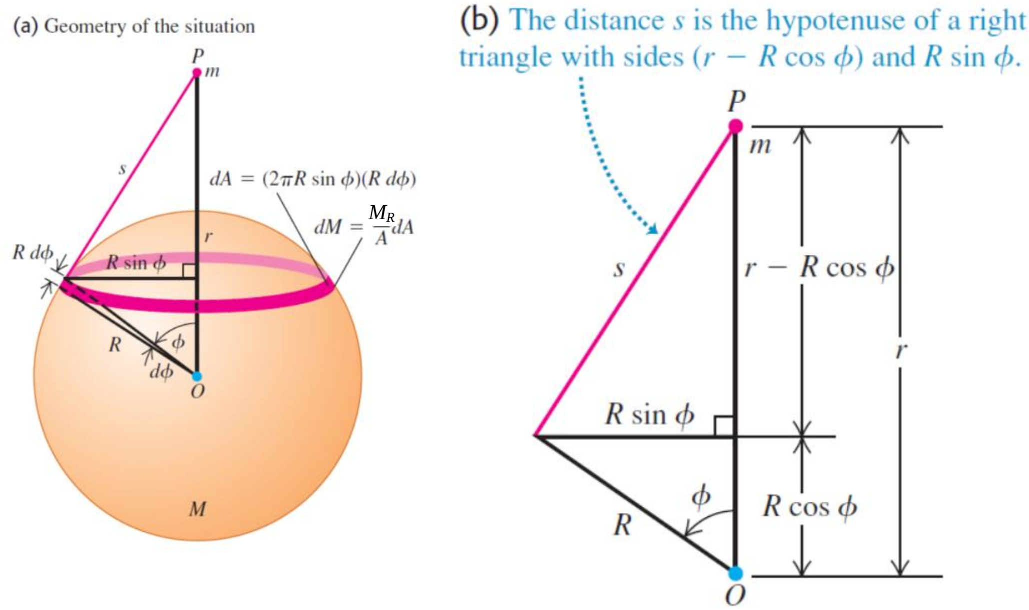
**Σφαιρική κατανομή μάζας**

Μια σφαίρα μάζας $M$ φτιάχνεται από σφαιρικά κελύφη μαζών $M_R$, άρα αρκεί αρχικά να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκεί ένα σφαιρικό κέλυφος και μετά να τα προσθέσουμε όλα.
Υπολογίζουμε το δυναμικό που είναι βαθμωτό για να μην έχουμε να κάνουμε με διανύσματα και μετά βρίσκουμε τη δύναμη από $\vec{F}=-\vec{\nabla}U$
Ένα σφαιρικό κέλυφος φτιάχνεται από κυκλικούς δακτυλίους, οπότε βρίσκουμε τη δυναμική ενέργεια μεταξύ μιας μάζας $m$ και ενός κυκλικού δακτυλίου μάζας $dM$ και μετά προσθέτουμε (ολοκληρώνουμε) τις δυναμικές ενέργειες όλων των δακτυλίων που φτιάχνουν το σφαιρικό κέλυφος.

Ένας δακτύλιος αποτελείται από υλικά σημεία μάζας $m_i$ : $dM=\sum_{i=1}^{\infty}m_i$ (1)

Οι δακτύλιοι βρίσκονται σε επίπεδο κάθετο στην ευθεία που ενώνει τη μάζα $m$ με το κέντρο του σφαιρικού κελύφους.
Όλα τα σημεία του δακτυλίου απέχουν την ίδια απόσταση $s$ από τη μάζα $m$.
Η δυναμική ενέργεια μεταξύ ενός σημείου $m_i$ του δακτυλίου και της μάζας $m$ είναι :

$$U_i=-\frac{Gmm_i}{s} \qquad (2)$$




Η δυναμική ενέργεια $dU$ μεταξύ της μάζας $m$ και ολόκληρου του δακτυλίου μάζας $dM$ βρίσκεται από τον κανόνα της υπέρθεσης, προσθέτοντας όλες τις $U_i$

$$dU = \sum_{i=1}^{\infty} U_i = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{Gmm_i}{s} = -\frac{Gm}{s}\sum_{i=1}^{\infty} m_i = -\frac{GmdM}{s} \qquad (3)$$

Για να βρούμε τη μάζα $dM$ του δακτυλίου χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το σφαιρικό κέλυφος είναι ομογενές και άρα η μάζα του δακτυλίου θα είναι ανάλογη με το εμβαδόν του :

$$dM = \sigma dA = \frac{M_R}{A} dA \qquad (4)$$

όπου $\sigma = M_R/A$ η επιφανειακή πυκνότητα μάζας του κελύφους [kg/m$^2$] με $M_R$ τη συνολική μάζα του κελύφους και $A = 4\pi R^2$ το εμβαδόν του.

Η ακτίνα του δακτυλίου είναι $R\sin\varphi$ και άρα η περίμετρός του είναι $2\pi R\sin\varphi$. Αυτό είναι το μήκος του. Το πλάτος του δακτυλίου είναι $Rd\varphi$. Το εμβαδόν του δακτυλίου είναι (μήκος x πλάτος) : $dA = (2\pi R\sin\varphi)(Rd\varphi) = 2\pi R^2 \sin\varphi d\varphi \qquad (5)$

Άρα η μάζα του δακτυλίου είναι

$$dM = \frac{M_R}{4\pi R^2} 2\pi R^2 \sin\varphi d\varphi = \frac{M_R}{2}\sin\varphi d\varphi \qquad (6)$$

Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση στην δυναμική ενέργεια $dU$ έχουμε τελικά :

$$dU = -\frac{GmM_R}{2}\frac{\sin\varphi d\varphi}{s} \qquad (7)$$

Για να ολοκληρώσουμε αυτή την έκφραση πρέπει να βρούμε πως συνδέονται οι μεταβλητές $s$ και $\varphi$. Από γεωμετρία (Πυθαγόρειο θεώρημα) :

$$s^2 = (r - R\cos\varphi)^2 + (R\sin\varphi)^2 = r^2 - 2rR\cos\varphi + R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi \Rightarrow$$

$$s^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\varphi \qquad (8)$$

Όταν η γωνία $\varphi$ μεταβάλλεται από 0 έως π, η απόσταση $s$ μεταβάλλεται από $r - R$ έως $r + R$. Το πως συνδέονται οι μεταβολές τους το βρίσκουμε παραγωγίζοντας. Έτσι παίρνουμε

$$\frac{d}{d\varphi}(s^2) = \frac{d}{d\varphi}(r^2 + R^2 - 2rR\cos\varphi) \Rightarrow 2s\frac{ds}{d\varphi} = 2rR\sin\varphi$$

$$\sin\varphi d\varphi = \frac{sds}{rR} \qquad (9)$$

το οποίο αντικαθιστούμε στην (7) για να πάρουμε

$$dU = -\frac{GmM_R}{2}\frac{1}{s}\frac{sds}{rR} \Rightarrow dU = -\frac{GmM_R}{2rR}ds \qquad (10)$$

Αυτή η έκφραση μπορεί τώρα να ολοκληρωθεί εύκολα για μας δώσει τη δυναμική ενέργεια μεταξύ της μάζας $m$ που βρίσκεται σε απόσταση $r$ από το κέντρο ομογενούς σφαιρικού κελύφους μάζας $M_R$ και ακτίνας $R$:

$$U(m,r,M_R,R) = \int_{r-R}^{r+R} dU = -\frac{GmM_R}{2rR}\int_{r-R}^{r+R} ds \qquad (11)$$

Κάνοντας το απλό ολοκλήρωμα παίρνουμε

$$U(m,r,M_R,R) = -\frac{GmM_R}{2rR}\int_{r-R}^{r+R} ds = -\frac{GmM_R}{2rR}\Big[\left(r+R\right)-\left(r-R\right)\Big] = -\frac{GmM_R}{2rR}2R$$

$$U_{\varepsilon\xi\ \sigma\varphi\ \kappa\varepsilon\lambda}(m,r,M_R,R) = -\frac{GmM_R}{r} \qquad (12)$$

Παρατηρούμε ότι η δυναμική ενέργεια δεν εξαρτάται από την ακτίνα $R$ του κελύφους και είναι ίση με τη δυναμική ενέργεια δύο υλικών σημείων μάζας $m$ και $M$.

Για να βρούμε την δυναμική ενέργεια της μάζας $m$ με όλη τη σφαίρα προσθέτουμε τις δυναμικές ενέργειες με όλα τα κελύφη μάζας $M_R$ που φτιάχνουν τη σφαίρα ακτίνας $R_{\sigma\varphi}$ και μάζας $M = \sum_R M_R$

$$U_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho\alpha}(m,r,M,R_{\sigma\varphi}) = \sum_{R=0}^{R=R_{\sigma\varphi}} U_{\varepsilon\xi\ \sigma\varphi\ \kappa\varepsilon\lambda}(m,r,M_R,R) = -\frac{Gm}{r}\sum_{R=0}^{R=R_{\sigma\varphi}} M_R \Rightarrow \qquad (13)$$

$$U_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho\alpha}(m,r,M,R_{\sigma\varphi}) = -\frac{GmM}{r} \qquad (14)$$

Η δυναμική ενέργεια μεταξύ υλικού σημείου $m$ που βρίσκεται σε απόσταση $r$ από το κέντρο σφαίρας $M$ είναι ίδια με τη δυναμική ενέργεια δύο υλικών σημείων $m$ και $M$ σε απόσταση $r$.

Άρα και η δύναμη μεταξύ τους θα είναι ίδια. Πράγματι αν την υπολογίσουμε παίρνουμε

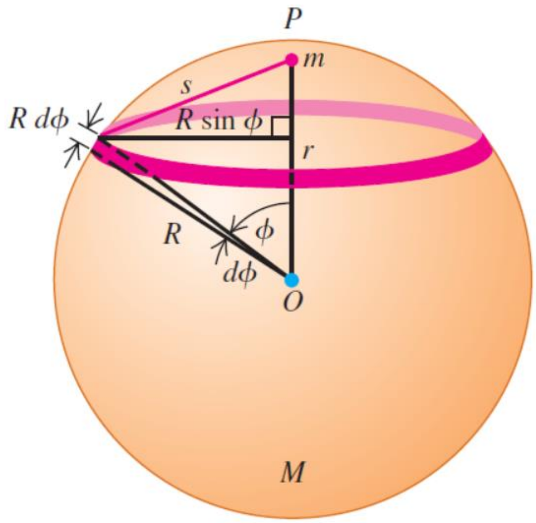
$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(-\frac{GmM}{r}\right) = GmM\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\hat{r} \Rightarrow$$

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{r}$$

**Δύναμη στο εσωτερικό σφαιρικού κελύφους**

Έχοντας όλη την παραπάνω ανάλυση έτοιμη μπορούμε να εξάγουμε πάλι το γνωστό αποτέλεσμα ότι η δύναμη που ασκεί ένα σφαιρικό κέλυφος σε μια μάζα στο εσωτερικό του είναι ίση με μηδέν. Αρκεί να δείξουμε ότι η δυναμική ενέργεια στο εσωτερικό του κελύφους είναι σταθερή. Αφού η δύναμη είναι η βαθμίδα (παράγωγος) της δυναμικής ενέργειας τότε η δύναμη θα είναι μηδέν.

Όταν βρισκόμαστε στο εσωτερικό του κελύφους η παραπάνω ανάλυση ακολουθεί την ίδια ακριβώς πορεία και όλες οι εξισώσεις είναι ακριβώς ίδιες μέχρι και την εξίσωση (10). Η μόνη αλλαγή γίνεται στα όρια της ολοκλήρωσης στην εξίσωση (11). Επειδή τώρα βρισκόμαστε στο εσωτερικό του κελύφους τα όρια του $s$ είναι από $R - r$ (όταν η γωνία $\varphi$ είναι ίση με 0) έως $R + r$ (όταν η γωνία $\varphi$ είναι ίση με π).




$$U(m,r,M,R) = \int_{R-r}^{R+r} dU = -\frac{GmM}{2rR}\int_{R-r}^{R+r} ds = -\frac{GmM}{2rR}\Big[(R+r)-(R-r)\Big] = -\frac{GmM}{2rR}2r$$

$$U_{\varepsilon\sigma\ \sigma\varphi\ \kappa\varepsilon\lambda}(m,r,M,R) = -\frac{GmM}{R} = \sigma\tau\alpha\theta$$