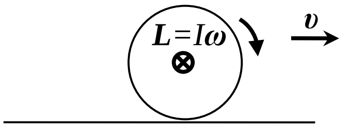
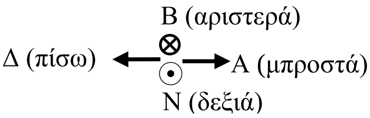
Κατανόησης μεγεθών – Μετατροπής μονάδων κλπ.

7. Ένα αυτοκίνητο κινείται προς την Ανατολή. Η στροφορμή του δεξιού μπροστινού τροχού έχει κατεύθυνση προς

Α) τα κάτω Β) τη Δύση Γ) το Βορρά Δ) το Νότο

7. Γ) Όλοι οι τροχοί έχουν στροφορμή (από τον κανόνα του δεξιού χεριού) προς το Βορρά (προς τα αριστερά σχετικά με την ταχύτητα του αυτοκινήτου).





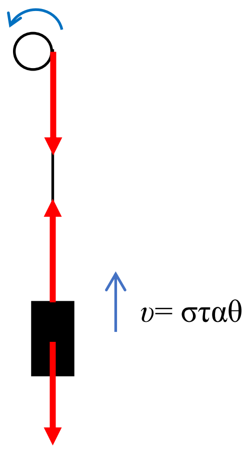
21. Μετράμε σε ένα συνεργείο τη ροπή ενός κινητήρα στις 6000 rpm (στροφές το λεπτό). Αν η ροπή του είναι 300 Nm πόση είναι η ισχύς του (1hp≈3/4 kW)

Α) 640π hp Β) 2400 hp Γ) 30 hp Δ) 80π hp

21. Δ) $P = \tau\omega = \tau 2\pi f = 300\text{Nm}\cdot 2\pi \cdot \dfrac{6000}{60\text{s}} = 60\pi\ \text{kW} = 60\pi \dfrac{4}{3}\ \text{hp} = 80\pi\ \text{hp}$

Ταχύτητα κινητήρα

Κινητήρας συνεχούς ρεύματος ανεβάζει φορτίο μάζας M=500 kg με σταθερή ταχύτητα. Ο άξονας του κινητήρα έχει ακτίνα r= 0,1 m. Η τάση εισόδου του κινητήρα είναι V=200 V ενώ τραβάει ρεύμα I=10 A. Με τι ταχύτητα n σε στροφές ανά λεπτό (rpm) περιστρέφεται ο άξονας του κινητήρα;



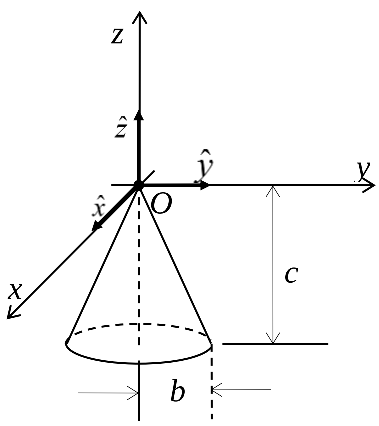
Α) 4 rpm
Β) 14 rpm
Γ) 26 rpm
Δ) 38 rpm

Δ) 38 rpm

$$P_{in} = P_{out} \Rightarrow P_{\eta\lambda} = P_{\mu\eta\chi} \Rightarrow VI = \tau\omega \Rightarrow \omega = \frac{VI}{\tau} = \frac{VI}{Mgr} = \frac{200\cdot 10}{500\cdot 10\cdot 0{,}1} = 4 \text{ rad/s}$$

$$n = \frac{60}{2\pi}\omega = \frac{60\cdot 4}{2\pi} = 38{,}2 \text{ rpm}$$

44.



Στερεός ομογενής κώνος αναρτάται από την κορυφή του στην αρχή των αξόνων. Τα $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στους αντίστοιχους άξονες και τα a,b,c είναι σταθερές. Ποια από τις ακόλουθες δυνάμεις $\vec{F}$ αν εφαρμοστεί στο αντίστοιχο σημείο *P* της ακμής της βάσης του κώνου θα προκαλέσει στον κώνο ροπή $\vec{\tau}$ με αρνητική συνιστώσα τ_z ;

Α) δύναμη $\vec{F} = a\hat{z}$, στο σημείο $P \ (0,b,-c)$

Β) δύναμη $\vec{F} = -a\hat{z}$, στο σημείο $P \ (0,-b,-c)$

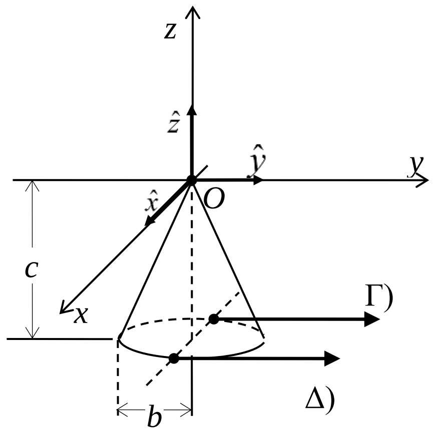
Γ) δύναμη $\vec{F} = a\hat{y}$ στο σημείο $P \ (-b,0,-c)$

Δ) δύναμη $\vec{F} = a\hat{y}$ στο σημείο $P \ (b,0,-c)$

Ε) δύναμη $\vec{F} = -a\hat{z}$ στο σημείο $P \ (-b,0,-c)$

44. Γ)

Οι Α), Β), Ε) απορρίπτονται απευθείας αφού είναι παράλληλες με τον άξονα $\hat{z}$ και άρα δεν μπορούν να προκαλέσουν ροπή γύρω από αυτόν.



Τοποθετούμε τις δυνάμεις στο αντίστοιχο σημείο και βλέπουμε ότι αρνητική ροπή στον άξονα *z* (ωρολογιακή) προκαλείται στην περίπτωση Γ)

Αν γνωρίζεται το εξωτερικό γινόμενο μπορείτε να κάνετε και τις πράξεις

$\vec{\tau} = \vec{r}_\Gamma \times \vec{F}_\Gamma = (-b\hat{x} - c\hat{z}) \times a\hat{y} = -ba\hat{x} \times \hat{y} - ca\hat{z} \times \hat{y} = -ab\hat{z} + ca\hat{x}$

$\vec{\tau} = \vec{r}_\Delta \times \vec{F}_\Delta = (b\hat{x} - c\hat{z}) \times a\hat{y} = ba\hat{x} \times \hat{y} - ca\hat{z} \times \hat{y} = ab\hat{z} + ca\hat{x}$

αφού $\hat{x} \times \hat{y} = -\hat{y} \times \hat{x} = \hat{z}$, $\hat{y} \times \hat{z} = -\hat{z} \times \hat{y} = \hat{x}$ από τον κανόνα του δεξιού χεριού όπως είναι προφανές από το σχήμα

45.

Κύλινδρος κυλάει χωρίς να ολισθαίνει, με σταθερή ταχύτητα υ σε οριζόντιο επίπεδο. Τη στιγμή που ένα σημείο της περιμέτρου του έρχεται σε επαφή με το δάπεδο, η επιτάχυνσή του σημείου:

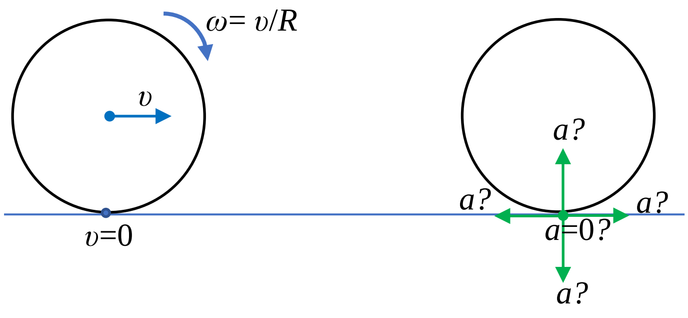
Α. έχει φορά προς τα μπροστά

Β. έχει φορά προς τα πίσω

Γ. έχει φορά προς τα πάνω

Δ. έχει φορά προς τα κάτω

Ε. είναι ίση με μηδέν



45. Γ)

Το σώμα εκτελεί μεταφορική ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και ομαλή στροφική κίνηση γύρω από το CM: $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{μεταφ} + \vec{\upsilon}_{περιστρ} \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_{μεταφ} + \vec{a}_{περιστρ}$. Η πρώτη κίνηση, η μεταφορική, δεν έχει επιτάχυνση. Η δεύτερη έχει μόνο κεντρομόλο επιτάχυνση με φορά προς το κέντρο του κύκλου δηλ. το CM, που τη στιγμή της επαφής είναι προς τα πάνω.

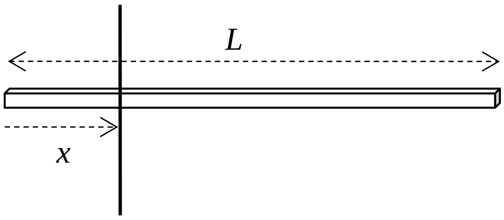
Για τον υπολογισμό της κεντρομόλου επιτάχυνσης της περιστροφικής κίνησης πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την γραμμική ταχύτητα της περιστροφικής κίνησης $\upsilon_{γραμ}= \omega R$ και όχι την ολική ταχύτητα της κίνησης που εκείνη τη στιγμή είναι μηδέν και άρα θα δώσει κεντρομόλο μηδέν. Αν χρησιμοποιήσουμε την ολική ταχύτητα θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε και την «ολική» τροχιά, την κυκλοειδή. Τη στιγμή της επαφής δεν υπάρχει κεντρομόλος επιτάχυνση πάνω στην κυκλοειδή αλλά μόνο εφαπτομενική που είναι κατακόρυφη προς τα πάνω.

Ροπές αδράνειας

Υπολογισμοί ροπών αδρανείας

Στα λεπτά μονοδιάστατα (ράβδοι, στεφάνια) ή δυσδιάστατα σχήματα (επίπεδα, φλοιοί) η πυκνότητα μάζας θα είναι είτε γραμμική μ είτε επιφανειακή σ και η στοιχειώδης μάζα θα γράφεται ως $dm = \mu dr$ *ή* $dm = \sigma dA$

Ομογενής λεπτή ράβδος μάζας M και μήκους L ($\mu = M/L$) από κάθετο άξονα που απέχει απόσταση x από το ένα άκρο της :



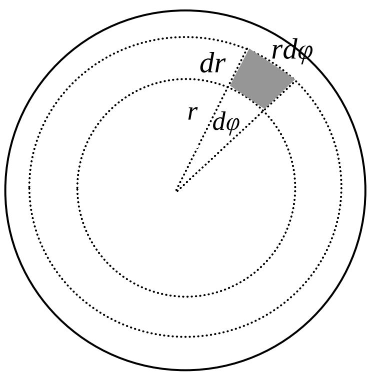
$$I = \int_M r^2 dm = \mu \int_{-x}^{L-x} r^2 dr = \frac{M}{L}\int_{-x}^{L-x} r^2 dr = \frac{M}{L}\left.\frac{r^3}{3}\right|_{-x}^{L-x} = \frac{M}{3L}\left[L^3 - 3xL^2 + 3x^2L - x^3 - (-x)^3\right] \Rightarrow$$

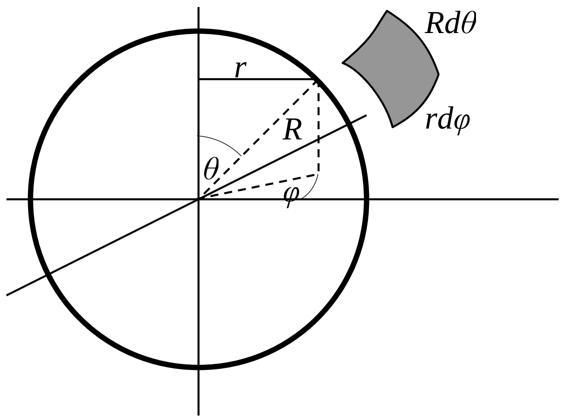
$$I = \frac{M}{3}\left[L^2 - 3xL + 3x^2\right]$$

Από το άκρο της $x = 0$: $I = \frac{1}{3}ML^2$ Από το μέσο της $x = \frac{L}{2}$: $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$

Ομογενής δίσκος μάζας M και ακτίνας R ($\sigma = M/\pi R^2$)

$$I_{CM} = \int_M r^2 dm = \int_A r^2 \sigma dA = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2 \cdot r d\varphi dr = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R \Rightarrow \quad I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$$





Ομογενής σφαιρικός φλοιός μάζας Μ και ακτίνας R ($\sigma = M/4\pi R^2$) :

Από το σχήμα $r = R\sin\theta$ και $dA = rd\varphi \cdot Rd\theta = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = R^2 d\Omega$

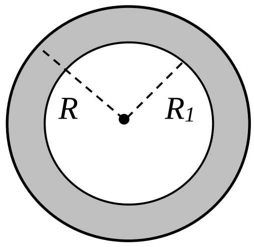
$$I_{CM} = \int_M r^2 dm = \int_A r^2 \sigma dA = \frac{M}{4\pi R^2} \int_\Omega (R\sin\theta)^2 R^2 d\Omega = \frac{MR^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^2\theta \sin\theta d\theta$$

Ολοκλήρωμα: $\int_0^\pi \sin^2\theta \sin\theta d\theta = -\int_0^\pi (1-\cos^2\theta) d(\cos\theta) = -\int_1^{-1} (1-x^2) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$

Οπότε : $I_{CM} = \frac{MR^2}{4\pi} 2\pi \frac{4}{3} \Rightarrow I_{CM} = \frac{2}{3} MR^2$

Ομογενής επίπεδος δακτύλιος μάζας Μ και ακτίνων R_1<R_2 ($\sigma = M/\pi(R_2^2 - R_1^2)$)

Όπως και για το δίσκο μόνο που τα όρια της ολοκλήρωσης είναι από R_1 ως R_2 :

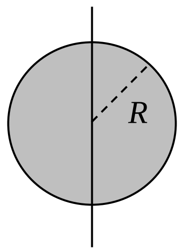


$$I_{CM} = \int_M r^2 dm = \int_A r^2 \sigma dA = \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot rd\varphi dr = \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} 2\pi \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^R \Rightarrow$$

$$I_{CM} = \frac{M}{2(R_2^2 - R_1^2)} (R_2^4 - R_1^4) \Rightarrow \ I_{CM} = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$$

Κυκλικός δίσκος γύρω από διάμετρό του

Με τον τύπο των λεπτών πλακών.



Ξέρουμε την $I_{CM} = I_z = \frac{1}{2} mR^2$ και ψάχνουμε την I_x ή την I_y. Όμως από συμμετρία $I_x = I_y = I'_{CM}$ οπότε ο τύπος των λεπτών πλακών δίνει :

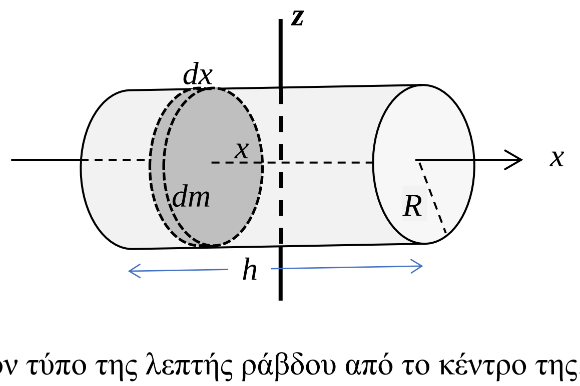
$$I_z = I_x + I_y \Rightarrow \frac{1}{2} mR^2 = 2I'_{CM} \Rightarrow I'_{CM} = \frac{1}{4} mR^2$$

Ομογενής κύλινδρος γύρω από το κέντρο του από άξονα z παράλληλο με τις βάσεις του.

Θεωρούμε τον κύλινδρο ως ένα σύνολο από λεπτούς κυκλικούς δίσκους. Θα χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα και τον τύπο των παράλληλων αξόνων (Steiner).

$$I'_{CM} = \int dI_{\delta\iota\sigma\kappa} = \int \left(\frac{1}{4} R^2 + x^2 \right) dm = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{1}{4} R^2 + x^2 \right) \rho A dx = \frac{1}{4} R^2 \rho A x\Big|_{-h/2}^{h/2} + \rho A \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-h/2}^{h/2} \Rightarrow$$

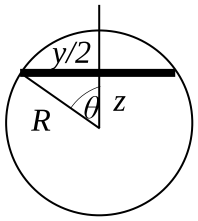
$$I'_{CM} = \frac{1}{4} R^2 \rho A h + \rho A \frac{1}{3} \frac{2h^3}{8} \Rightarrow I'_{CM} = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mh^2$$

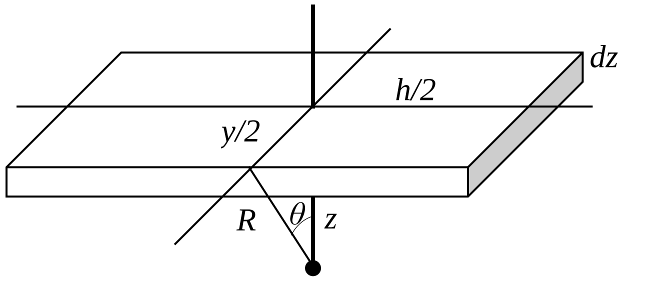


Για $R \to 0$ παίρνουμε τον τύπο της λεπτής ράβδου από το κέντρο της.

Για $h \to 0$ παίρνουμε τον τύπο του κυκλικού δίσκου γύρω από μια διάμετρό του.

Το ίδιο αποτέλεσμα λαμβάνουμε και με άλλο τρόπο. Θεωρούμε τον κύλινδρο ως άθροισμα ορθογώνιων πλακών :





Η ροπή της κάθε οριζόντιας πλάκας γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδό της ο οποίος περνάει από το κέντρο της είναι : $dI = \frac{1}{12} dm\left(y^2 + h^2\right) = \frac{1}{12}\rho y h\left(y^2 + h^2\right)dz$

Όλες οι πλάκες έχουν μήκος h αλλά το πλάτος τους y διαφέρει. Από πλάτος $2R$ στο κέντρο έως πλάτος 0 στην κορυφή είναι ο μισός κύλινδρος. Προς τα κάτω, από 0 ως $2R$ είναι ο υπόλοιπος μισός. Τα δύο μισά έχουν την ίδια ροπή αδρανείας λόγω συμμετρίας. Μαθηματικώς το ολοκλήρωμα είναι το ίδιο ή αλλιώς επειδή μιλάμε για αδρανειακές ιδιότητες δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ πάνω και κάτω

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow y^2 = 4(R^2 - z^2) = 4R^2\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) = 4R^2(1 - \cos^2\theta) \Rightarrow$$

$$y = 2R\sin\theta, \qquad z = R\cos\theta \Rightarrow dz = -R\sin\theta d\theta = -\frac{y}{2}d\theta$$

$$I = 2\int_0^{1/2} dI = 2\int_0^{m/2}\frac{1}{12}dm\left(y^2 + h^2\right) = 2\int_0^R \frac{1}{12}\rho y h\left(y^2 + h^2\right)dz = \frac{\rho h}{6}\int_0^R y^3 dz + \frac{\rho h^3}{6}\int_0^R y dz \Rightarrow$$

$$I = -\frac{\rho h}{6}\int_{\pi/2}^{0} y^3\frac{y}{2}d\theta - \frac{\rho h^3}{6}\int_{\pi/2}^{0} y\frac{y}{2}d\theta = \frac{4\rho h R^4}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta d\theta + \frac{\rho h^3 R^2}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta$$

Τα ολοκληρώματα υπολογίζονται εύκολα μέσω των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων της διπλάσιας γωνίας :

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\ ,\ \cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

και του βασικού ολοκληρώματος

$$\int_0^{\pi/2}\cos(n\theta)d\theta = \left.\frac{\sin(n\theta)}{n}\right|_0^{\pi/2} = \frac{\sin(n\pi/2)}{n} \Rightarrow \begin{cases} = 0 & \text{για } n = 2k \text{ άρτιο} \\ = (-1)^k/n & \text{για } n = 2k+1 \text{ περιττό} \end{cases}$$

Έτσι έχουμε $\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{1 - \cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta d\theta = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{4} - \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos^2 2\theta}{4}\right)d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{8} - 0 + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1 + \cos 4\theta}{2}\right)d\theta = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} = \frac{3\pi}{16}$$

Οπότε παίρνουμε για τη ροπή αδρανείας

$$I = \frac{4\rho h R^4}{3}\frac{3\pi}{16} + \frac{\rho h^3 R^2}{3}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}(\rho\pi R^2 h)R^2 + \frac{1}{12}(\rho\pi R^2 h)h^2 \Rightarrow \qquad I = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2$$

το ίδιο αποτέλεσμα με πριν.

Κύλινδρος γύρω από μια διάμετρο της βάσης του.

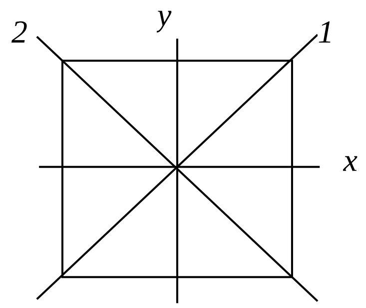
Από το προηγούμενο αποτέλεσμα και τον τύπο των παράλληλων αξόνων έχουμε:

$$I=\left(\frac{1}{4}mR^2+\frac{1}{12}mh^2\right)+m\left(\frac{h}{2}\right)^2=\frac{1}{4}mR^2+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)mh^2\Rightarrow \qquad I=\frac{1}{4}mR^2+\frac{1}{3}mh^2$$

Για $R\rightarrow 0$ παίρνουμε τον τύπο της λεπτής ράβδου από το άκρο της.
Για $h\rightarrow 0$ παίρνουμε τον τύπο του κυκλικού δίσκου γύρω από μια διάμετρό του.

Τετράγωνο γύρω από διαγώνιό του

Δείξτε ότι η ροπή αδρανείας γύρω από μια διαγώνιο (I_δ) είναι ίση με τη ροπή αδρανείας γύρω από το μέσο μιας πλευράς (I_π) $I_\delta = I_\pi$. Πάλι με τον τύπο των λεπτών πλακών και συμμετρία.

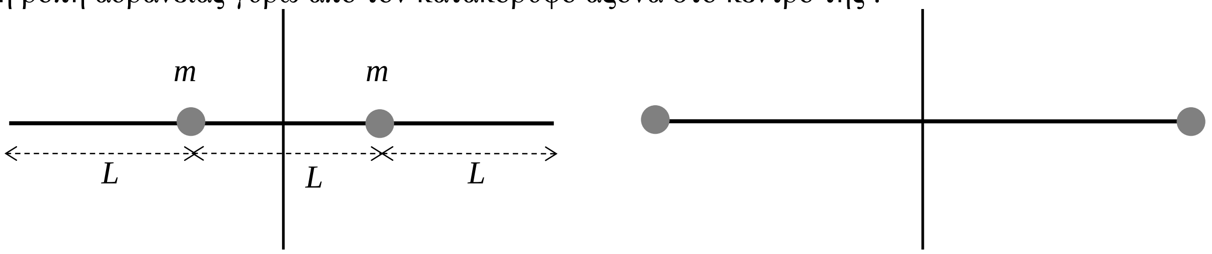


Συμμετρία : $I_x = I_y \equiv I_\pi$ και $I_1 = I_2 \equiv I_\delta$

Τύπος λεπτών πλακών : $I_z = I_x + I_y$ και $I_z = I_1 + I_2$

Οπότε $I_x + I_y = I_1 + I_2 \Rightarrow 2I_\pi = 2I_\delta \Rightarrow I_\delta = I_\pi = \frac{1}{12}ma^2$

1. Η ράβδος είναι αβαρής και οι μάζες θεωρούνται σημειακές. Όταν οι μάζες τοποθετηθούν στα άκρα της η ροπή αδρανείας γύρω από τον κατακόρυφο άξονα στο κέντρο της :



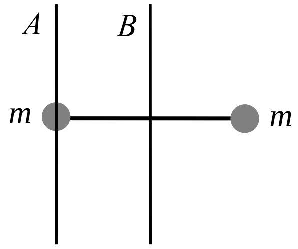
Α) διπλασιάζεται Β) τριπλασιάζεται
Γ) τετραπλασιάζεται Δ) εννεαπλασιάζεται

1. Δ) $I=2m\left(\frac{L}{2}\right)^2=\frac{mL^2}{2}$**,** $I'=2m(\frac{3L}{2})^2=\frac{9mL^2}{2}=9I$

2. Ποιος από τους παρακάτω τροχούς που έχουν την ίδια μάζα και ακτίνα έχει τη μεγαλύτερη ροπή αδρανείας ;

2. Γ) Αυτός που έχει τη μάζα κατανεμημένη πιο μακριά από το κέντρο του

3. Η ράβδος είναι αβαρής και οι μάζες θεωρούνται σημειακές. Η ροπές αδρανείας γύρω από τους άξονες *A* και *B* συνδέονται με τη σχέση

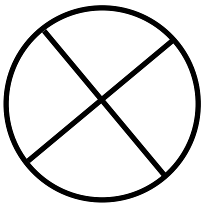


Α) $I_A = I_B$ Β) $2I_A = I_B$ Γ) $I_A = 2I_B$ Δ) $2I_A = 3I_B$

3. Γ) $I_B = m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = m\frac{\ell^2}{2}$, $I_A = m\ell^2 = 2I_B$

Ο άξονας Β περνάει από το CM : $I_A = I_B + (2m)d^2 = m\frac{\ell^2}{2} + 2m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = m\frac{\ell^2}{2} + m\frac{\ell^2}{2} = m\ell^2 = 2I_B$

8. Ο τροχός του παρακάτω σχήματος είναι κατασκευασμένος από ομογενές υλικό και έχει ακτίνα *R* και μάζα *M*. Η ροπή αδρανείας ως προς το κέντρο του είναι $I = aMR^2$ όπου το *a* ισούται με :



Α) $\frac{7}{18}$ Β) $\frac{\pi + 2/3}{\pi + 2}$ Γ) $\frac{1}{\pi + 2}$ Δ) $\frac{1}{3}$

8. Β) Η γραμμική πυκνότητα του τροχού θα είναι η μάζα του προς το συνολικό μήκος των μερών του : $\mu = \frac{M}{2\pi R + 4R} = \frac{M}{2(\pi + 2)R}$

Η ροπή αδρανείας του θα είναι το άθροισμα της ροπής αδρανείας της περιμέτρου συν τις ροπές αδρανείας των δύο διαμέτρων :

$$I = I_\pi + 2I_\delta = m_\pi R^2 + 2\cdot\frac{1}{12}m_\delta\left(2R\right)^2 = \mu 2\pi R\cdot R^2 + \frac{2}{3}\mu 2R\cdot R^2$$

$$= 2\mu R\left(\pi + \frac{2}{3}\right)\cdot\ R^2 = \frac{2MR}{2(\pi+2)R}\left(\pi + \frac{2}{3}\right)\cdot\ R^2 = \frac{\pi + 2/3}{\pi + 2}MR^2$$

Γενικά, η ροπή αδρανείας ενός ομογενούς τροχού με *n* ακτίνες θα είναι

$I = \kappa mR^2$ με $\kappa = \frac{\pi + n/3}{\pi + n} < 1$

9. Κυκλική στεφάνη κρέμεται από σημείο της περιφέρειάς της. Η ροπή αδρανείας της ως προς αυτό το σημείο σε σχέση με τη ροπή αδρανείας από το κέντρο της συνδέονται με τη σχέση

Α) $I_{\pi\varepsilon\rho} = 2I_\kappa$ Β) $I_{\pi\varepsilon\rho} = \pi I_\kappa$ Γ) $I_{\pi\varepsilon\rho} = I_\kappa$ Δ) $I_{\pi\varepsilon\rho} = 5I_\kappa/4$

9. Α) Τύπος παράλληλων αξόνων με *d*=*R*: $I_{\pi\varepsilon\rho} = I_\kappa + md^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2 = 2I_\kappa$

10. Δύο ίδια ομογενή σύρματα λυγίζονται το πρώτο σε κύκλο και το δεύτερο σε ισόπλευρο τρίγωνο. Ο λόγος των ροπών αδρανείας τους I_κ/I_τ είναι : (οι ροπές αδρανείας υπολογίζονται ως προς το κέντρο μάζας κάθε σχήματος) :

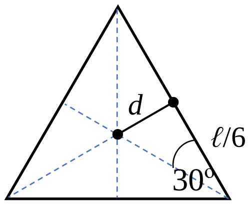
Α) $\frac{27}{2\pi^2}$ Β) $\frac{37}{4\pi^2}$ Γ) $\frac{7\pi^2}{81}$ Δ) $\frac{5\pi^2}{8^2}$

10. Α) Απλώς διαλέγεται τη μοναδική απάντηση που είναι μεγαλύτερη από τη μονάδα ($\pi^2 \approx 10$). Ο λόγος είναι ότι από όλα τα σχήματα που έχουν ίση περίμετρο ο κύκλος καλύπτει τη μέγιστη επιφάνεια και άρα τα σημεία του θα βρίσκονται κατά μέσο όρο πιο μακριά από το κέντρο από ότι του τριγώνου. Βοηθάει επίσης να αποκλείσετε δύο απαντήσεις το γεγονός ότι το π^2 θα εμφανιστεί στον παρονομαστή αφού $R = \ell/2\pi$. Αλλιώς κάνετε τις πράξεις

$$I_\kappa = mR^2 = m\left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{4\pi^2}m\ell^2$$

$$I_\tau = 3\left[I_{\rho\alpha\beta\delta} + \frac{m}{3}d^2\right] = 3\left[\frac{1}{12}\frac{m}{3}\left(\frac{\ell}{3}\right)^2 + \frac{m}{3}\left(\tan 30^\circ \frac{\ell}{6}\right)^2\right] = 3\left[\frac{1}{12}\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{6}\right)^2\right]m\ell^2 = \dots = \frac{1}{54}m\ell^2$$

$$\frac{I_\kappa}{I_\tau} = \frac{1/4\pi^2}{1/54} = \frac{27}{2\pi^2}$$



13. Η ροπή αδρανείας ενός οπτικού δίσκου (CD) πολύ μικρού πάχους d, εσωτερικής ακτίνας r , εξωτερικής ακτίνας R και μάζας M, ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του είναι $I = M\left(R^2 + r^2\right)/2$. Η ροπή αδρανείας ως προς μια διάμετρό του από το κέντρο του είναι :

Α) $\frac{M}{4}\left(R^2 + r^2\right)$ Β) $\frac{M}{2}\left(R^2 - r^2\right)$

Γ) $\frac{M}{8d\left(R - r\right)}\left(R^4 - r^4\right)$ Δ) $\frac{M}{4d^2}\left(R^4 - r^4\right)$

13. Α) Από συμμετρία : $I_x = I_y$. Από τύπο λεπτών πλακών : $I_z = I_x + I_y$. Οπότε

$$I_x = I_z/2 = M\left(R^2 + r^2\right)/4$$

14. Η ροπή αδρανείας ενός λεπτού ομογενούς μπαστουνιού μάζας M και μήκους ℓ γύρω από άξονα κάθετο σε αυτό και σε απόσταση d από το ένα άκρο του είναι :

Α) $M\left(\frac{1}{3}\ell^2 + d^2\right)$ Β) $M\left(\frac{13}{12}\ell^2 - 2\ell d + d^2\right)$

Γ) $\frac{M}{12}\left(7\ell^2 - 12\ell d + 12d^2\right)$ Δ) $\frac{M}{3}\left(\ell^2 - 3\ell d + 3d^2\right)$

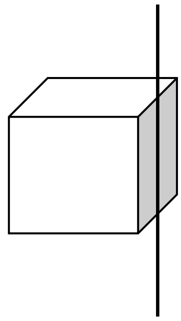
14. Δ) Είτε με απευθείας ολοκλήρωση όπως στα λυμένα παραδείγματα, είτε από το Θεώρημα παράλληλων αξόνων του Steiner $I = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2} - d\right)^2$, είτε εξετάζοντας τα όρια d=0 και d=ℓ (ο άξονας στο άκρο) που πρέπει να δώσουν: $I = \frac{1}{3}M\ell^2$ και το όριο d=ℓ/2 (ο άξονας στο κέντρο) που πρέπει να δώσει: $I = \frac{1}{12}M\ell^2$.

22. Η ροπή αδρανείας ομογενούς λεπτού κυκλικού δίσκου ακτίνας *R* και μάζας *M* ως προς μια διάμετρό του είναι :

Α) $\frac{1}{12}MR^2$ Β) $\frac{1}{4}MR^2$ Γ) $\frac{1}{3}MR^2$ Δ) $\frac{1}{2}MR^2$

22. Γ) Από συμμετρία $I_x = I_y$ ενώ $I_z = \frac{1}{2}MR^2$ έτσι από τύπο λεπτών πλακών $I_z = I_x + I_y$ παίρνουμε $\frac{1}{2}MR^2 = 2I_x$

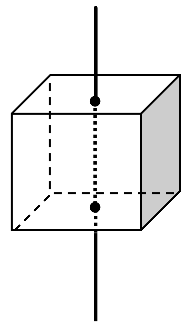
23. Η ροπή αδρανείας ομογενούς κύβου ακμής *a* και μάζας *M* ως προς άξονα παράλληλο και από το μέσο μίας πλευράς του είναι



Α) $\frac{1}{12}Ma^2$ Β) $\frac{1}{6}Ma^2$

Γ) $\frac{1}{3}Ma^2$ Δ) $\frac{5}{12}Ma^2$

23. Δ) Αν ο άξονας περνούσε από το κέντρο της πλευράς η ροπή αδρανείας θα ήταν ότι και για μια επίπεδη πλάκα. Το ίδιο συμβαίνει με το δίσκο που έχει ίδια ροπή αδρανείας με τον κύλινδρο $MR^2/2$ ή την επίπεδη πλάκα που έχει ίδια ροπή αδρανείας με μια ράβδο από το μέσο της $M\ell^2/12$.

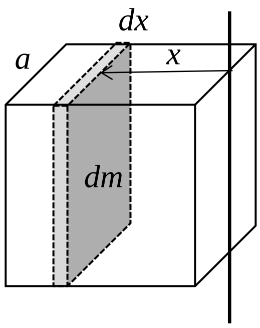


Η ροπή αδρανείας επίπεδης πλάκας σε άξονα κάθετο στο κέντρο της είναι από τον τύπο των κάθετων αξόνων $I_z = I_x + I_y = \frac{1}{12}Ma^2 + \frac{1}{12}Ma^2 = \frac{1}{6}Ma^2$**.** Αυτή είναι και η ροπή αδρανείας του κύβου ως προς το κέντρο μάζας του. Τώρα που ο άξονας περνάει *a/2* από το κέντρο μάζας από τον τύπο των παράλληλων αξόνων παίρνουμε :

$$I = I_C + M\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{6}Ma^2 + \frac{1}{4}Ma^2 = \frac{5}{12}Ma^2 .$$

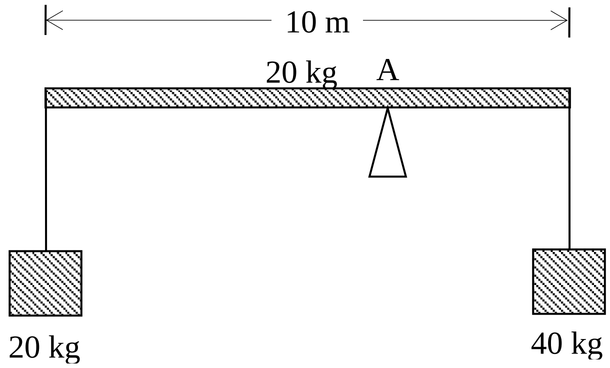
Αλλιώς μπορούμε να προσθέσουμε όλες τις στοιχειώδης πλάκες με ροπή αδρανείας $dm \cdot a^2/12$ που βρίσκονται σε απόσταση *x* από το άκρο με *0<x<a* χρησιμοποιώντας για την καθεμία τον τύπο των παράλληλων αξόνων και την πυκνότητα $\rho = M/a^3$

$$I = \int_0^I dI' = \int_0^M \left(\frac{a^2}{12} + x^2\right)dm = \rho a^2 \int_0^a \left(\frac{a^2}{12} + x^2\right)dx = \rho a^2 \frac{a^2}{12}a + \rho a^2 \frac{a^3}{3} = \frac{5}{12}Ma^2$$



Ισορροπία συμπαγούς

46.



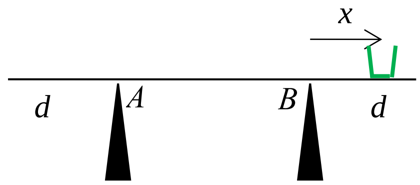
Πόσο απέχει το υπομόχλιο (σημείο Α) από το κέντρο της ράβδου?
Α) 0 m Β) 1 m Γ) 1,25 m Δ) 1,5 m Ε) 2 m

46. Γ)

$$\sum_{\substack{\alpha\rho\iota\sigma\tau\epsilon\rho o\\ \alpha\kappa\rho o}} \tau = 0 \Rightarrow B\frac{\ell}{2} - N\left(\frac{\ell}{2}+x\right) + F_{\delta\epsilon\xi\iota\alpha}\ell = 0 \Rightarrow 20\cdot 5 - 80(5+x) + 40\cdot 10 = 0 \Rightarrow$$

$$80x = 100 + 400 - 400 \Rightarrow x = \frac{10}{8} = 1,25 \text{ m}$$

41. Η σανίδα είναι ομογενής, μήκους L και υποστηρίζεται σε δύο σημεία A και B που απέχουν d από τα άκρα της. Η σανίδα έχει μάζα M, ενώ ο κουβάς έχει μάζα m. Η σανίδα θα ανατραπεί αν τοποθετήσουμε το κέντρο του κουβά έξω, από τα υποστηρίγματα, σε απόσταση x μεγαλύτερη από



Α) $\dfrac{M}{m}\left(\dfrac{L}{2}-d\right)$ Β) $\dfrac{M}{m}\left(L-2d\right)$ Γ) $\dfrac{m}{M}\left(\dfrac{L-d}{d}\right)$ Δ) $\dfrac{2m}{M}\left(\dfrac{L-d}{d}\right)$

41. Α) Οι μάζες της σανίδας δεξιά και αριστερά από το σημείο Β είναι ανάλογες του αντίστοιχου μήκους :

$$M_{L-d} = M\frac{L-d}{L}, \quad M_d = M\frac{d}{L}$$

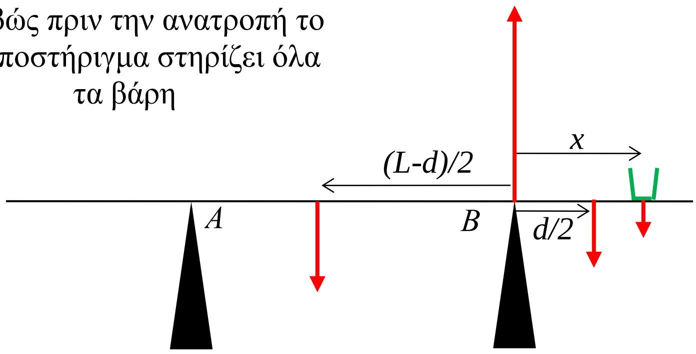
Πριν ανατραπεί η σανίδα μηδενίζεται η κάθετη αντίδραση στο Α αφού η σανίδα θα αποχωριστεί από το υποστήριγμα. Τότε για να ισορροπούν οι ροπές γύρω από το σημείο Β ο κουβάς πρέπει να απέχει :

$$M_{L-d}\,g\frac{L-d}{2} = mgx + M_d\,g\frac{d}{2} \Rightarrow M\frac{L-d}{L}\frac{L-d}{2} = mx + M\frac{d}{L}\frac{d}{2} \Rightarrow$$

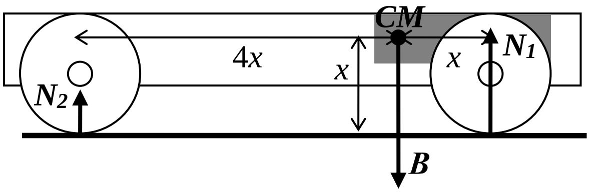
$$M\left(L-2d\right) = 2mx \Rightarrow x = \frac{M}{m}\left(\frac{L}{2}-d\right)$$

Για μεγαλύτερο x η ροπή στο δεξί μέλος αυξάνεται και η ισότητα δεν ισχύει. Η ροπή του κουβά που δεν αντισταθμίζεται θα ανατρέψει τη σανίδα.

Ακριβώς πριν την ανατροπή το ένα υποστήριγμα στηρίζει όλα τα βάρη



6. Στο όχημα του παρακάτω σχήματος το σημείο CM είναι το κέντρο μάζας του και B το βάρος του. Για τις κάθετες αντιδράσεις στους τροχούς ισχύει :

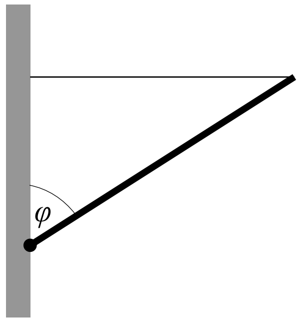


Α) $5N_2 = B$ Β) $\sqrt{5}N_2 = \sqrt{2}N_1$ Γ) $4N_1 = N_2$ Δ) $\sqrt{17}N_2 = \sqrt{2}N_1$

6. Α) Κατακόρυφη ισορροπία δυνάμεων: $B = N_1 + N_2 \Rightarrow B = 4N_2 + N_2 = 5N_2$

Ισορροπία ροπών γύρω από CM: $\tau_1 = \tau_2 \Rightarrow 4xN_2 = xN_1 \Rightarrow 4N_2 = N_1$

27-29 Ομογενής ιστός μήκους ℓ=4m και βάρους B=200 N στηρίζεται όπως στο σχήμα στον τοίχο με άρθρωση στο κάτω άκρο του και με οριζόντιο σκοινί στο πάνω. Η γωνία τοίχου-ιστού είναι 53^o (cos53^o=0,60 sin53^o=0,80).

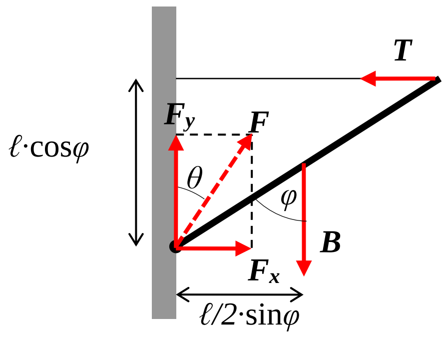


27. Η τάση του σκοινιού είναι :

Α) 100 N Β) 133 N Γ) 200 N Δ) 266 N

27. Β) Ισορροπία ροπών γύρω από άρθρωση:

$$T\ell\cos\varphi = B\frac{\ell}{2}\sin\varphi \Rightarrow T = \frac{B\sin\varphi}{2\cos\varphi} = \frac{B\cdot 0{,}8}{2\cdot 0{,}6} = B\frac{2}{3} = \frac{400}{3} = 133\text{ N}$$



28. Το μέτρο της δύναμης που ασκεί η άρθρωση είναι :

Α) $\dfrac{B\sqrt{13}}{3}$ Β) B Γ) $B\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ Δ) $B\dfrac{4}{3}$

28. Α) Ισορροπία οριζόντιων δυνάμεων : $F_x = T = 2B/3 = 133$ N

Ισορροπία κατακόρυφων δυνάμεων : $F_y = B = 200$ N

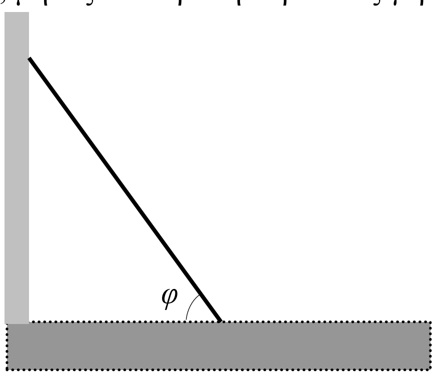
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{B^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 B^2} = B\sqrt{\frac{13}{9}} = \frac{B\sqrt{13}}{3}$$

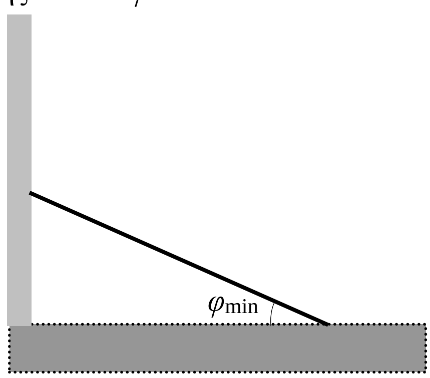
29. Η δύναμη της άρθρωσης ασκείται σε γωνία θ από τον τοίχο, όπου

Α) θ=53° Β) $\tan\theta = \dfrac{\tan\varphi}{2}$ Γ) $\tan\theta = \dfrac{3}{2}$ Δ) θ=37°

29. Β) $\tan\theta = \dfrac{F_x}{F_y} = \dfrac{B\,2/3}{B} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(0,667) = 33,6^{\circ}$

37. Η ομογενής ράβδος του σχήματος δεν δέχεται τριβή από τον τοίχο αλλά ο συντελεστής στατικής τριβής με το δάπεδο είναι μ. Ποια είναι η μικρότερη γωνία φ στην οποία μπορεί να ισορροπήσει; Η ράβδος έχει μάζα m, μήκος L και ροπή αδρανείας γύρω από το μέσο της $I = mL^2/12$.





Α) $\cot\varphi_{\min} = 4\mu/3$ Β) $\cot\varphi_{\min} = 3\mu$ Γ) $\cot\varphi_{\min} = 3\mu/4$ Δ) $\cot\varphi_{\min} = 2\mu$

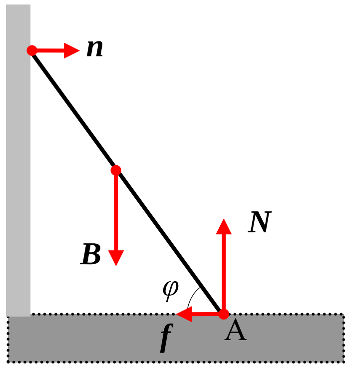
37. Δ) Η κάθετη αντίδραση N από το δάπεδο δεν αλλάζει όμως η κάθετη αντίδραση n από τον τοίχο μεγαλώνει όσο η ράβδος κατεβαίνει. Η τριβή αυτορυθμίζεται για να εξουδετερώσει την n όμως δεν μπορεί να ξεπεράσει τη μέγιστη τιμή μN.

Ισορροπία δυνάμεων κατακόρυφα : $B = N$

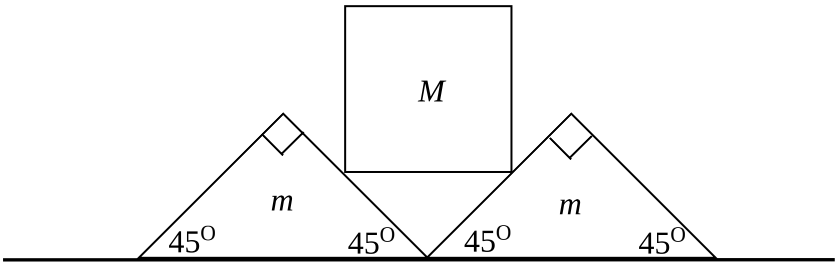
Ισορροπία δυνάμεων οριζοντίως : $f = n$

Ισορροπία ροπών (Α): $nL\sin\varphi = B\dfrac{L}{2}\cos\varphi \Rightarrow n = \dfrac{B}{2}\cot\varphi$

$$f \le \mu N \Rightarrow \frac{B}{2}\cot\varphi \le \mu B \Rightarrow \cot\varphi \le 2\mu \Rightarrow \cot\varphi_{\min} = 2\mu$$



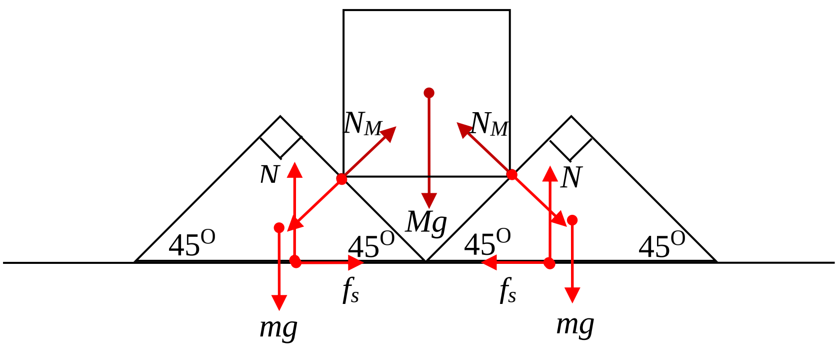
43.



Δύο ισοσκελείς ορθογώνιες σφήνες μάζας m τοποθετούνται δίπλα-δίπλα σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζουν συντελεστή στατικής τριβής μ<1. Πάνω τους ισορροπεί ένας κύβος μάζας M όπως φαίνεται στο σχήμα. Δεν υπάρχει τριβή μεταξύ του κύβου και των σφηνών. Ποια είναι η μέγιστη μάζα M που μπορεί να ισορροπήσει πάνω στις σφήνες χωρίς αυτές να ολισθήσουν;

Α) $\dfrac{m}{\sqrt{2}}$ Β) $\dfrac{\mu m}{\sqrt{2}}$ Γ) $\dfrac{\mu m}{1-\mu}$ Δ) $\dfrac{2\mu m}{1-\mu}$ Ε) Κάθε M θα ισορροπήσει

43. Δ)



Υπάρχει συμμετρία δεξιά-αριστερά. Στη μάζα M προφανώς οι ροπές ισορροπούν, καθώς οι δύο N_M έχουν αντίθετες ροπές γύρω από το CM και επίσης οι x συνιστώσες τους ισορροπούν όντας αντίθετες. Η ισορροπία στον άξονα y δίνει;

$$\sum_M F_y = 0 \Rightarrow -Mg + \frac{\sqrt{2}}{2}N_M + \frac{\sqrt{2}}{2}N_M = 0 \Rightarrow N_M = \frac{Mg}{\sqrt{2}}$$

Η ισορροπία δυνάμεων στην κάθε σφήνα μάζας m δίνει:

$$\sum_m F_x = 0 \Rightarrow f_s = \frac{\sqrt{2}}{2} N_M \Rightarrow f_s = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{Mg}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_s = \frac{Mg}{2}$$

$$\sum_m F_y = 0 \Rightarrow N - mg - \frac{\sqrt{2}}{2} N_M = 0 \Rightarrow N = mg + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{Mg}{\sqrt{2}} \Rightarrow N = mg + \frac{Mg}{2}$$

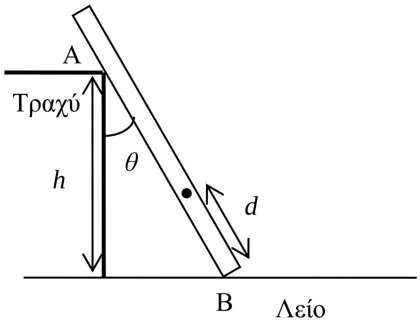
Οπότε :

$$f_s \le \mu_s N \Rightarrow \frac{Mg}{2} \le \mu_s (mg + \frac{Mg}{2}) \Rightarrow M \le \mu_s (2m + M) \Rightarrow (1-\mu_s)M \le 2\mu_s m \Rightarrow \boxed{M \le \frac{2m\mu_s}{1-\mu_s}}$$

Από την ισορροπία των ροπών θα μπορούσαμε βρούμε το σημείο εφαρμογής των N και f_s που δεν ζητείται. Θα χρειαζόταν να ξέρουμε όμως και τις διαστάσεις του κύβου για να βρούμε το σημείο επαφής του με τις σφήνες. Το βάρος της σφήνας εφαρμόζεται στο βαρύκεντρο του τριγώνου , στο 1/3 του ύψους της.

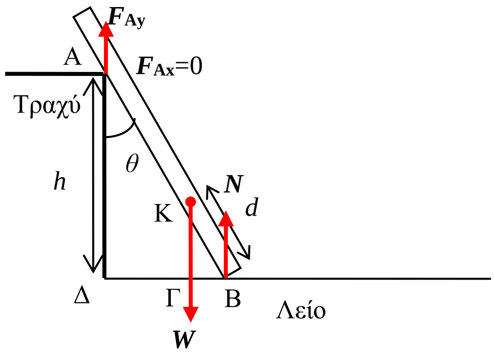
47.

Λεπτή ράβδος βάρους W ισορροπεί ακουμπώντας στο τραπέζι ύψους h σχηματίζοντας γωνία θ με την κατακόρυφο. Το δάπεδο είναι λείο όμως το τραπέζι δεν είναι. Η ράβδος δεν είναι ομογενής και το κέντρο μάζας της βρίσκεται σε απόσταση d από το κάτω άκρο της.



Να βρείτε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο από το τραπέζι και το δάπεδο

47.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{F_{Ax} = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N + F_{Ay} - W = 0 \Rightarrow F_{Ay} = W - N$$

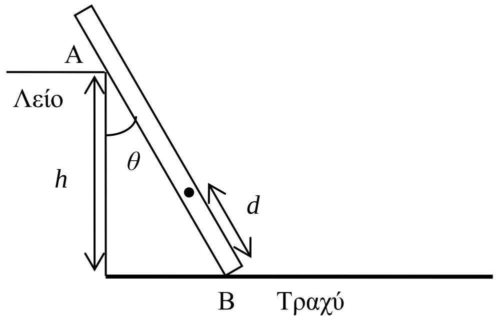
$$\sum_{(A)} \tau_z = 0 \Rightarrow W \cdot \Delta\Gamma - N \cdot \Delta\mathrm{B} = 0 \Rightarrow W \cdot (\Delta\mathrm{B} - \Gamma\mathrm{B}) - N \cdot \Delta\mathrm{B} = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta\mathrm{B} = h\,\text{εφ}\theta\,,\ \Gamma\mathrm{B} = \ell\,\text{ημ}\theta$$

$$W \cdot (h\,\text{εφ}\theta - \ell\,\text{ημ}\theta) - N \cdot h\,\text{εφ}\theta = 0 \Rightarrow N = W\frac{h\,\text{εφ}\theta - \ell\,\text{ημ}\theta}{h\,\text{εφ}\theta} \Rightarrow \boxed{N = W\left(1 - \frac{\ell}{h}\text{συν}\theta\right)}$$

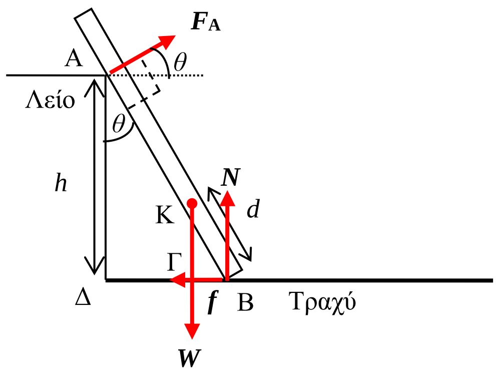
$$F_{Ay} = W - W\left(1 - \frac{\ell}{h}\text{συν}\theta\right) \Rightarrow \boxed{F_{Ay} = W\frac{\ell}{h}\text{συν}\theta}$$

48. Λεπτή ράβδος βάρους *W* ισορροπεί ακουμπώντας σε τραπέζι ύψους *h* σχηματίζοντας γωνία *θ* με την κατακόρυφο. Το τραπέζι είναι λείο όμως το δάπεδο δεν είναι. Η ράβδος δεν είναι ομογενής και το κέντρο μάζας της βρίσκεται σε απόσταση *d* από το κάτω άκρο της.



Να βρείτε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο από το τραπέζι και το δάπεδο.

48.



$$\sum_{(\mathrm{B})}\tau_z=0\Rightarrow W\cdot\Gamma\mathrm{B}-F_{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{AB}=0\Rightarrow F_{\mathrm{A}}=W\frac{\ell}{h}\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta=W\frac{\ell}{2h}\eta\mu2\theta$$

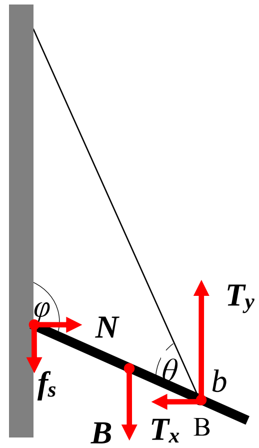
$$\Gamma\mathrm{B}=\ell\eta\mu\theta,\ \ \mathrm{AB}=\frac{h}{\sigma\upsilon\nu\theta}$$

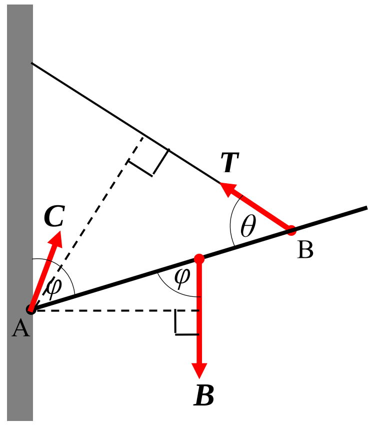
$$\sum F_x=0\Rightarrow F_A\sigma\upsilon\nu\theta-f=0\Rightarrow f=W\frac{\ell}{2h}\eta\mu2\theta\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\sum F_y=0\Rightarrow N+F_{Ay}-W=0\Rightarrow N=W-F_{Ay}=W\left(1-\frac{\ell}{2h}\eta\mu2\theta\eta\mu\theta\right)$$

Ιστοί, δοκοί και σκαλωσιές

Η μάζα (*m*) και το μήκος (*ℓ*) του ιστού θεωρούνται γνωστά καθώς και το σημείο όπου το σχοινί προσδένεται στον ιστό (*b*). Επίσης είναι γνωστές και οι γωνίες που σχηματίζει ο ιστός με το σχοινί (*θ*) και τον τοίχο (*φ*). Μας ενδιαφέρουν η τάση που θα αναπτυχθεί στο σχοινί και η δύναμη επαφής στον τοίχο.





Αναλύουμε τη δύναμη επαφής (C) σε κάθετη αντίδραση (N) και στατική τριβή (f_s) και την τάση του σχοινιού σε οριζόντια (T_x) και κατακόρυφη συνιστώσα (T_y).
Έχουμε τρεις αγνώστους στο πρόβλημα : N, f και T και εφαρμόζουμε τις συνθήκες ισορροπίας (3 εξισώσεις) για να τους βρούμε. Επιλέγουμε κατάλληλα το σημείο γύρω από το οποίο υπολογίζουμε τις ροπές (το σημείο επαφής με τον τοίχο Α ή το σημείο πρόσδεσης του σχοινιού Β) ώστε να καταλήξουμε στις απλούστερες εξισώσεις :

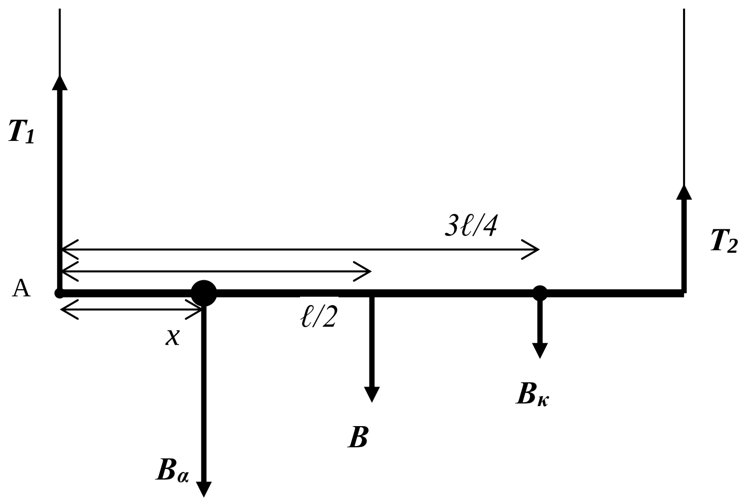
$$F_{o\lambda,x}=0 \Rightarrow N=T_x, \quad F_{o\lambda,y}=0 \Rightarrow f_s=T_y-B \qquad \tau_{o\lambda,(\mathrm{A})}=0 \Rightarrow B\frac{\ell}{2}\sin\varphi=Tb\sin\theta$$

Από την τελευταία βρίσκουμε την τάση του σχοινιού T: $T=B\dfrac{\ell}{2b}\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}$

και από τις δύο πρώτες την κάθετη αντίδραση και τη στατική τριβή.
Συνήθως οι γωνίες είναι τέτοιες που οι πράξεις να γίνονται εύκολα (π.χ. 0 ή $\pi/2$). Για κατάλληλες γωνίες και σημείο πρόσδεσης του σχοινιού η τριβή f_s μπορεί να μηδενιστεί (όταν η κατακόρυφη συνιστώσα της τάσης T_y είναι ίση με το βάρος).

Υαλοκαθαριστής ουρανοξύστη

Στο σημείο 3ℓ/4 της σκαλωσιάς ο υαλοκαθαριστής έχει αφήσει τον κουβά του. Ο ίδιος βρίσκεται στο σημείο x. Ποια είναι η τάση των σχοινιών ; Τα διάφορα βάρη θεωρούνται γνωστά.

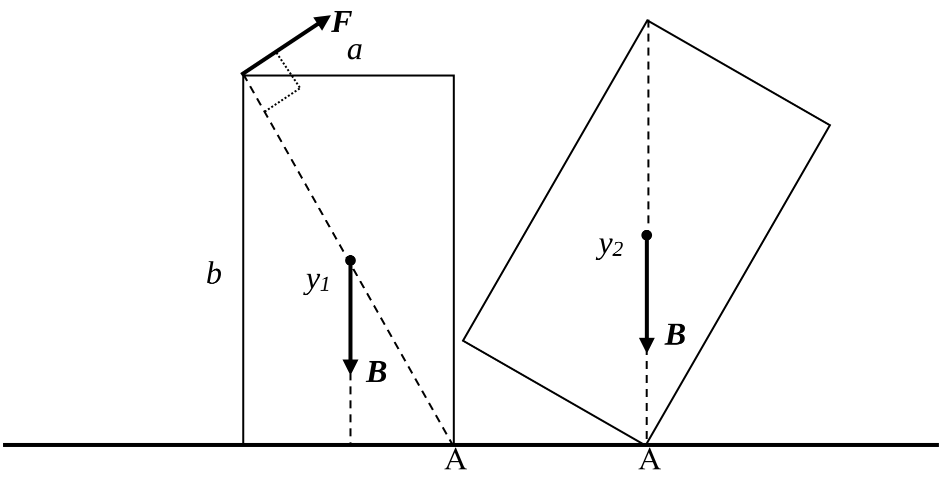


Καθώς όλες οι δυνάμεις είναι παράλληλες έχουμε από τις συνθήκες ισορροπίας 2 εξισώσεις για τους δύο αγνώστους T_1 και T_2:

$$F_{o\lambda,y}=0 \Rightarrow T_1+T_2=B+B_\alpha+B_\kappa, \qquad \tau_{o\lambda,(\mathrm{A})}=0 \Rightarrow T_2\ell=B\frac{\ell}{2}+B_\alpha x+B_\kappa\frac{3\ell}{4}$$

Υπολογίσαμε τις ροπές γύρω από το άκρο Α για να μην εμφανιστεί η T_1 και να έχουμε μόνο έναν άγνωστο στη δεύτερη εξίσωση, την T_2. Από τη δεύτερη εξίσωση βρίσκουμε την T_2 και αντικαθιστώντας στην πρώτη βρίσκουμε και την T_1.

Ανατροπή



Θέση 1 Θέση 2

Ποια είναι η ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για να ανατρέψουμε το ομογενές ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του σχήματος; Ποια είναι η ελάχιστη απαιτούμενη δύναμη;
Για να ανατραπεί αρκεί να το φέρουμε στη θέση 2. Δηλαδή η ευθεία CM-A να γίνει κατακόρυφη. Τότε του έχουμε προσδώσει βαρυτική δυναμική ενέργεια ίση με

$$W = mg(y_2 - y_1)$$

που είναι και το ελάχιστο απαιτούμενο έργο.
Χρειάζεται να ασκούμε διαρκώς ροπή τ_F γύρω από το A, ίση με τη ροπή του βάρους τ_B η οποία είναι συγκεκριμένη για κάθε θέση και είναι μέγιστη στην αρχή. Για δεδομένη αυτή τη ροπή η ελάχιστη δύναμη θα είναι όταν αυτή ασκηθεί όσο πιο μακριά γίνεται από τον άξονα περιστροφής και κάθετα στην ακτίνα

$$\tau_B = \tau_F \Rightarrow \sigma\tau\alpha\theta. = Fr\sin\theta \Rightarrow F_{\min} \text{ για } r \to r_{\max} = \sqrt{a^2+b^2} \text{ και } \sin\theta \to \sin\theta_{\max} = 1$$

Άρα η δύναμη πρέπει να ασκηθεί στην απέναντι πάνω γωνία κάθετα στη διαγώνιο.

$$\tau_B = \tau_F \Rightarrow B\frac{a}{2} = F_{\min}\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow F_{\min} = \frac{B}{2}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Αν δεν μπορούμε να ασκήσουμε τουλάχιστον τόση δύναμη δεν θα μπορέσουμε να ανατρέψουμε το αντικείμενο. Αν αυτή είναι η μέγιστη δύναμη που μπορούμε να ασκήσουμε τότε για να ανατρέψουμε το αντικείμενο θα πρέπει να την ασκήσουμε στην πάνω γωνία όπως στο σχήμα.

25M. Η βάση ορθογώνιου κιβωτίου έχει διαστάσεις 60 cm × 60 cm, ενώ το ύψος του είναι 80 cm. Αν το κιβώτιο είναι ομογενές και το βάρος του είναι 1000 N, τότε για την ανατροπή του απαιτούνται τουλάχιστον:
Α) δύναμη 300 N ή έργο 100 J
Β) δύναμη 460 N ή έργο 138 J
Γ) δύναμη 300 N ή έργο 90 J
Δ) δύναμη 300 N ή έργο 180 J

25M. Α) Η διαγώνιος είναι $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{0,6^2+0,8^2} = 1\text{ m}$

$$B\frac{a}{2} = F_{\min}\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow 1000\text{ N}\cdot\ 0,3\text{ m} = F_{\min}\cdot\ 1\text{ m} \Rightarrow F_{\min} = 300\text{ N}$$

Το CM θα ανυψωθεί από $\frac{b}{2} = 0,4\text{ m}$ σε $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} = 0,5\text{ m}$ αρά θα απαιτηθεί έργο ίσο με

$$W = B\cdot\ \Delta y = 1000(0,5-0,4) = 100\text{ J}$$

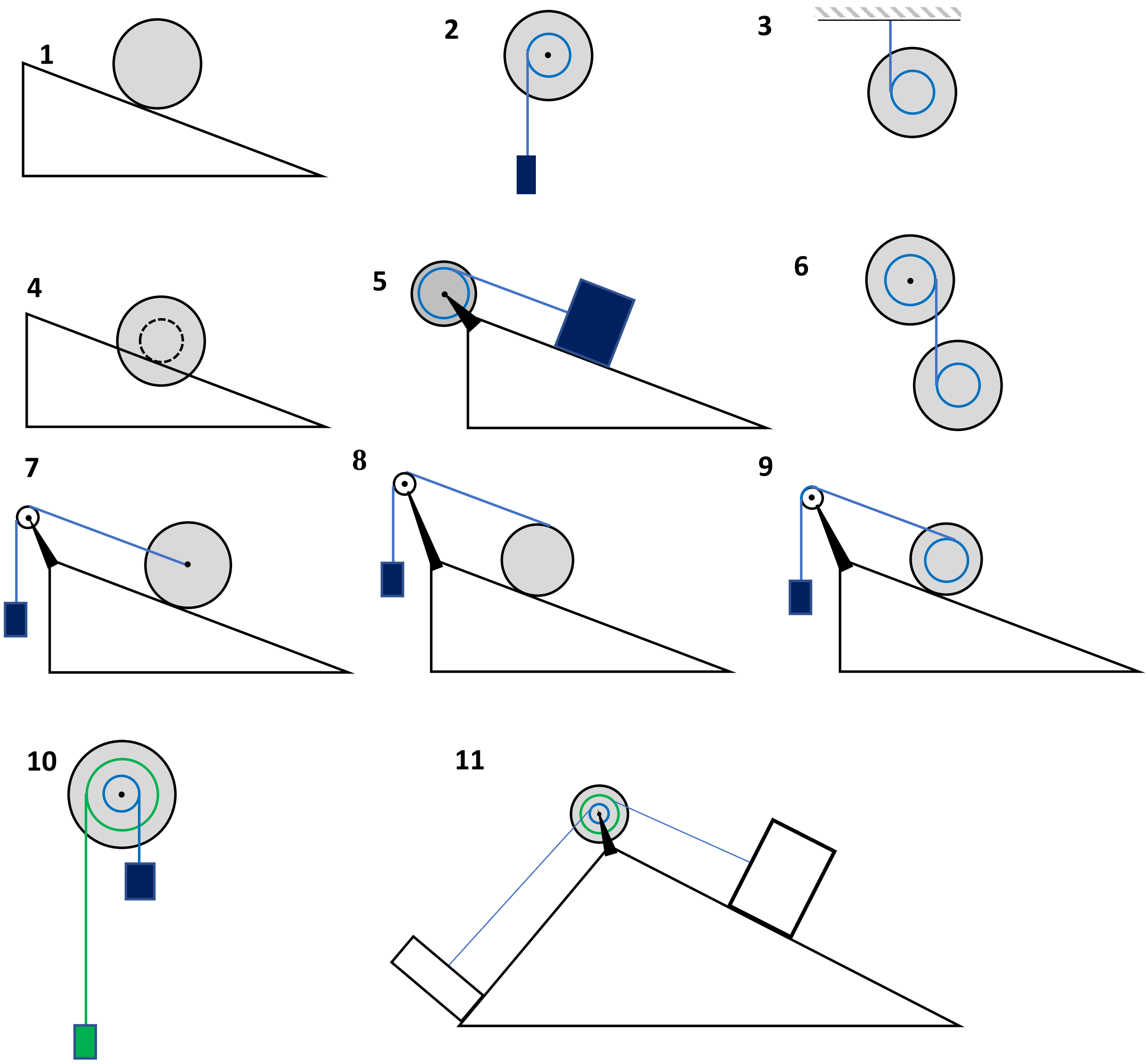
26M. Δύο κιβώτια Α και Β έχουν το ίδιο βάρος και τις ίδιες διαστάσεις και τα CM τους βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο. Όμως το CM του Α είναι πιο χαμηλά από του Β. Ποια από τις ακόλουθες προτάσεις είναι ορθή;
Α) Η ελάχιστη απαιτούμενη δύναμη για την ανατροπή του Α είναι μεγαλύτερη

Β) Το ελάχιστο απαιτούμενο έργο για την ανατροπή του Α είναι μεγαλύτερο
Γ) Το ελάχιστο απαιτούμενο έργο για την ανατροπή των δυο κιβωτίων είναι το ίδιο
Δ) Η ελάχιστη απαιτούμενη δύναμη για την ανατροπή του Α είναι μικρότερη

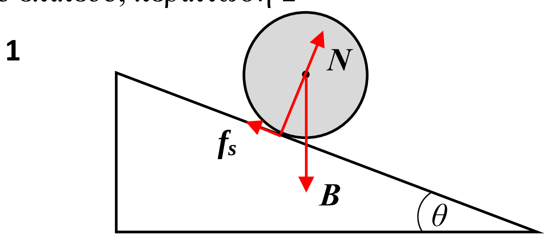
26Μ. Β) Η απαιτούμενη δύναμη είναι ίδια για τα δύο κιβώτια αλλά για την ανατροπή του Α απαιτείται μεγαλύτερη ανύψωση του CM. Όσο πιο χαμηλά είναι το CM τόσο πιο ψηλά θα ανέβει όταν η ευθεία που το ενώνει με την κορυφή Α, από όπου περιστρέφεται, γίνει κατακόρυφη.

Νόμοι Νεύτωνα (Euler)

Στις παρακάτω διατάξεις βρείτε τις επιταχύνσεις των σωμάτων και τις δυνάμεις της στατικής τριβής και τάσης του νήματος



1. Κύλιση σε κεκλιμένο επίπεδο, περίπτωση **1**



Η εξωτερική επιταχύνουσα ή επιβραδύνουσα δύναμη είναι το βάρος, που εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους το οποίο στο σταθερό βαρυτικό πεδίο της επιφάνειας της Γης ταυτίζεται με το κέντρο μάζας. Έτσι έχουμε την περίπτωση άσκησης δύναμης στο κέντρο μάζας. Σε αυτήν την περίπτωση εμφανίζεται στατική τριβή που θα είναι αντίθετη στη συνιστώσα του βάρους την παράλληλη με το επίπεδο και θα προκαλέσει την περιστροφή. Έτσι είτε το σώμα ανεβαίνει είτε κατεβαίνει, εφόσον κυλίεται χωρίς ολίσθηση, οι δυνάμεις θα είναι ίδιες όπως στο παραπάνω σχήμα (η στατική τριβή θα είναι πάντα προς τα πάνω).

Νόμοι Νεύτωνα (Euler) :

y-ισορροπία: $\sum F_y = 0 \Rightarrow B_\perp - N = 0 \Rightarrow mg\cos\theta - N = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$ (1),

x-γραμμική επιτάχυνση: $\sum F_x = ma \Rightarrow mg\sin\theta - f_s = ma$ (2),

z-γωνιακή επιτάχυνση: $\sum \tau_{z(CM)} = I_C\alpha \Rightarrow f_s R = I_C\alpha \Rightarrow f_s R = \kappa m R^2 \dfrac{a}{R} \Rightarrow f_s = \kappa m a$ (3),

Συνθήκη κύλισης: $\upsilon = \omega R \Rightarrow a = \alpha R$ (4).

Προσθέτοντας την (2) στην (3) βρίσκουμε την επιτάχυνση και αντικαθιστώντας στην (3) βρίσκουμε τη στατική τριβή. Τα αποτελέσματα είναι : $N = mg\cos\theta$, $f_s = \dfrac{\kappa}{1+\kappa} mg\sin\theta$, $a = \dfrac{g\sin\theta}{1+\kappa}$

Το σώμα εκτελεί ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με επιτάχυνση που εξαρτάται μόνο από το σχήμα του κ και δεν εξαρτάται ούτε από τη μάζα του m ούτε από την ακτίνα του R.

Αν αφήσουμε από το ίδιο ύψος, ταυτόχρονα μια συμπαγή σφαίρα (κ=2/5=0,4), έναν κύλινδρο ή δίσκο (κ=1/2=0,5), έναν σφαιρικό φλοιό (κ=2/3=0,67), και μία στεφάνη (κ=1), τότε στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου θα φτάσει 1η η συμπαγής σφαίρα, 2ος ο κύλινδρος, 3ος ο σφαιρικός φλοιός και 4η η στεφάνη, ανεξαρτήτως των μεγεθών τους και της μάζας τους!

Δείτε το βίντεο από Wikipedia/Rolling: Rolling_Racers_-_Moment_of_inertia.ogv

Εφόσον βρούμε την επιτάχυνση μπορούμε να απαντήσουμε όλα τα ερωτήματα της κινηματικής.

Διάστημα : $s = \dfrac{1}{2}at^2$, Γωνία περιστροφής : $\theta = \dfrac{s}{R}$ ή $\theta = \dfrac{1}{2}\alpha t^2$,

Ταχύτητα κέντρου μάζας : $\upsilon = at$ ή $\upsilon = \sqrt{2as}$, Γωνιακή ταχύτητα : $\omega = \dfrac{\upsilon}{R}$ ή $\omega = \alpha t$

Αριθμός περιστροφών : $N = \dfrac{\theta}{2\pi}$

Αν ο κύλινδρος ανεβαίνει πρέπει στις εξισώσεις χρειάζεται αρχική ταχύτητα υ_0 αντίθετη με την επιτάχυνση που είναι προς τα κάτω.

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου μπορεί να υπολογιστεί και από τη διατήρηση της ενέργειας :

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}\kappa m R^2 \frac{\upsilon^2}{R^2} = \frac{1+\kappa}{2}m\upsilon^2$$

$$E_{top} = E_{bottom} \Rightarrow mgh + 0 = 0 + \frac{1+\kappa}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2gh}{1+\kappa}}$$

Αν δοθεί (μετρηθεί) η επιτάχυνση ή ισοδύναμα μετρηθεί ο χρόνος καθόδου του σώματος από το κεκλιμένο επίπεδο, τότε μπορεί να μετρηθεί η ροπή αδράνειας του κυλινδρικού σώματος το οποίο έχει κυλινδρική συμμετρία αλλά μπορεί να μην είναι ομογενές. Αν το μήκος του κεκλιμένου επιπέδου είναι ℓ τότε από το χρόνο καθόδου του σώματος μπορούμε να βρούμε το κ δηλαδή και συνεπώς τη ροπή αδρανείας του $I = \kappa m R^2$:

$$\ell = \frac{1}{2}at_\kappa^2 \Rightarrow \ell = \frac{1}{2}\frac{g\sin\varphi}{1+\kappa}t_\kappa^2 \Rightarrow \kappa = \frac{g\sin\varphi}{2\ell}t_\kappa^2 - 1$$

Η διάταξη αυτή μπορεί εύκολα να υλοποιηθεί σε ένα σχολικό εργαστήριο και να μετρηθούν οι ροπές αδρανείας των διαφόρων στερεών.

36. Ένας τροχός ροπής αδρανείας $I = \kappa m R^2$ αφήνεται να κυλίσει σε κεκλιμένο επίπεδο υπό την επίδραση του βάρους του. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του τροχού και του επιπέδου είναι μ. Ποια είναι η μέγιστη γωνία του κεκλιμένου επιπέδου ώστε να έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση ;

Α) $\sin\varphi_{\max} = \dfrac{\mu(1+\kappa)}{\kappa}$ Β) $\cos\varphi_{\max} = \dfrac{\mu(1+\kappa)}{\kappa}$

Γ) $\tan\varphi_{\max} = \dfrac{\mu(1+\kappa)}{\kappa}$ Δ) $\cot\varphi_{\max} = \dfrac{\mu(1+\kappa)}{\kappa}$

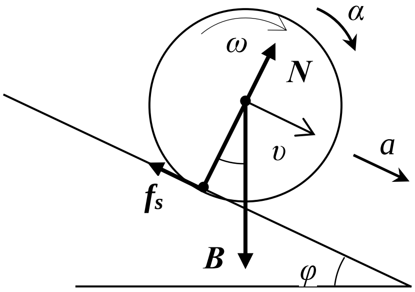
36. Γ) $N - B_{\perp} = 0 \Rightarrow N = mg\cos\varphi$

$$B_{\parallel} - f_s = ma \Rightarrow a = \frac{g\sin\varphi}{1+\kappa}$$

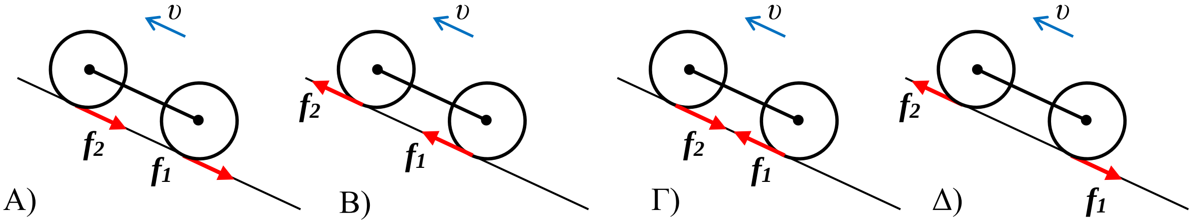
$$f_s R = I\alpha \Rightarrow f_s = \kappa m R\alpha = \kappa m a \Rightarrow f_s = \frac{\kappa}{1+\kappa} mg\sin\varphi$$

$$f_s \le \mu N \Rightarrow \frac{\kappa}{1+\kappa} mg\sin\varphi \le \mu mg\cos\varphi \Rightarrow \tan\varphi \le \frac{\mu(1+\kappa)}{\kappa} \Rightarrow \tan\varphi_{\max} = \frac{\mu(1+\kappa)}{\kappa}$$

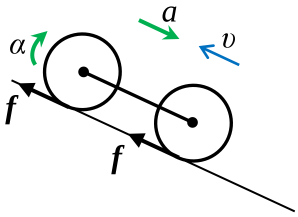
Π.χ. για κύλινδρο κ=1/2 : $\tan\varphi_{\max(\kappa\upsilon\lambda)} = \dfrac{\mu(1+1/2)}{1/2} = 3\mu$, για σφαίρα : $\tan\varphi_{\max(\sigma\varphi\alpha\iota\rho)} = \dfrac{\mu(1+2/5)}{2/5} = \dfrac{7}{2}\mu$, ενώ για στεφάνη $\tan\varphi_{\max(\sigma\varphi\alpha\iota\rho)} = \dfrac{\mu(1+1)}{1} = 2\mu$. Οπότε όπως μεγαλώνουμε τη γωνία φ πρώτη θα αρχίσει να ολισθαίνει η στεφάνη, μετά ο κύλινδρος και μετά η σφαίρα.



32. Δύο τροχοί συνδεδεμένοι με άξονα όπως στο σχήμα κυλούν σε κεκλιμένο επίπεδο υπό την επίδραση του βάρους τους. Στο συγκεκριμένο στιγμιότυπο η κίνηση γίνεται προς τα πάνω. Ποιο σχήμα παρουσιάζει τις τριβές ορθά;

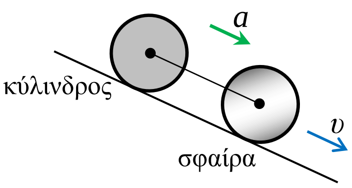


32. Β) Λόγω του βάρους η γραμμική επιτάχυνση θα είναι προς τα κάτω (επιβράδυνση) και άρα η γωνιακή επιτάχυνση των τροχών, λόγω κύλισης θα είναι $a = \alpha R$, όπως στο σχήμα. Επειδή η γωνιακή επιτάχυνση των τροχών προκαλείται μόνο από την στατική τριβή αυτή θα πρέπει να είναι προς τα πάνω και στους δύο τροχούς. Αυτό συμβαίνει ασχέτως αν το όχημα ανεβαίνει ή κατεβαίνει το κεκλιμένο επίπεδο. Λόγω της συμμετρίας οι δύο τριβές θα έχουν και ίσα μέτρα.

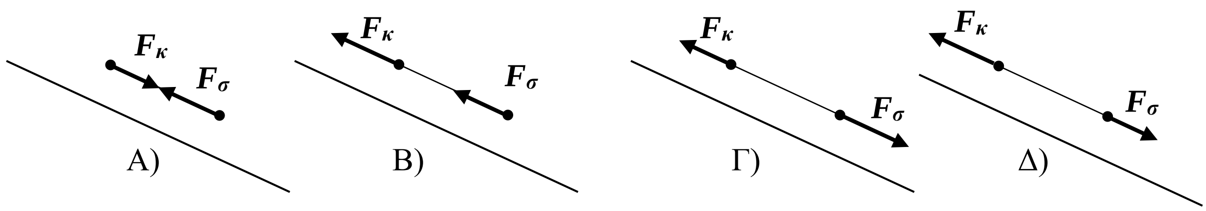


Με άλλα λόγια. Οι εξωτερικές κινούσες ή ενεργητικές δυνάμεις σε κάθε τροχό (βάρος, επαφή με άξονα) ασκούνται στο κέντρο βάρους του. Επειδή η παράλληλη με το επίπεδο ολική εξωτερική δύναμη (βάρη) σε όλο το σύστημα θα προκαλέσει επιτάχυνση προς τα κάτω και η συνισταμένη των δυνάμεων σε κάθε τροχό πρέπει να είναι προς τα κάτω. Άρα η στατική τριβή θα είναι στην αντίθετη κατεύθυνση. Η στατική τριβή εδώ δεν μπορεί να αντισταθμίσει το βάρος και να προκαλέσει ισορροπία γιατί το σώμα μπορεί να περιστραφεί και να κυλίσει. Μπορείτε να τα επιβεβαιώσετε κάνοντας τις πράξεις από τους νόμους του Νεύτωνα.

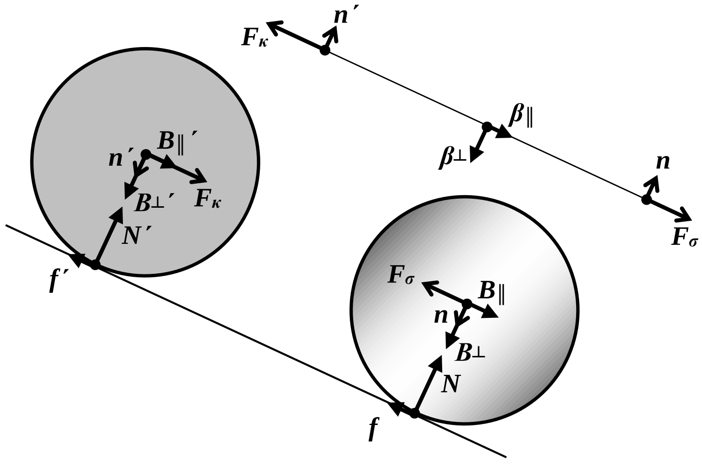
33. Δύο τροχοί, μία σφαίρα μπροστά και ένας κύλινδρος πίσω οι οποίοι έχουν συνδεθεί κατάλληλα με έναν άξονα όπως στο σχήμα αφήνονται να κυλίσουν σε κεκλιμένο επίπεδο υπό την επίδραση του βάρους. Οι τροχοί έχουν ίσες μάζες και ακτίνες. Ο άξονας έχει πολύ μικρή μάζα σε σχέση με τους τροχούς αλλά όχι αμελητέα



Οι δυνάμεις που ασκούνται από τους τροχούς στον άξονα, παράλληλα με το επίπεδο είναι :



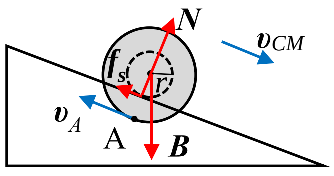
33. Δ) Αν οι τροχοί κυλούσαν ανεξάρτητα, μόνο υπό την επίδραση του βάρους τους χωρίς τον άξονα, τότε ως γνωστό, λόγω του σχήματός τους, η σφαίρα θα είχε μεγαλύτερη επιτάχυνση από τον κύλινδρο ($a = g\sin\theta/1+\kappa$, $\kappa_{σφ}$=0,4 $\kappa_{κυλ}$=0,5). Άρα τώρα που αναγκαστικά έχουν κοινή επιτάχυνση ο άξονας θα ασκεί τέτοιες δυνάμεις ώστε η κοινή επιτάχυνση να είναι μικρότερη της επιτάχυνσης της ανεξάρτητης σφαίρας και μεγαλύτερη της επιτάχυνσης του ανεξάρτητου κυλίνδρου. Η δύναμη στο κέντρο μάζας της σφαίρας θα μικρύνει (ό άξονας την τραβάει προς τα πάνω) ενώ στον κύλινδρο θα μεγαλώσει (ο άξονας τον τραβάει προς τα κάτω). Άρα η σφαίρα τραβάει τον άξονα προς τα κάτω με $F_σ$, ενώ ο κύλινδρος τον τραβάει προς τα πάνω με $F_κ$.. Οπότε η σωστή απάντηση θα είναι ή η Γ) ή η Δ). Αν ο άξονας είχε αμελητέα μάζα οι δύο δυνάμεις θα είχαν ίσο μέτρο. Στον άξονα εκτός των δυνάμεων $F_σ$ και $F_κ$, από τους τροχούς, ασκείται και η παράλληλη με το επίπεδο συνιστώσα του βάρους του $\beta_{\|}$, προς τα κάτω. Αν ο άξονας ολίσθαινε μόνος του πάνω στο επίπεδο, υπό το βάρος του χωρίς τριβή, θα είχε επιτάχυνση $\beta_{\|} = ma \Rightarrow a = g\sin\theta$. Τώρα έχει μικρότερη, την κοινή επιτάχυνση, άρα η προς τα κάτω συνιστώσα της δύναμης πρέπει να μικρύνει που σημαίνει ότι ο κύλινδρος τον τραβάει πιο δυνατά προς τα πάνω από ότι η σφαίρα προς τα κάτω δηλ: $F_κ > F_σ$ ώστε $\beta_{\|} - (F_\kappa - F_\sigma) < \beta_{\|}$. Όλες οι δυνάμεις παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα. Λύνοντας τις εξισώσεις του Νεύτωνα μπορείτε να επιβεβαιώσετε εύκολα τα παραπάνω ποιοτικά συμπεράσματα.



2. Κύλιση σε κεκλιμένο επίπεδο, περίπτωση **4**

Το μόνο που αλλάζει είναι το στιγμιαία ακίνητο σημείο εφαρμογής της στατικής τριβής και της κάθετης αντίδρασης που τώρα είναι σημείο με ακτίνα $r<R$. Το σημείο περιμετρικό σημείο Α που βρίσκεται κάτω από το κεκλιμένο επίπεδο (ράγα) θα κινείται αντίθετα από το κέντρο μάζας.

4



Νόμοι Νεύτωνα (Euler) :

y-ισορροπία: $\sum F_y = 0 \Rightarrow B_\perp - N = 0 \Rightarrow mg\cos\varphi - N = 0 \Rightarrow N = mg\cos\varphi$ (1),

x-γραμμική επιτάχυνση: $\sum F_x = ma \Rightarrow mg\sin\varphi - f_s = ma$ (2),

z-γωνιακή επιτάχυνση: $\sum \tau_{z(CM)} = I_C\alpha \Rightarrow f_s r = I_C\alpha \Rightarrow f_s r = \kappa m R^2 \dfrac{a}{r} \Rightarrow f_s = \dfrac{R^2}{r^2}\kappa m a$ (3),

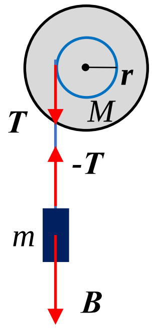
Συνθήκη κύλισης: $\upsilon = \omega r \Rightarrow a = \alpha r$ (4).

Προσθέτοντας την (2) στην (3) βρίσκουμε την επιτάχυνση και αντικαθιστώντας στην (3) βρίσκουμε τη στατική τριβή. Τα αποτελέσματα είναι : $N = mg\cos\theta$, $f_s = \dfrac{\kappa R^2/r^2}{1+\kappa R^2/r^2} mg\sin\theta$, $a = \dfrac{g\sin\theta}{1+\kappa R^2/r^2}$

Το σώμα κατέρχεται πιο αργά από ότι αν κυλούσε πάνω στην περίμετρό του.
Η ταχύτητα του σημείου A είναι : $\upsilon_A = \upsilon - \omega R = \omega r - \omega R = -\omega(R-r)$

3. Κύλινδρος που ξετυλίγεται από βαρίδιο, περίπτωση **2**
Εδώ έχουμε δύο σώματα. Το ένα κάνει μόνο στροφική κίνηση και το άλλο μόνο περιστροφική. Άρα έχουμε δύο εξισώσεις για να λύσουμε για δύο αγνώστους : την τάση του νήματος και τη γραμμική επιτάχυνση του βαριδίου. Το γεγονός ότι το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στον κύλινδρο όπως ξετυλίγεται, είναι η «συνθήκη κύλισης» που συνδέει τη γραμμική επιτάχυνση του βαριδίου με τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.

2



Νόμοι Νεύτωνα και Euler :
y-γραμμική κίνηση βαριδίου: $\sum F_{y\ \beta\alpha\rho} = ma \Rightarrow mg - T = ma$ (1),

z-στροφική κίνηση κυλίνδρου: $\sum \tau_{z(CM)} = I_C\alpha \Rightarrow Tr = I_C\alpha \Rightarrow Tr = \kappa MR^2\dfrac{a}{r} \Rightarrow T = \dfrac{R^2}{r^2}\kappa Ma$ (2),

z-ισορροπία κυλίνδρου (για να βρούμε, αν θέλουμε, τη δύναμη που ασκεί ο άξονας):

$$\sum F_{z\ \kappa\upsilon\lambda} = 0 \Rightarrow -F_A + Mg + T = 0 \Rightarrow F_A = Mg + T \quad (3),$$

Συνθήκη κύλισης: $\upsilon = \omega r \Rightarrow a = \alpha r$ (4).

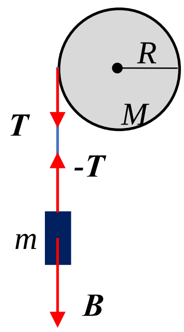
Προσθέτοντας την (1) στην (2) βρίσκουμε την επιτάχυνση και αντικαθιστώντας στην (2) βρίσκουμε την τάση του νήματος. Τα αποτελέσματα είναι : $a = \dfrac{mg}{m+\kappa MR^2/r^2}$, $T = \dfrac{\kappa MR^2/r^2}{m+\kappa MR^2/r^2} mg$,

$F_A = Mg + T$

Για νήμα τυλιγμένο στην περίμετρο του κυλίνδρου r=R τα αποτελέσματα απλοποιούνται σε :

$$a = \frac{m}{m+\kappa M} g, \qquad T = \frac{\kappa M}{m+\kappa M} mg$$

18-20 Σώμα μάζας m κατέρχεται στο πάτωμα από ύψος h όντας συνδεδεμένο με ένα οριζόντιο ομογενή κύλινδρο μέσω ελαφρού και μη εκτατού νήματος το οποίο είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια του κυλίνδρου και ξετυλίγεται χωρίς να ολισθαίνει κατά την κάθοδο του σώματος. Η μάζα και η ακτίνα του κυλίνδρου είναι M και R αντίστοιχα, η ροπή αδρανείας του δίνεται από τον τύπο $I = \frac{1}{2}MR^2$ και είναι στερεωμένος σε οριζόντιο άξονα γύρω από τον οποίο μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές.



18. Το σώμα χτυπάει το πάτωμα με ταχύτητα :

Α) $\sqrt{2gh(1+m/M)}$ Β) $\sqrt{2gh(1+2m/M)}$

Γ) $\sqrt{\dfrac{2gh}{1+M/m}}$ Δ) $\sqrt{\dfrac{2gh}{1+M/2m}}$

18. Δ) Από διατήρηση της ενέργειας παίρνουμε :

$$E_h = E_0 \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\left(\frac{\upsilon}{R}\right)^2 \Rightarrow$$
$$2gh = \upsilon^2(1+M/2m)$$

Το περιστροφικό έργο που κάνει η T στον κύλινδρο είναι αντίθετο από το μεταφορικό έργο που κάνει στο κατερχόμενο σώμα (λόγω συνθήκης κύλισης και μη εκτατότητας του νήματος) οπότε η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος που είναι διατηρητική.

19. Η τάση του νήματος είναι :

Α) $\dfrac{mg}{1+2m/M}$ Β) $\dfrac{(M-m)g}{1+2m/M}$ Γ) $\dfrac{mg}{1+m/M}$ Δ) $\dfrac{(M+m)g}{1+m/M}$

19. Α) Απλή εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα.
Στον περιστρεφόμενο κύλινδρο έχουμε :

$$TR = I\alpha \Rightarrow TR = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow a = \frac{2T}{M}.$$

Από το κατερχόμενο σώμα παίρνουμε :

$$mg - T = ma \Rightarrow T = mg - ma = mg - m\frac{2T}{M} \Rightarrow T = \frac{mg}{1+2m/M}$$

20. Η επιτάχυνση του σώματος είναι :

Α) $\dfrac{g}{1+m/2M}$ Β) $\dfrac{g}{1+M/2m}$ Γ) $\dfrac{g}{1+m/M}$ Δ) $\dfrac{g}{1+M/m}$

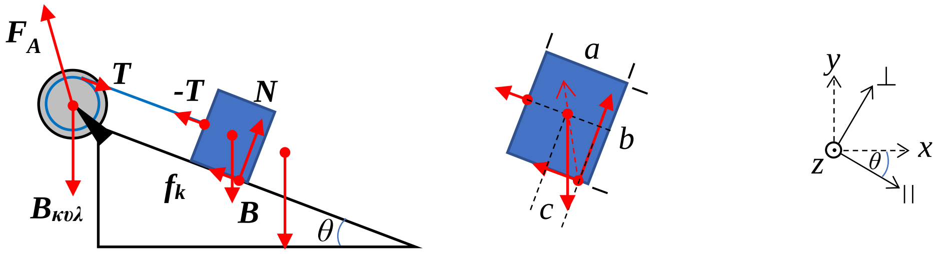
20. Β) $TR = I\alpha \Rightarrow TR = \dfrac{1}{2}MR^2 \cdot \dfrac{a}{R} \Rightarrow T = \dfrac{1}{2}Ma$,

$$mg - T = ma \Rightarrow mg - \frac{1}{2}Ma = ma \Rightarrow a = \frac{g}{1+M/2m}$$

4. Κύλινδρος που ξετυλίγεται από κιβώτιο που ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο, περίπτωση **5**

Το κύριο που αλλάζει είναι ότι δεν ενεργεί όλο το βάρος του κιβωτίου αλλά μόνο η συνιστώσα του που είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο $B \to B_{\|} = mg\sin\theta$. Η αντίδραση του άξονα περιστροφής θα έχει δύο συνιστώσες F_{Ax}, F_{Ay} ή $F_{A\|}, F_{A\perp}$. Επίσης υπάρχει περίπτωση ύπαρξης τριβής ολίσθησης μεταξύ του βαριδίου και του κεκλιμένου επιπέδου. Ανάλογα με τις διαστάσεις του κιβωτίου και το σημείο πρόσδεσης του νήματος μπορούμε να βρούμε το σημείο που ασκούνται η τριβή ολίσθησης και η κάθετη αντίδραση από την απαίτηση η συνισταμένη ροπή γύρω από το CM του κιβωτίου να είναι μηδέν.

5



$f_k = \mu_k N$

Νόμοι Νεύτωνα και Euler :

$\perp$-ισορροπία κιβωτίου : $\sum F_{\perp\,\kappa\iota\beta} = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$

(1),

$\|$-γραμμική κίνηση κιβωτίου :

$$\sum F_{\|\,\kappa\iota\beta} = ma \Rightarrow mg\sin\theta - T - f_k = ma \Rightarrow mg\sin\theta - T - \mu_k mg\cos\theta = ma \text{ (2)},$$

z-στροφική ισορροπία κιβωτίου: $\sum \tau_{z(CM)\,\kappa\iota\beta} = 0 \Rightarrow f_k\frac{b}{2} = Nc \Rightarrow \mu_k\frac{b}{2} = c$

(3),

$\perp$-ισορροπία κυλίνδρου : $\sum F_{\perp\,\kappa\upsilon\lambda} = 0 \Rightarrow F_{A\perp} = Mg\cos\theta$ (4),

$\|$- ισορροπία κυλίνδρου: $\sum F_{\|\,\kappa\iota\beta} = ma \Rightarrow F_{A\|} = Mg\sin\theta + T$

(5),

z-στροφική κίνηση κυλίνδρου: $\sum \tau_{z(CM)\,\kappa\upsilon\lambda} = I_C\alpha \Rightarrow Tr = I_C\alpha \Rightarrow Tr = \kappa MR^2\frac{a}{r} \Rightarrow T = \kappa Ma\frac{R^2}{r^2}$

(6),

Συνθήκη κύλισης: $\upsilon = \omega r \Rightarrow a = \alpha r$ (7).

Ως συνήθως, προσθέτοντας την (2) στην (6) βρίσκουμε την επιτάχυνση και αντικαθιστώντας στην (6) βρίσκουμε την τάση του νήματος. Τα αποτελέσματα είναι :

$$a = \frac{mg(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)}{m + \kappa MR^2/r^2}, \qquad T = mg(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)\frac{\kappa MR^2/r^2}{m + \kappa MR^2/r^2}$$

Για αμελητέα τριβή ολίσθησης και νήμα τυλιγμένο στην περίμετρο του κυλίνδρου $r=R$ τα αποτελέσματα απλοποιούνται σε :

$$a = \frac{mg\sin\theta}{m + \kappa M}, \qquad T = mg\sin\theta\frac{\kappa M}{m + \kappa M}$$

Ποια είναι η ισχύς του κινητήρα που γυρίζει τον κύλινδρο ώστε το κιβώτιο να κατεβαίνει ή να ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα υ= 0,5 m/s. Δίνονται r=0,1 m, μ_k=0,2 , θ=53,13^o, m=100 kg και g=9,8 m/s^2.

Τώρα το κιβώτιο ισορροπεί

Άνοδος: $\sum F_{\|\,\kappa\iota\beta} = 0 \Rightarrow T - mg\sin\theta - f_k = ma \Rightarrow T = mg(\sin\theta + \mu_k\cos\theta) = 901{,}6\ \text{N}$

Κάθοδος: $\sum F_{\|\,\kappa\iota\beta} = 0 \Rightarrow T - mg\sin\theta + f_k = ma \Rightarrow T = mg(\sin\theta - \mu_k\cos\theta) = 666{,}4\ \text{N}$

Η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου είναι $\omega = \frac{\upsilon}{r}$

Η ισχύς του κινητήρα είναι: $P = \tau\omega = rT \cdot \dfrac{\upsilon}{r} = T\upsilon$

$P_{\alpha\nu o\delta} = 901,6 \cdot 0,5 = 450,8$ W

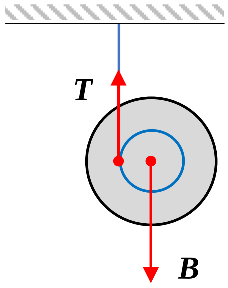
$P_{\kappa\alpha\theta o\delta} = 666,4 \cdot 0,5 = 333,4$ W

Αν δεν υπήρχε τριβή ή το κιβώτιο κρεμόταν στον αέρα ο κινητήρας θα κατανάλωνε την ίδια ισχύ είτε για να ανεβάσει είτε για να κατεβάσει το κιβώτιο.

5. Γιο-γιό, περίπτωση **3**

Προσέγγιση: θεωρούμε ότι το νήμα παραμένει κατακόρυφο. Έχουμε 1 σώμα που κάνει μεταφορική και στροφική κίνηση. Άρα δύο εξισώσεις για δύο αγνώστους : τη γραμμική επιτάχυνση και την τάση του νήματος. Το γεγονός ότι το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στον κύλινδρο όπως ξετυλίγεται, είναι η «συνθήκη κύλισης» που συνδέει τη γραμμική επιτάχυνση με τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.

3



y-γραμμική κίνηση κυλίνδρου: $\sum F_y = ma \Rightarrow mg - T = ma$ (1),

z- στροφική κίνηση κυλίνδρου: $\sum \tau_{z(CM)} = I_C\alpha \Rightarrow Tr = \kappa m R^2 \dfrac{a}{r} \Rightarrow T = \kappa m a \dfrac{R^2}{r^2}$ (2),

Συνθήκη κύλισης: $\upsilon = \omega r \Rightarrow a = \alpha r$ (3).

Ως συνήθως, προσθέτοντας την (2) στην (1) βρίσκουμε την επιτάχυνση και αντικαθιστώντας στην (2) βρίσκουμε την τάση του νήματος. Τα αποτελέσματα είναι :

$$a = \frac{g}{1+\kappa R^2/r^2}, \qquad T = mg\frac{\kappa R^2/r^2}{1+\kappa R^2/r^2}$$

Η αντίδραση της οροφής *N* είναι ίση με την τάση του νήματος που είναι μικρότερη από το βάρος του κυλίνδρου *mg*. Για $r \to 0$, ιδανικό γιό-γιό, η τάση τείνει να εξισωθεί με το βάρος του νήματος $T \to mg = B$ ενώ η επιτάχυνση γίνεται πολύ μικρή $a \to 0$. Το γιό-γιό το πετάμε και το τραβάμε για να κάνουμε φιγούρες, δεν περιμένουμε να ξετυλιχτεί μόνο του.

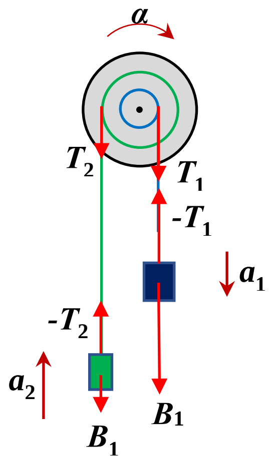
Για νήμα τυλιγμένο στην περίμετρο του κυλίνδρου *r*=*R* τα αποτελέσματα απλοποιούνται σε :

$$a = \frac{g}{1+\kappa}, \qquad T = mg\frac{\kappa}{1+\kappa}$$

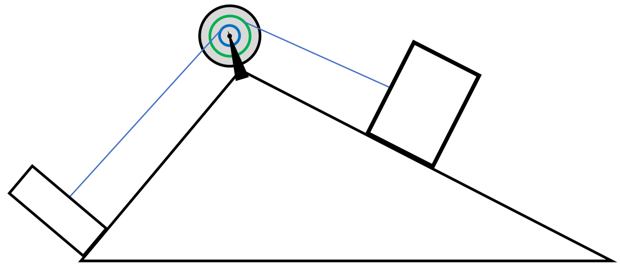
6. Μηχανή Atwood, κύλινδρος που περιστρέφεται από δύο αντιμαχόμενα βαρίδια. Περίπτωση **10** και **11**

Τα δύο βαρίδια κάνουν γραμμική κίνηση και ο κύλινδρος μόνο στροφική. Έχουμε τρεις εξισώσεις για τρεις αγνώστους: τις τάσεις των νημάτων T_1, T_2 και την γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου *α*. Το γεγονός ότι τα νήματα δεν ολισθαίνουν πάνω στον κύλινδρο όπως ξετυλίγονται, είναι οι «συνθήκες κύλισης» που συνδέουν τις γραμμικές επιταχύνσεις των βαριδίων με τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου. Όλα τα σημεία του κυλίνδρου έχουν την ίδια γωνιακή επιτάχυνση *α* και διαφορετικές γραμμικές επιταχύνσεις ανάλογες με την απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Έτσι τα δύο βαρίδια που συνδέονται σε σημεία διαφορετικής ακτίνας θα έχουν διαφορετικές επιταχύνσεις $a_1 = \alpha r_1$ και $a_2 = \alpha r_2$. Η φορά της γωνιακής επιτάχυνσης *α* καθορίζεται από το ποια ροπή είναι μεγαλύτερη τη χρονική στιγμή *t*=0 που αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο, η $T_1 r_1 = m_1 g r_1$ ή η $T_2 r_2 = m_2 g r_2$. Έστω ότι το σύστημα θα κινηθεί με τον κύλινδρο περιστρεφόμενο ωρολογιακά $m_1 r_1 > m_2 r_2$.

10



11



Συνθήκες κύλισης : $a_1 = \alpha r_1$ (5) και $a_2 = \alpha r_2$ (6)

Ευθύγραμμη κίνηση βαριδίου m_1: $\sum F_1 = m_1 a_1 \Rightarrow m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \Rightarrow m_1 g - T_1 = m_1 r_1 \alpha$ (1)

Ευθύγραμμη κίνηση βαριδίου m_2: $\sum F_2 = -m_2 a_2 \Rightarrow -m_1 g + T_2 = m_2 a_2 \Rightarrow -m_2 g + T_2 = m_2 r_2 \alpha$ (2)

Στροφική κίνηση κυλίνδρου: $\sum \tau_{CM} = I_C \alpha \Rightarrow T_1 r_1 - T_2 r_2 = \kappa M R^2 \alpha$ (3)

Στο συνδυασμό εξισώσεων r_1(1)+r_2(2)+(3) τάσεις απαλείφονται και βρίσκουμε τη γωνιακή επιτάχυνση α. Αντικαθιστώντας στις (1) και (2) βρίσκουμε τις τάσεις στα νήματα T_1 και T_2 , ενώ αντικαθιστώντας στις (5), (6) βρίσκουμε τις επιταχύνσεις των βαριδίων a_1 και a_2.

$$m_1 g r_1 - T_1 r_1 - m_2 g r_2 + T_2 r_2 + T_1 r_1 - T_2 r_2 = m_1 r_1^2 \alpha + m_2 r_2^2 \alpha + \kappa M R^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{m_1 r_1 - m_2 r_2}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \kappa M R^2} g$$

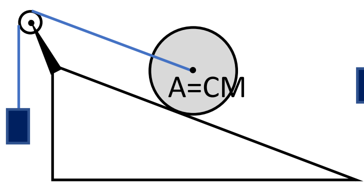
Ελέγχουμε ότι για κ=0, r_1= r_2 =R, παίρνουμε τους τύπους της απλής μηχανής Atwood (Εβδομάδα 6η-1, Προβλήματα με δύο σώματα, λυμένο παράδειγμα 7) όπου θεωρήσαμε την τροχαλία αβαρή και τις μάζες αναρτημένες από κοινό νήμα περασμένο στην περίμετρο της τροχαλίας. Πράγματι :

$$\alpha = \frac{m_1 r_1 - m_2 r_2}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \kappa M R^2} g \xrightarrow{\kappa \to 0,\ r_1 \to r_2 \to R} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \frac{g}{R}$$

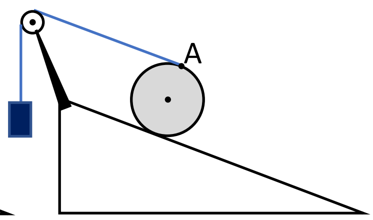
Η περίπτωση 11 είναι ίδια με την 10 με τη διαφορά ότι μόνο οι παράλληλες συνιστώσες του βάρους ενεργούν μέσω του νήματος στην τροχαλία : $B_1 = m_1 g \to m_1 g \sin\theta_1$, $B_2 = m_2 g \to m_2 g \sin\theta_2$. Επίσης στις (1) και (2) μπορούν να περιληφθούν και τριβές ολίσθησης αν το κεκλιμένο επίπεδο δεν είναι λείο: $f_1 = \mu_1 m_1 g \cos\theta_1$ και $f_2 = \mu_2 m_2 g \cos\theta_2$

7. Κύλινδρος που κατέρχεται σε κεκλιμένο επίπεδο ανεβάζοντας βαρίδιο μέσω αβαρούς τροχαλίας. Περιπτώσεις, **7, 8, 9.**

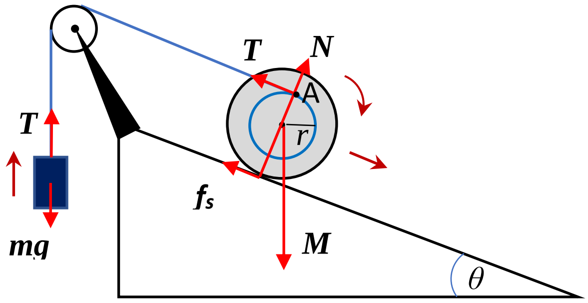
7



8



9



Θεωρούμε την τροχαλία αβαρή και χωρίς τριβές. Έχουμε δύο σώματα. Ο κύλινδρος εκτελεί στροφική και μεταφορική κίνηση, άρα δύο εξισώσεις. Το βαρίδιο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, άρα μια εξίσωση. Διαθέτουμε τρεις εξισώσεις για να υπολογίσουμε τρεις αγνώστους : τη γραμμική επιτάχυνση a_{CM} του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, την τάση του νήματος T και τη στατική τριβή f_s της οποίας είναι άγνωστη και η φορά.

Κάνουμε τη γενικότερη περίπτωση 9 και παίρνουμε τις άλλες δύο θέτοντας r=0 (7) και r=R (8). Οι συνθήκες κύλισης, πέραν αυτής του κυλίνδρου $\upsilon_{CM} = \omega R \Rightarrow a_{CM} = \alpha R$, είναι και ότι το σημείο Α του κυλίνδρου πρέπει να έχει την ίδια ταχύτητα με το βαρίδιο επειδή και τα δύο είναι σε επαφή με το νήμα και έχουν κοινή ταχύτητα με αυτό επειδή το νήμα ούτε τεντώνεται (μη εκτατό) ούτε ολισθαίνει πάνω στον κύλινδρο:

9: $\upsilon_{\beta\alpha\rho} \equiv \upsilon = \upsilon_{\mathrm{A}} \Rightarrow \upsilon = \upsilon_{CM} + \omega r = \upsilon_{CM}(1 + r/R)$, $\quad a = a_{CM} + \alpha r = a_{CM}(1 + r/R)$

7: $\upsilon_{\beta\alpha\rho} \equiv \upsilon = \upsilon_{\mathrm{A}} \Rightarrow \upsilon = \upsilon_{CM}$, $\quad a = a_{CM}$

8: $\upsilon_{\beta\alpha\rho} \equiv \upsilon = \upsilon_{\mathrm{A}} \Rightarrow \upsilon = \upsilon_{CM} + \omega R = 2\upsilon_{CM}$, $\quad a = a_{CM} + \alpha R = 2\alpha R$

Ευθύγραμμη κίνηση βαριδίου: $T - mg = ma \Rightarrow T = mg + ma_{CM}(1 + r/R)$ (1)

Μεταφορική κίνηση κυλίνδρου: $Mg\sin\theta - T - f_s = Ma_{CM}$ (2)

Στροφική κίνηση κυλίνδρου: $f_s R - Tr = I_C \alpha \Rightarrow f_s R - Tr = \kappa M R^2 \dfrac{a_{CM}}{R} \Rightarrow f_s - T(r/R) = \kappa M a_{CM}$ (3)

Προσθέτουμε τις (2) και (3) και αντικαθιστώντας την T από την (1) βρίσκουμε την επιτάχυνση a_{CM}:

$$Mg\sin\theta - T - f_s + f_s - T(r/R) = Ma_{CM} + \kappa M a_{CM} \Rightarrow$$

$$Mg\sin\theta - T(1 + r/R) = M(1+\kappa)a_{CM} \Rightarrow$$

$$Mg\sin\theta - mg(1 + r/R) - ma_{CM}(1 + r/R)^2 = M(1+\kappa)a_{CM} \Rightarrow$$

$$a_{CM} = \frac{Mg\sin\theta - mg(1 + r/R)}{m(1 + r/R)^2 + M(1+\kappa)}$$

Ελέγχουμε ότι αν δεν υπήρχε το βαρίδιο (m=0) θα είχαμε την επιτάχυνση κύλισης σε κεκλιμένο επίπεδο της περίπτωσης 1. Πράγματι:

$$a_{CM} = \frac{Mg\sin\theta - mg(1 + r/R)}{m(1 + r/R)^2 + M(1+\kappa)} \xrightarrow{m \to 0} \frac{g\sin\theta}{1+\kappa}$$

Αντικαθιστώντας την a_{CM} στην (1) βρίσκουμε την τάση του νήματος T και στη συνέχεια αντικαθιστώντας τις T και a_{CM} στην (2) ή την (3) βρίσκουμε τη στατική τριβή f_s.

Για τις περιπτώσεις 7 και 8 η λύση απλοποιείται σε

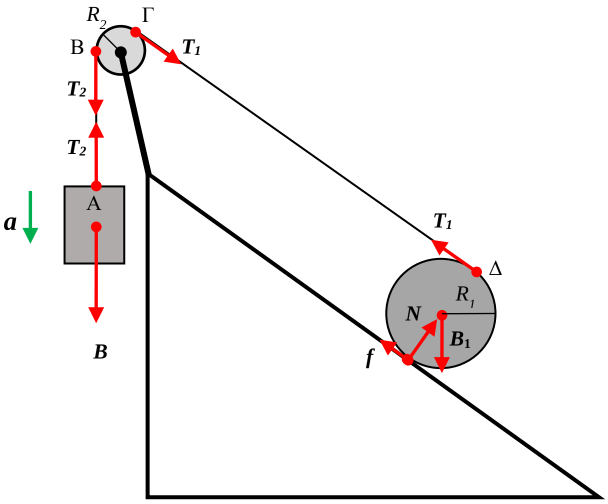
7: $a_{CM} \xrightarrow{r=0} a_{CM} = \dfrac{Mg\sin\theta - mg}{m + M(1+\kappa)}$ δύναμη στο CM

8: $a_{CM} \xrightarrow{r=R} a_{CM} = \dfrac{Mg\sin\theta - 2mg}{4m + M(1+\kappa)}$ δύναμη στην περιφέρεια

Παρατηρούμε ότι για $M\sin\theta = m(1 + r/R) \Rightarrow a_{CM} = 0$ τα σώματα ισορροπούν ενώ για $M\sin\theta < m(1 + r/R) \Rightarrow a_{CM} < 0$ το βαρίδιο κατέρχεται και ο κύλινδρος ανέρχεται.

8. Ίδιο με 7 αλλά η τροχαλία να έχει μάζα.

Προστίθεται απλά άλλη μια εξίσωση στο σύστημα εξισώσεών μας, αυτή της στροφικής κίνησης της τροχαλίας. Για απλότητα παίρνουμε τα νήματα στην περίμετρο των κυλίνδρων.



Όλα τα σημεία του νήματος (επειδή είναι μη εκτατό) κινούνται με την ίδια ταχύτητα και επιτάχυνση :
$\upsilon = \upsilon_{\rm A} = \upsilon_{\rm B} = \upsilon_{\Gamma} = \upsilon_{\Delta}$, $a = a_{\rm A} = a_{\rm B} = a_{\Gamma} = a_{\Delta}$

Όμως $\upsilon_{\Delta} = \upsilon_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi} + \upsilon_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho} = \upsilon_{CM} + \omega_1 R_1$ και επειδή ο κύλινδρος 1 κυλάει χωρίς ολίσθηση $\upsilon_{CM} = \omega_1 R_1$ έχουμε $\upsilon_{\Delta} = 2\upsilon_{CM} = 2\omega_1 R_1$

Για την τροχαλία η κίνηση είναι μόνο περιστροφική $\upsilon_{\rm B} = \upsilon_{\Gamma} = \omega_2 R_2$.

Το βαρίδιο εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση $\upsilon_{\rm A} = \upsilon$.

Άρα έχουμε $\upsilon = \omega_2 R_2 = 2\upsilon_{CM} = 2\omega_1 R_1$ και $\boxed{a = \alpha_2 R_2 = 2a_{CM} = 2\alpha_1 R_1}$ (0)

Η εφαρμογή του θεμελιώδους νόμου της μηχανικής (2ος νόμος Νεύτωνα) για τις μεταφορικές και στροφικές κινήσεις δίνει:

Μεταφορική βαριδίου: $\sum\limits_{\beta\alpha\rho\acute{\iota}\delta\iota o} F = ma \Rightarrow \boxed{B - T_2 = ma}$ (1)

Στροφική τροχαλίας : $\sum\limits_{\tau\rho o\chi\alpha\lambda\iota\alpha} \tau = I_2\alpha_2 \Rightarrow T_2 R_2 - T_1 R_2 = \kappa_2 M_2 R_2^2 \dfrac{a}{R_2} \Rightarrow \boxed{T_2 - T_1 = \kappa_2 M_2 a}$ (2)

Περιστροφική κυλίνδρου : $\sum\limits_{\kappa\acute{\upsilon}\lambda\iota\nu\delta\rho o\varsigma} \tau = I_1\alpha_1 \Rightarrow T_1 R_1 - f R_1 = \kappa_1 M_1 R_1^2 \dfrac{a}{2R_1} \Rightarrow$

$$\boxed{T_1 - f = \frac{1}{2}\kappa_1 M_1 a} \quad (3)$$

Μεταφορική κυλίνδρου στον x: $\sum\limits_{\kappa\upsilon\lambda\iota\nu\delta\rho o\varsigma} F_x = M_1 a_{CM} \Rightarrow T_1 + f - B_{1x} = M_1 \cdot \dfrac{a}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{T_1 + f - M_1 g\eta\mu\theta = \frac{1}{2} M_1 a} \quad (4)$$

Ισορροπία κυλίνδρου στον y: $\sum\limits_{\kappa\upsilon\lambda\iota\nu\delta\rho o\varsigma} F_y = 0 \Rightarrow N - B_{1y} = 0 \Rightarrow \boxed{N = M_1 g\sigma\upsilon\nu\theta}$ (5)

Προσθέτοντας τις εξισώσεις (1) ως (4) (τις τελευταίες δύο πολλαπλασιασμένες με 1/2) όλες οι άγνωστες δυνάμεις (τάσεις και στατική τριβή) απαλείφονται και μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε την επιτάχυνση a: (1)+(2)+(3)/2+(4)/2 →

$$B - T_2 + T_2 - T_1 + \frac{T_1}{2} - \frac{f}{2} + \frac{T_1}{2} + \frac{f}{2} - \frac{M_1 g\eta\mu\theta}{2} = ma + \kappa_2 M_2 a + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\kappa_1 M_1 a + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} M_1 a \Rightarrow$$

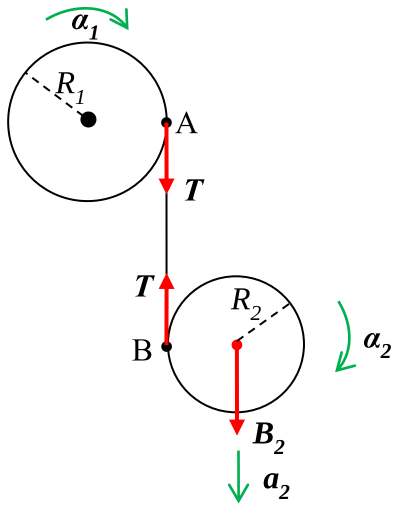
$$g(m - M_1 \eta\mu\theta/2) = \left(m + \kappa_2 M_2 + M_1(1+\kappa_1)/4\right) a \Rightarrow$$

$$\boxed{a = g\frac{m - M_1 \eta\mu\theta/2}{m + \kappa_2 M_2 + M_1(1+\kappa_1)/4}}$$

που για M_2=0 δίνει το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος για δύναμη νήματος στην περιφέρεια

9. Γιό-γιό που ξετυλίγεται από κινούμενο νήμα, περίπτωση **6**
Ο πάνω κύλινδρος στρέφεται γύρω από ακίνητο άξονα διαμέσου του κέντρου μάζας του. Το νήμα είναι αβαρές, μη εκτατό και δεν γλιστράει πάνω στους κυλίνδρους όπως ξετυλίγεται. Θεωρήστε ότι το νήμα παραμένει κατακόρυφο όταν το σύστημα αφήνεται να κινηθεί από την ηρεμία. Να υπολογιστούν: οι γωνιακές επιταχύνσεις των κυλίνδρων, η γραμμική επιτάχυνση του δεύτερου κυλίνδρου και η τάση του νήματος.

6



Υπάρχουν 4 άγνωστοι σε αυτό το πρόβλημα, α_1, α_2, a_2 και T οπότε χρειαζόμαστε 4 εξισώσεις για να τους βρούμε. Τρεις εξισώσεις θα μας δώσει ο νόμος του Νεύτωνα και μια η «συνθήκη κύλισης», το γεγονός δηλαδή ότι όλα τα σημεία του νήματος πρέπει να έχουν την ίδια ταχύτητα.

Στροφική κίνηση του 1

$$\sum_{CM}\tau_1 = I_1\alpha_1 \Rightarrow TR_1 = \kappa_1 m_1 R_1^2\alpha_1 \Rightarrow T = \kappa_1 m_1 R_1\,\alpha_1 \quad (1)$$

Στροφική κίνηση του 2

$$\sum_{CM}\tau_2 = I_2\alpha_2 \Rightarrow TR_2 = \kappa_2 m_2 R_2^2\alpha_2 \Rightarrow T = \kappa_2 m_2 R_2\alpha_2 \quad (2)$$

Μεταφορική κίνηση του 2

$$\sum F_2 = m_2 a_2 \Rightarrow B_2 - T = m_2 a_2 \quad (3)$$

Συνθήκη κύλισης (νήμα μη εκτατό που δεν γλιστράει πάνω στους κυλίνδρους)

$$\upsilon_A = \omega_1 R_1$$

$$\upsilon_B = \upsilon_2 - \omega_2 R_2$$

$$\upsilon_A = \upsilon_B \Rightarrow \omega_1 R_1 = \upsilon_2 - \omega_2 R_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 \Rightarrow a_2 = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 \quad (4)$$

Από (1) και (2)

$$\kappa_1 m_1 R_1\,\alpha_1 = \kappa_2 m_2 R_2\alpha_2 \quad (5')$$

Αντικαθιστώντας τις (1), (4) και στη συνέχεια την (5΄) στην (3) βρίσκουμε αρχικά την α_1 και στη συνέχεια έναν προς έναν τους υπόλοιπους αγνώστους

$$m_2 g - \kappa_1 m_1 R_1\,\alpha_1 = m_2(\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2) \Rightarrow m_2(\alpha_1 R_1 + \frac{\kappa_1 m_1 R_1\,\alpha_1}{\kappa_2 m_2}) + \kappa_1 m_1 R_1\,\alpha_1 = m_2 g \Rightarrow$$

$$\alpha_1 R_1(m_2 + \frac{\kappa_1}{\kappa_2}m_1 + \kappa_1 m_1) = m_2 g \Rightarrow \alpha_1 = \frac{g}{R_1}\frac{m_2}{\left(m_2 + \kappa_1 m_1\left(1 + 1/\kappa_2\right)\right)}$$

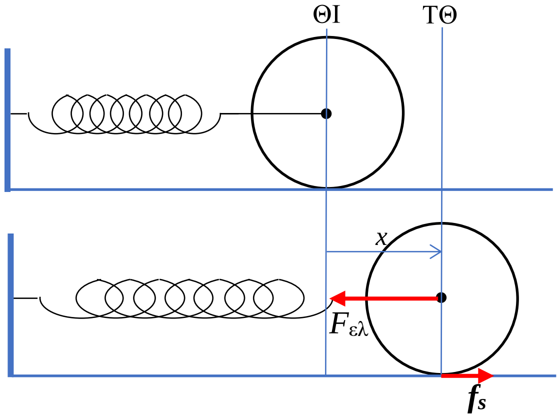
$$\alpha_2 = \frac{\kappa_1 m_1 R_1}{\kappa_2 m_2 R_2}\alpha_1 = \frac{\kappa_1 m_1 R_1}{\kappa_2 m_2 R_2}\frac{g}{R_1}\frac{m_2}{\left(m_2 + \kappa_1 m_1\left(1 + 1/\kappa_2\right)\right)} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{g}{R_2}\frac{\kappa_1 m_1/\kappa_2}{\left(m_2 + \kappa_1 m_1\left(1 + 1/\kappa_2\right)\right)}$$

$$a_2 = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 \Rightarrow a_2 = g \frac{m_2 + \kappa_1 m_1 / \kappa_2}{\left(m_2 + \kappa_1 m_1 \left(1 + 1/\kappa_2\right)\right)}$$

$$T = \kappa_1 m_1 R_1 \frac{g}{R_1} \frac{m_2}{\left(m_2 + \kappa_1 m_1 \left(1 + 1/\kappa_2\right)\right)} \Rightarrow T = \frac{\kappa_1 m_1 m_2 g}{\left(m_2 + \kappa_1 m_1 \left(1 + 1/\kappa_2\right)\right)}$$

Ταλάντωση

Δείξτε ότι το CM του κυλίνδρου θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση όπως ο κύλινδρος θα κυλίεται.



Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει: $a = -\omega^2 x$ όπου ω^2 σταθερά.
Έχουμε δύναμη στο κέντρο μάζας, άρα ως συνήθως έχουμε:

Συνθήκη κύλισης: $a = \alpha R$ (1)
Μεταφορική κίνηση: $ma = F_{\varepsilon\lambda} - f$ (2)
Στροφική κίνηση: $I\alpha = fR \Rightarrow \kappa m R^2 \alpha = fR \Rightarrow \kappa m a = f$ (3)

Προσθέτοντας τις (2) και (3) παίρνουμε πράγματι

$$ma + \kappa m a = F_{\varepsilon\lambda} - f + f \Rightarrow (1+\kappa) m a = -kx \Rightarrow a = -\frac{k}{m(1+\kappa)} x \Rightarrow a = -\omega^2 x$$

με $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m(1+\kappa)}}$

Η στατική τριβή είναι $f = \kappa m a = -\kappa m \dfrac{k}{m(1+\kappa)} x = -\left(\dfrac{\kappa}{1+\kappa}\right) kx$.

Ούτε η επιτάχυνση ούτε η στατική τριβή εξαρτώνται από την ακτίνα του κυλίνδρου!

Προσοχή στα πρόσημα στις παραπάνω εξισώσεις όπου γίνονται πολλά λάθη και το αποτέλεσμα βγαίνει συχνά λάθος ή δεν βγαίνει καθόλου. Δεν χρησιμοποιούμε άξονες x, y, z για να μην μπλέξουμε σε περιπτώσεις με το πρόσημο του x και το πρόσημο της ροπής της f. Βάζουμε στην (2) την φορά της επιτάχυνσης στη φορά της μεγαλύτερης δύναμης που είναι η $F_{\varepsilon\lambda}$ (δες δύναμη στο κέντρο μάζας). Στην (3) δεν χρειάζεται πρόσημο επειδή υπάρχει μια ροπή και η γωνιακή επιτάχυνση θα έχει αναγκαστικά τη φορά της. Δεν αντικαθιστούμε τον τύπο της $F_{\varepsilon\lambda} = -kx$ παρά μόνο στο τέλος.

Στη συνέχεια ισχύουν όσα γνωρίζουμε για την απλή αρμονική ταλάντωση υλικού σημείου (εφόσον ισχύει η συνθήκη κύλισης) όπως : χρονικές εξισώσεις, διατήρηση ενέργειας κλπ. με μόνη αλλαγή την αντικατάσταση $\omega = \sqrt{k/m} \rightarrow \omega = \sqrt{k/m(1+\kappa)}$

Αριθμητικά δεδομένα: m=2 kg, κ=1/2 (κύλινδρος ή δίσκος), k=3 N/m (πολύ μαλακό), g=9,8 m/s^2, μ_s=0,75.

Απομακρύνουμε τον κύλινδρο κατά A=5 cm και τον αφήνουμε ελεύθερο.
Σε πόσο χρόνο θα επιστρέψει στη θέση ισορροπίας του?
Με τι ταχύτητα θα περάσει από τη θέση ισορροπίας?
Ποιο είναι το μέγιστο πλάτος κατά το οποίο μπορούμε να τον απομακρύνουμε ώστε να έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση?

Όσο μακριά και να τον απομακρύνουμε θα γυρίσει στη θέση ισορροπίας του στον ίδιο χρόνο, που είναι ίσος με ¼ της περιόδου

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m(1+\kappa)}}=\sqrt{\frac{3}{2(1+0,5)}}=1\text{ rad/s}\Rightarrow t=\frac{T}{4}=\frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}=1,57\text{ s}$$

Από διατήρηση ενέργειας παίρνουμε

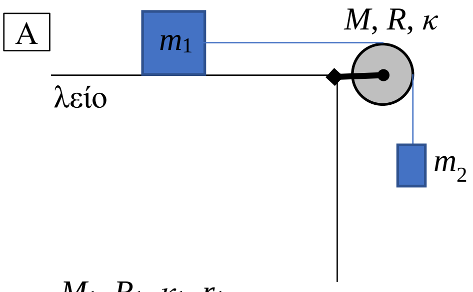
$$E_0=E_A\Rightarrow K_0+U_0=K_A+U_A\Rightarrow\frac{1+\kappa}{2}m\upsilon^2+0=0+\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow\upsilon=\sqrt{\frac{k}{m(1+\kappa)}}A=\omega A=1\cdot\ 0,05=0,05\text{ m/s}$$

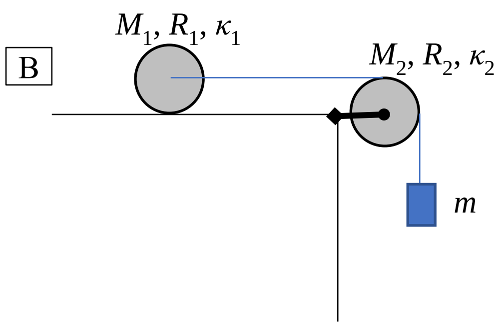
Σε κάθε θέση x η στατική τριβή έχει τιμή ίση με: $f=\kappa ma=-\kappa m\frac{k}{m(1+\kappa)}x=-\frac{\kappa}{1+\kappa}kx$

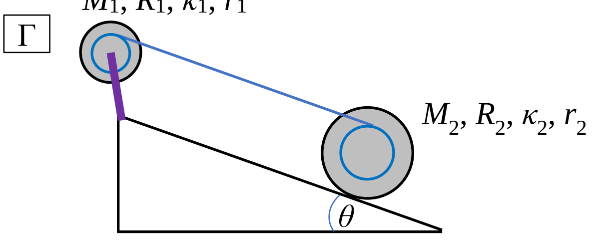
Η μέγιστη τιμή που θα πάρει το μέτρο της f θα είναι $f_{\max}=\frac{\kappa}{1+\kappa}kA$ όμως για αυτήν πρέπει να ισχύει

$$f_{\max}\le\mu_s N\Rightarrow\frac{\kappa}{1+\kappa}kA\le\mu_s mg\Rightarrow A_{\max}=\frac{\mu_s mg}{k}\frac{1+\kappa}{\kappa}=\frac{\mu_s g}{\omega^2\kappa}=\frac{0,75\cdot\ 9,8}{1\cdot\ 0,5}=14,7\text{ m}$$

ΚΑΝΤΕ ΜΟΝΟΙ ΣΑΣ ΤΙΣ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ, ΕΦΑΡΜΟΖΟΝΤΑΣ ΤΑ ΠΑΡΑΠΑΝΩ







Απαντήσεις :

A $\quad a=\frac{m_2 g}{m_1+m_2+\kappa M}$, $\quad T_1=\frac{m_1 m_2 g}{m_1+m_2+\kappa M}$, $\quad T_2=\frac{(m_1+\kappa M)m_2 g}{m_1+m_2+\kappa M}$

B $\quad a=\frac{mg}{m+(1+\kappa_1)M_1+\kappa_2 M_2}$, $\quad T_1=\frac{(1+\kappa_1)M_1}{m+(1+\kappa_1)M_1+\kappa_2 M_2}mg$, $\quad T_2=\frac{(1+\kappa_1)M_1+\kappa_2 M_2}{m+(1+\kappa_1)M_1+\kappa_2 M_2}mg$,

$$f_s=\frac{\kappa_1 M_1}{m+(1+\kappa_1)M_1+\kappa_2 M_2}mg$$

Γ $$a = a_2 = \frac{M_2}{(1+\kappa_2)M_2 + \kappa_1 M_1 (R_1/r_1)^2 (1+r_2/R_2)^2} g\sin\theta\,,$$

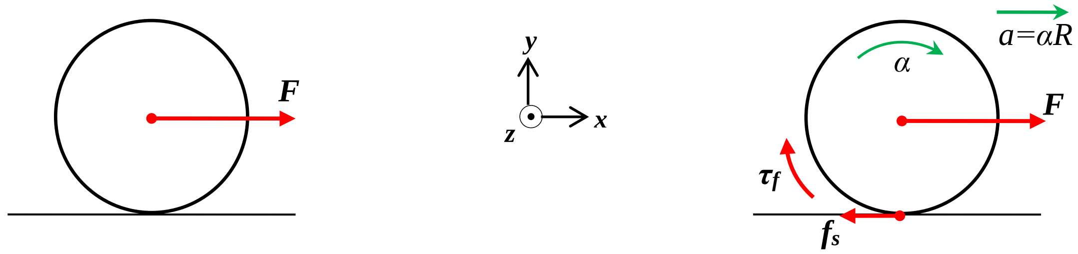
$$T_1 = \frac{\kappa_1 M_1 (R_1/r_1)^2 (1+r_2/R_2)}{(1+\kappa_2)M_2 + \kappa_1 M_1 (R_1/r_1)^2 (1+r_2/R_2)^2} M_2 g\sin\theta\,,$$

$$f_s = \frac{\kappa_2 M_2 + \kappa_1 M_1 (R_1/r_1)^2 (1+r_2/R_2) r_2/R_2}{(1+\kappa_2)M_2 + \kappa_1 M_1 (R_1/r_1)^2 (1+r_2/R_2)^2} M_2 g\sin\theta$$

$$\alpha_2 = a/R_2\,, \qquad \alpha_1 = (1+r_2/R_2)\,a/r_1$$

Κύλιση

Συνθήκη κύλισης – μετάβαση σε κύλιση χωρίς ολίσθηση



Στο κέντρο μάζας του κυλινδρικού σώματος του σχήματος που έχει ροπή αδράνειας $I = \kappa m R^2$ και συντελεστές στατικής και κινητικής τριβής με το δάπεδο μ_s και μ_k αντίστοιχα, εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή t=0, δύναμη F παράλληλα με το δάπεδο.

Α) Να βρείτε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η F ώστε το σώμα να κυλίσει χωρίς ολίσθηση.

Β) Να εξετάσετε αν η παραπάνω συνθήκη ικανοποιείται για τα εξής αριθμητικά δεδομένα : κ = 0,500 , m= 10,0 kg, R = 0,200 m, F = 80,0 N, μ_s = 0,250 και μ_k = 0,240

Γ) Να βρείτε την κίνηση που θα κάνει το σώμα με αυτά τα δεδομένα

Δ) Ποια κίνηση θα εκτελείται πιο γρήγορα? Η μεταφορική $a > \alpha R$ ή η περιστροφική $a < \alpha R$?

Ε) Υπάρχει περίπτωση η περιστροφική να πραγματοποιείται πιο γρήγορα από την μεταφορική?

ΣΤ) Τη χρονική στιγμή t=10 s να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του κυλίνδρου και τα έργα της δύναμης F και της τριβής και να επιβεβαιώστε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

Ζ) Αν σταματήσουμε να τραβάμε το σώμα, καταργώντας τη δύναμη F τη χρονική στιγμή t=10 s, να βρείτε σε πόσο χρονικό διάστημα θα αποκατασταθεί κύλιση και ποια θα είναι η ταχύτητα κύλισης.

Η) Να δείξετε ότι κατά την κύλιση ο λόγος της κινητικής ενέργειας μεταφοράς προς την κινητική ενέργεια περιστροφής είναι ίσος με 1/κ.

Θ) Να υπολογίσετε το έργο της τριβής ολίσθησης μέχρι να επιτευχθεί η κύλιση, αφού καταργηθεί η F.

Ι) Να υπολογίσετε την στροφορμή του κυλίνδρου ως προς το σημείο επαφής Ε

Λύση

Η δύναμη τείνει να προκαλέσει ολίσθηση του σώματος πάνω στο δάπεδο προς τη φορά της. Εμφανίζεται τριβή προς την αντίθετη φορά. Αυτή δρα διπλά: 1) μειώνει την ολική δύναμη και άρα τη γραμμική επιτάχυνση ενώ ταυτόχρονα 2) προκαλεί γωνιακή επιτάχυνση και περιστροφή του σώματος. Εφόσον ικανοποιείται η συνθήκη κύλισης $\upsilon = \omega R \Rightarrow a = \alpha R$ (1), δεν θα υπάρχει ολίσθηση και η τριβή θα είναι στατική. Για τη στατική τριβή δεν υπάρχει τύπος. Η τιμή της στατικής τριβής αυτορυθμίζεται, όσο αυτό είναι δυνατό, ώστε να ικανοποιηθεί η συνθήκη κύλισης. Οι τιμές της πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση $|f_s| \leq \mu_s N$ (2). Πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα, θεωρώντας ότι ισχύει η συνθήκη κύλισης (1), να καταλήξουμε σε μια έκφραση για την τιμή της στατικής τριβής και μετά να εξετάσουμε κάτω από ποιες συνθήκες ικανοποιείται η παραπάνω ανίσωση (2).

Οι νόμοι του Νεύτωνα δίνουν :

y-ισορροπία: $N - B = 0 \Rightarrow \boxed{N = B = mg}$

$$\left.\begin{array}{ll} x\text{-μετακίνηση}: & F - f_s = ma \\ z\text{-περιστροφή}: & -f_s R = -I\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} F - f_s = ma \\ f_s = \kappa m a \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f_s = -\dfrac{\kappa}{1+\kappa} F \\ a = \dfrac{1}{1+\kappa}\dfrac{F}{m} \end{array}}$$

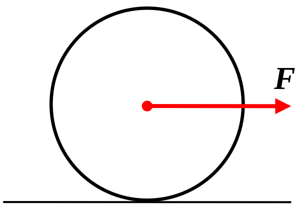
Η γραμμική επιτάχυνση είναι σταθερή και το κέντρο μάζας εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Για να πραγματοποιείται κύλιση, δηλαδή η τριβή να είναι στατική, το μέτρο της τριβής που απαιτείται δεν πρέπει να υπερβαίνει τη μέγιστη δυνατή τιμή $|f_s| \leq \mu_s N$. Αυτή είναι μια σχέση που συνδέει όλες τις παραμέτρους του προβλήματος:

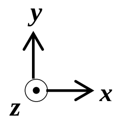
$$|f_s| \leq \mu_s N \Rightarrow \frac{\kappa}{1+\kappa} F \leq \mu_s B \Rightarrow \boxed{F \leq \frac{1+\kappa}{\kappa}\mu_s mg}$$

Άρα υπάρχει μια μέγιστη εξωτερική δύναμη που επιτρέπεται να ασκήσουμε για να έχουμε κύλιση, $F_{\max\ \kappa\upsilon\lambda} = \mu_s g \dfrac{1+\kappa}{\kappa} m$ και επομένως η μέγιστη δυνατή επιτάχυνση κύλισης είναι $a_{\max\ \kappa\upsilon\lambda} = \mu_s g/\kappa$

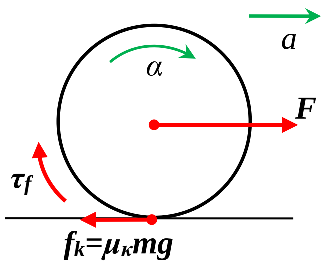
Β) $\dfrac{1+\kappa}{\kappa}\mu_s mg = \dfrac{1+0,5}{0,5} 0,25 \cdot 10 \cdot 10 = 75\ \text{N} < 80\ \text{N} = F$

Άρα η συνθήκη κύλισης δεν ικανοποιείται.





Κύλιση και ολίσθηση



Γ) Επειδή η συνθήκη κύλισης δεν ικανοποιείται το σώμα θα ολισθαίνει πάνω στο δάπεδο ενώ κάνει ταυτόχρονα περιστροφική και μεταφορική κίνηση. Το σημείο επαφής θα σύρεται πάνω στο δάπεδο, δεν θα είναι στιγμιαία ακίνητο. Πρέπει να ξαναλύσουμε το πρόβλημα χωρίς να ισχύει η (1) $\upsilon = \omega R \Rightarrow a = \alpha R$. Όμως τώρα είναι γνωστή η τριβή ολίσθησης για την οποία υπάρχει ο τύπος $f_k = \mu_k N$.

Οι νόμοι του Νεύτωνα δίνουν :

y-ισορροπία: $N - B = 0 \Rightarrow N = B = mg$

$$\left.\begin{array}{ll} x\text{-μετακίνηση}: & F - f_k = ma \\ z\text{-περιστροφή}: & -f_k R = -I\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} F - \mu_k mg = ma \\ f_k = \kappa m R \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = \dfrac{F}{m} - \mu_k g \\ \alpha = \dfrac{f_k}{\kappa m R} = \dfrac{\mu_k mg}{\kappa m R} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\mu_k g}{\kappa R} \end{array}$$

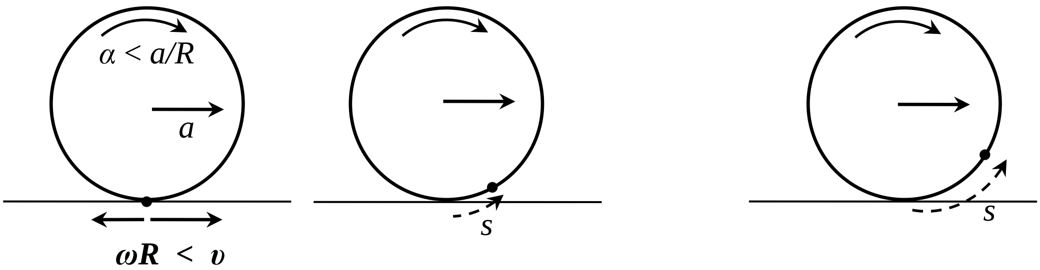
$$a=\frac{80}{10}-0,24\cdot 10=5,60\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ ,\quad \alpha=\frac{0,24\cdot 10}{0,5\cdot 0,2}=24,0\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\ ,\quad \alpha R=24\cdot 0,2=4,80\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Το σώμα θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ταυτόχρονα με ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση με τις παρακάτω εξισώσεις κίνησης :

$$\upsilon=at \qquad \omega=\alpha t$$

$$x=\frac{1}{2}at^2 \qquad \theta=\frac{1}{2}\alpha t^2$$

Επειδή είναι $a>\alpha R\Rightarrow \upsilon>\omega R$ το σώμα θα μετακινείται πιο γρήγορα από ότι περιστρέφεται (δεν θα σπινιάρει). Δηλαδή το εκάστοτε κάποια στιγμή σημείο επαφής του κυλίνδρου θα κινηθεί την επόμενη στιγμή περιστροφικά προς τα μπροστά. Ο κύλινδρος θα φαίνεται ότι μετακινείται προς τα μπροστά ενώ ταυτόχρονα περιστρέφεται ανάποδα, προς τα πίσω όπως στο σχήμα.



Το μήκος του τόξου s είναι η διαφορά των δύο μηκών, της μεταφοράς μείον της περιστροφής και είναι το μήκος κατά το οποίο σύρεται το σώμα πάνω στο δάπεδο. Η τριβή που είναι εφαπτόμενη και στις δύο επιφάνειες θα μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά s.

$$s=x-R\theta=\frac{1}{2}(a-\alpha R)t^2$$

Ε) Για να είναι $a<\alpha R\Rightarrow \frac{F}{m}-\mu_k g<\frac{\mu_k g}{\kappa R}R\Rightarrow F<\frac{1+\kappa}{\kappa}\mu_k mg<\frac{1+\kappa}{\kappa}\mu_s mg=F_{\max\ \text{κυλ}}$, δηλαδή θα πρέπει $F<F_{\max\ \text{κυλ}}$ που είναι άτοπο, επειδή όταν ισχύει $F<F_{\max\ \text{κυλ}}$ έχουμε κύλιση $a=\alpha R$. Άρα ποτέ όταν τραβάμε από το κέντρο μάζας παράλληλα με το δάπεδο έναν κύλινδρο δεν θα είναι η περιστροφή του πιο γρήγορη από τη μεταφορά του (δεν θα σπινιάρει).

ΣΤ)

$$\upsilon=at=5,6\cdot 10=56,0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \omega=\alpha t=24\cdot 10=240\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

$$x=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}5,6\cdot 10^2=280\ \mathrm{m} \qquad \theta=\frac{1}{2}\alpha t^2=\frac{1}{2}24\cdot 10^2=1200\ \mathrm{rad}$$

$$s=x-R\theta=280-0,2\cdot 1200=280-240=40\ \mathrm{m}$$

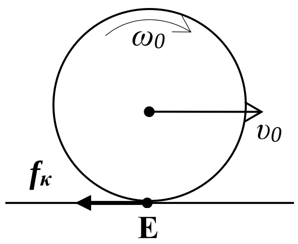
$$I=\kappa mR^2=0,5\cdot 10\cdot 0,2^2=0,200\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$$

$$K=\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}10\cdot 56^2+\frac{1}{2}0,2\cdot 240^2=15,680+5.760=21.440\ \mathrm{J}=214\cdot 10^2\ \mathrm{J}$$

$$W=W_F+W_f=F\cdot x-f\cdot s=80\cdot 280-24\cdot 40=22.400-960=21.440\ \mathrm{J}=214\cdot 10^2\ \mathrm{J}$$

Σε ενδιάμεσους υπολογισμούς κρατάμε πάνω από τρία σημαντικά ψηφία όμως στο τελικό αποτέλεσμα στρογγυλοποιούμε στα τρία

Ζ) Τη χρονική στιγμή t=10 s ξεκινάμε άλλο χρονόμετρο ενώ η F καταργείται και ο κύλινδρος βρίσκεται με αρχική γραμμική ταχύτητα υ_0=56 m/s και με αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0 =240 rad/s.



Επειδή ο κύλινδρος δεν κυλίεται $\upsilon_0 \neq \omega_0 R$ υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ των δύο επιφανειών στο σημείο επαφής τους Ε και συνεχίζει να υφίσταται ή τριβή ολίσθησης $f_k = \mu_k N$, η οποία επειδή $\upsilon_0 > \omega_0 R$ έχει φορά προς τα πίσω. Το σώμα μετακινείται προς τα μπροστά πιο γρήγορα απ' ότι περιστρέφεται και άρα το σημείο επαφής ολισθαίνει προς τα εμπρός σε σχέση με το πάτωμα. Η τριβή ολίσθησης είναι η μόνη οριζόντια δύναμη που ασκείται στον κύλινδρο και το αποτέλεσμά της είναι να επιβραδύνει την μεταφορική του κίνηση μειώνοντας την ταχύτητα του κέντρου μάζας ($\upsilon_0 \downarrow$) ενώ ταυτόχρονα η ροπή της ως προς το κέντρο μάζας επιταχύνει την περιστροφική του κίνηση αυξάνοντας την γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου ($\omega_0 \uparrow$). Όταν οι δύο ταχύτητες εξισωθούν η τριβή θα μηδενιστεί, δηλαδή όταν σταματήσει η ολίσθηση και επιτευχθεί κύλιση $\upsilon_r = \omega_r R$. Στη συνέχεια το CM του κυλίνδρου θα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Η αρχική ενέργεια δεν διατηρείται καθώς η τριβή καταναλώνει ενέργεια παράγοντας αρνητικό έργο.

Μπορούμε να βρούμε την τελική ταχύτητα κύλισης υ_r πριν να λύσουμε τις εξισώσεις του Νεύτωνα. Παρατηρούμε ότι όλες οι δυνάμεις (*B, N,* f_k) διέρχονται από το σημείο επαφής Ε. Άρα δεν επάγουν ροπές γύρω από το σημείο Ε. Έτσι η στροφορμή γύρω από το σημείο επαφής Ε θα παραμείνει σταθερή. Η στροφορμή για ένα σύστημα σωματιδίων είναι ίση με τη στροφορμή του κέντρου μάζας συν τη στροφορμή γύρω από το κέντρο μάζας. Έτσι έχουμε :

$$L_{(\mathrm{E})} = L'_{(\mathrm{E})} \Rightarrow m\upsilon_0 R + I\omega_0 = m\upsilon_r R + I\omega_r \Rightarrow m\upsilon_0 R + \kappa m R^2 \omega_0 = m\upsilon_r R + \kappa m R^2\, \upsilon_r / R \Rightarrow$$

Καθώς η γωνιακή ταχύτητα του κέντρου μάζας γύρω από το σημείο επαφής Ε είναι η γραμμική του ταχύτητα, που είναι κάθετη στην ευθεία Ε-CM, δια την απόστασή τους που είναι όση η ακτίνα. Έτσι έχουμε:

$$\upsilon_0 + \kappa R\omega_0 = \upsilon_r(1+\kappa) \Rightarrow \boxed{\upsilon_r = \frac{\upsilon_0 + \kappa R\omega_0}{1+\kappa}}$$

Για να υπολογίσουμε τη χρονική στιγμή t_r καθώς και τη θέση x_r όπου θα επέλθει κύλιση λύνουμε τις εξισώσεις του Νεύτωνα όπως και πριν, τώρα με F=0.

$$mg - N = 0\,, \quad f_k = \mu_k N = \mu_k mg\,, \quad f_k = ma \Rightarrow \mu_k mg = ma \Rightarrow a = \mu_k g$$

$$\upsilon = \upsilon_0 - at \quad , \quad x = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}at^2 \quad \text{ή} \quad x = \frac{\upsilon_0^2 - \upsilon^2}{2a}$$

Για την περιστροφική κίνηση γυρω από το CM η εξίσωση είναι η ιδια με πριν

$$f_k R = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\mu_k mgR}{\kappa m R^2} \Rightarrow \alpha = \frac{\mu_k g}{\kappa R}\,,$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad \theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}$$

Ο χρόνος κύλισης βρίσκεται από :

$$\upsilon_r = \upsilon_0 - at_r \Rightarrow t_r = \frac{\upsilon_0 - \upsilon_r}{\mu_k g} = \frac{1}{\mu_k g}\left(\upsilon_0 - \frac{\upsilon_0 + \kappa R\omega_0}{1+\kappa}\right) \Rightarrow \boxed{t_r = \frac{\kappa}{1+\kappa}\,\frac{\upsilon_0 - R\omega_0}{\mu_k g}}$$

Τη χρονική στιγμή t_r :

$$\omega_r = \omega_0 + \alpha t_r = \omega_0 + \frac{\mu_k g}{\kappa R}\,\frac{\kappa}{1+\kappa}\,\frac{\upsilon_0 - R\omega_0}{\mu_k g} = \frac{R(1+\kappa)\omega_0 + \upsilon_0 - R\omega_0}{R(1+\kappa)} = \frac{\upsilon_0 + \kappa R\omega_0}{R(1+\kappa)} = \frac{\upsilon_r}{R}$$

ισχύει πράγματι η συνθήκη κύλισης.

Πριν αρχίσει να κυλάει το σώμα θα διανύσει απόσταση :

$$x = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}at^2 \text{ ή } x_r = \frac{\upsilon_0^2 - \upsilon_r^2}{2a}$$

και θα διαγράψει γωνία

$$\theta_r = \omega_0 t_r + \frac{1}{2}\alpha t_r^2 \qquad \theta_r = \frac{\omega_r^2 - \omega_0^2}{2\alpha}$$

Η τριβή έχει μετακινήσει το σημείο εφαρμογής της κατά

$$s_r = x_r - \theta_r R$$

Στη συνέχεια ($t > t_r$) η κινητική τριβή μηδενίζεται και το κέντρο μάζας εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση καθώς το σώμα κυλιέται.

Η), Θ) Ι) Υπολογισμοί :

$$\upsilon_r = \frac{\upsilon_0 + \kappa R\omega_0}{1+\kappa} = \frac{56 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 240}{1 + 0,5} = \frac{160}{3} = 53,333 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$t_r = \frac{\kappa}{1+\kappa}\frac{\upsilon_0 - R\omega_0}{\mu_k g} = \frac{0,5}{1+0,5}\frac{56 - 0,2 \cdot 240}{0,24 \cdot 10} = \frac{10}{9} = 1,111 \text{ s}$$

$$a = \mu_k g = 0,24 \cdot 10 = 2,40 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\upsilon_r = \upsilon_0 - at_r = 56 - 2,4 \cdot 1,111 = 53,333 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x_r = \upsilon_0 t_r - \frac{1}{2}at_r^2 \Rightarrow x_r = 56 \cdot 1,111 - \frac{1}{2}2,4 \cdot 1,111^2 = 60,74 \text{ m}$$

$$x_r = \frac{\upsilon_0^2 - \upsilon_r^2}{2a} = \frac{56^2 - 53,3333^2}{2 \cdot 2,4} = 60,7408148 = 60,74 \text{ m}$$

$$\alpha = \frac{\mu_k g}{\kappa R} = 24,0 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_r = \omega_0 + \alpha t_r = 240 + 24 \cdot 1,1111 = 266,67 \ \frac{\text{rad}}{s}$$

$$\omega_r = \frac{\upsilon_r}{R} = \frac{53,33}{0,2} = 266,67 \ \frac{\text{rad}}{s}$$

$$\theta_r = \omega_0 t_r + \frac{1}{2}\alpha t_r^2 = 240 \cdot 1,111 + \frac{24 \cdot 1,111^2}{2} = 281,481481 = 281,48 \text{ rad}$$

$$\theta_r = \frac{\omega_r^2 - \omega_0^2}{2\alpha} = \frac{266,666^2 - 240^2}{2 \cdot 24} = 281,48 \text{ rad}$$

$$s_r = x_r - \theta_r R = 60,74 - 281,48 \cdot 0,2 = 4,4445186 \text{ m} = 4,44 \text{ m}$$

$$K_0 = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = 21.440 \text{ J}$$

$$K_r = \frac{1}{2}m\upsilon_r^2 + \frac{1}{2}I\omega_r^2 = \frac{1}{2}10 \cdot 53,333^2 + \frac{1}{2}0,2 \cdot 266,666^2 = 14.222,22 + 7.111,11 = 21.333,33 \text{ J}$$

$$\Delta K = K_r - K_0 = 21.333,33 - 21.440 = -106,6667 \text{ J} = -106,67 \text{ J}$$

$$f_k = \mu_k mg = 0,24 \cdot 10 \cdot 10 = 24 \text{ N}$$

$$W_f = -f_k \cdot s_r = -24 \cdot 4,44 = -106,67 \text{ J}$$

$$\frac{K_T}{K_R} = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon^2}{\frac{1}{2}I\omega_r^2} = \frac{m\omega^2 R^2}{\kappa m R^2 \omega^2} \Rightarrow \frac{K_T}{K_R} = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{0,5} = 2$$

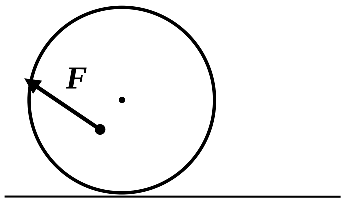
$$\frac{K_T}{K_R} = \frac{14.222,22}{7.111,11} = 2$$

$$L_{(CM)} = I\omega = 0,2 \cdot 266,6666 = 53,33 \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$$

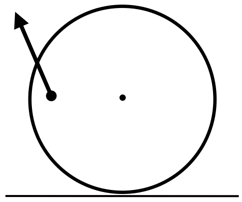
$$L_{(E)} = m\upsilon R + I\omega = 10\cdot 53,33333 \cdot 0,2 + 0,2\cdot 266,6666 = 160 \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$$

$$L_{(E)} = I_{(\mathrm{E})}\omega = (I + mR^2)\omega = (0,2 + 10\cdot 0,2^2)\cdot 266,666 = 160 \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$$

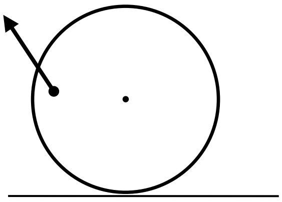
Προσδιορίστε προς τα που θα κινηθεί ο τροχός : δεξιά, αριστερά, ή θα ισορροπεί?



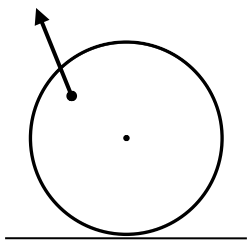
Α



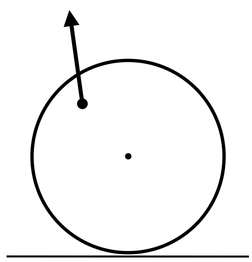
Β



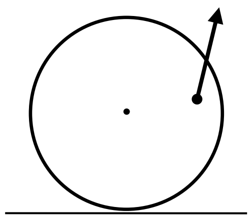
Γ



Δ

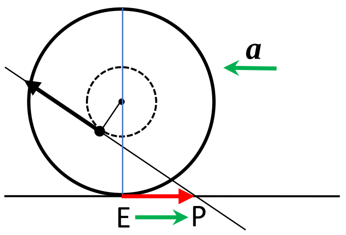


Ε

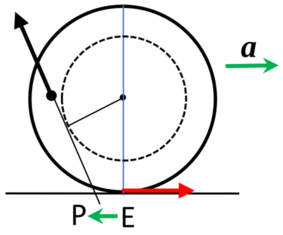


ΣΤ

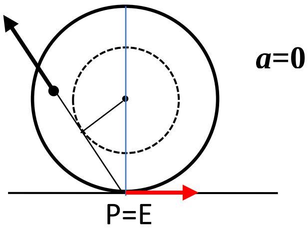
Σχεδιάζουμε τη φορά της στατικής τριβής ώστε να έχει αντίθετη ροπή από την F (εκτός αν η F είναι στο CM ή κοντά στο CM και σχεδόν παράλληλη με το δάπεδο που δεν ισχύει στις περιπτώσεις μας)
Βρίσκουμε το σημείο τομής P του φορέα της δύναμης με το δάπεδο.
Η επιτάχυνση είναι στην αντίθετη κατεύθυνση από την κατεύθυνση του ΕΡ (όπου Ε το σημείο επαφής)



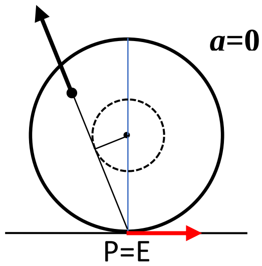
Α: αριστερά



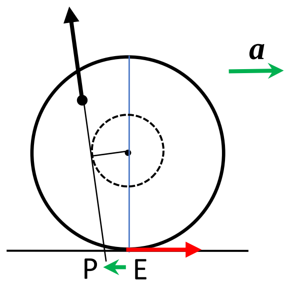
Β: δεξιά



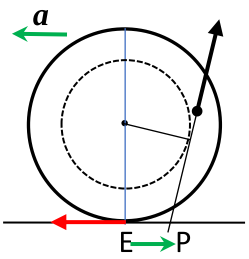
Γ: ακινησία



Δ: ακινησία



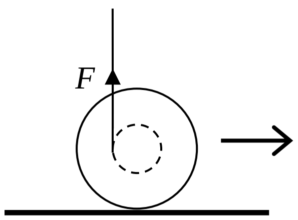
Ε



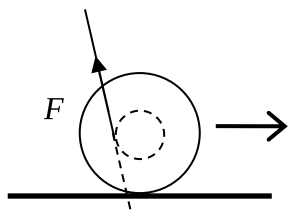
ΣΤ

30. Στα παρακάτω σχήματα το βέλος δείχνει την κατεύθυνση προς την οποία θα κινηθεί το καρούλι όταν το τραβήξουμε μέσω του νήματος με δύναμη *F* τέτοια ώστε να προκληθεί κύλιση. Ένα σχήμα είναι λάθος. Ποιο;

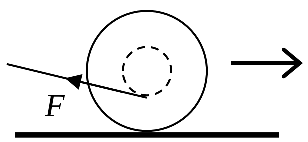
Α)



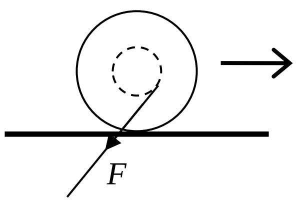
Β)



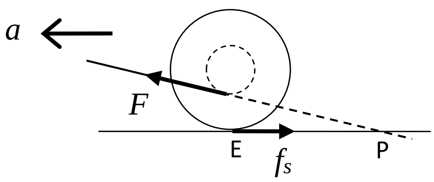
Γ)



Δ)

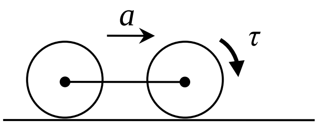


30. Γ) Αυτό που σχηματίζει τη μικρότερη γωνία με την οριζόντιο.
Σε όλα τα σχήματα η τριβή είναι προς τα δεξιά. Αυτό συμβαίνει γιατί και η μετακίνηση και η περιστροφή που προκαλεί η *F* τείνουν να ολισθήσουν το σημείο επαφής με το δάπεδο προς τα αριστερά (προς τα πίσω). Αν είναι σε ένα μόνο από τα σχήματα το σώμα να επιταχύνεται προς τα αριστερά αυτό θα συμβαίνει στο Γ όπου η παράλληλη συνιστώσα της *F* έχει τη μεγαλύτερη τιμή και θα μπορεί να υπερνικά την τριβή (αν είναι το Β λάθος τότε και το Γ θα ήταν λάθος, δύο λάθη). Το Α σίγουρα θα πάει προς τα δεξιά γιατί εκεί δείχνει η μόνη οριζόντια δύναμη, η τριβή.

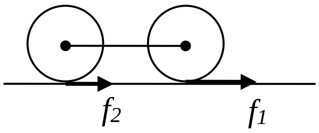


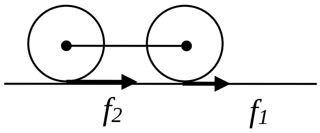
Γραφικά. Μόνο στην περίπτωση Γ το σημείο τομής Ρ είναι δεξιά από το σημείο επαφής Ε. Η επιτάχυνση δείχνει αντίπλευρα από το Ρ.

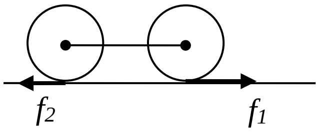
31. Ένα όχημα στο οποίο ο κινητήρας μεταδίδει ροπή τ στους μπροστινούς τροχούς, επιταχύνεται κυλώντας.

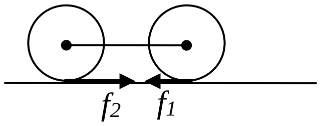


Η στατική τριβή από το οδόστρωμα στους τροχούς απεικονίζεται σωστά στο σχήμα :

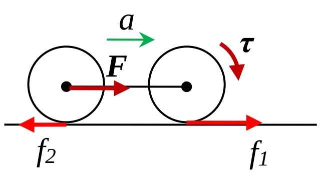
Α) 

Β) 

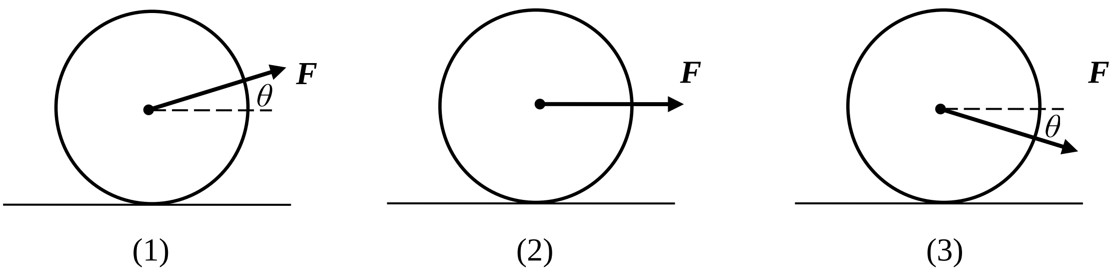
Γ) 

Δ) 

31. Γ) Στον μπροστινό τροχό έχουμε εφαρμογή αμιγούς ροπής και η τριβή έχει τέτοια φορά ώστε να επάγει αντίθετη ροπή. Αυτή προκαλεί επιτάχυνση προς τα μπροστά και έτσι ο μπροστινός τροχός θα τραβήξει τον άξονα προς τα μπροστά. Στον πίσω τροχό έχουμε δύναμη που εφαρμόζεται στο κέντρο μάζας από τον άξονα. Άρα η τριβή έχει φορά αντίθετη της δύναμης. Και στις δύο περιπτώσεις η τριβή αντιστέκεται στην ολίσθηση που τείνει να προκαλέσει το εξωτερικό αίτιο στο σημείο επαφής του σώματος με το δάπεδο. Η τριβή μπροστά θα είναι μεγαλύτερη από την τριβή πίσω για να επιταχυνθεί το όχημα προς τα μπροστά.

Γ) 

34. Στον τροχό του παρακάτω σχήματος ασκούμε δύναμη στο κέντρο μάζας του. Για ποια γωνία εφαρμογής από την οριζόντιο μπορούμε να ασκήσουμε τη μεγαλύτερη δύναμη F και να έχουμε κύλιση χωρίς το σώμα να αρχίσει να ολισθαίνει ;



Α) 1 Β) 2 Γ) 3 Δ) και στην 1 και στην 3 αλλά για διαφορετικές γωνίες

34. Γ) Τόσο η στατική τριβή που θα εμφανιστεί όσο και η επιτάχυνση θα είναι ανάλογες της παράλληλης συνιστώσας της εξωτερικής δύναμης: $f_s \propto -F_{\parallel}$, $a \propto F_{\parallel}$. Όταν η δύναμη F εφαρμόζεται προς τα κάτω αυξάνει την κάθετη αντίδραση του δαπέδου $N = B + F_{\perp}$ και άρα το άνω όριο της στατικής τριβής $|f_s| \le \mu_s N$ και ακολούθως το άνω όριο της $F_{\parallel}$. Έτσι στην 3 η παράλληλη συνιστώσα της F, που προκαλεί τη γραμμική επιτάχυνση (και άρα και η F), μπορεί να είναι μεγαλύτερη από τις περιπτώσεις 1 και 2. Με πράξεις:

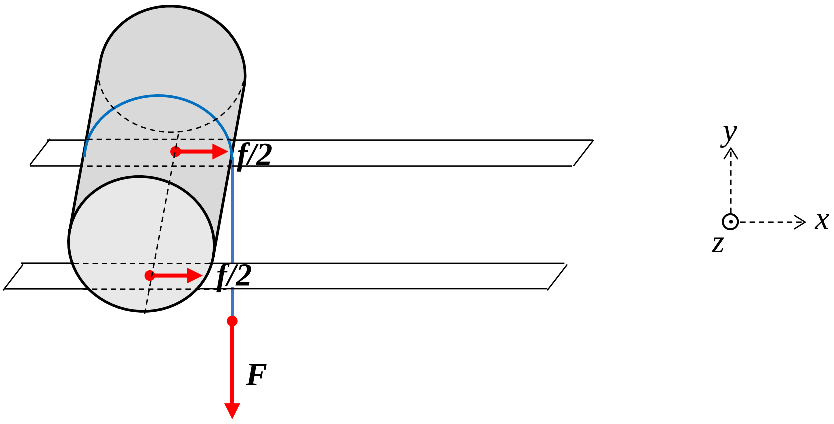
(1) $|f_s| \le \mu_s N \Rightarrow \dfrac{\kappa}{1+\kappa} F_{\parallel} \le \mu_s (B - F_{\perp}) \Rightarrow F_{\parallel} \le \dfrac{1+\kappa}{\kappa} \mu_s (B - F_{\perp})$

(2) $|f_s| \le \mu_s N \Rightarrow \dfrac{\kappa}{1+\kappa} F_{\parallel} \le \mu_s B \Rightarrow F_{\parallel} \le \dfrac{1+\kappa}{\kappa} \mu_s B$

(3) $|f_s| \le \mu_s N \Rightarrow \dfrac{\kappa}{1+\kappa} F_{\parallel} \le \mu_s (B + F_{\perp}) \Rightarrow F_{\parallel} \le \dfrac{1+\kappa}{\kappa} \mu_s (B + F_{\perp})$

Κύλινδρος που κυλάει σε ράγες από κάθετο βαρίδιο κρεμασμένο αναμεσά τους

Θεωρήστε ότι η δύναμη F ασκείται ακριβώς στο κέντρο του κυλίνδρου και ότι οι οριζόντιες σανίδες είναι από το ίδιο υλικό και απέχουν ίση απόσταση από το κέντρο του κυλίνδρου ώστε οι κάθετες αντιδράσεις και οι στατικές τριβές στα σημεία επαφής να είναι ίσες (ο κύλινδρος δεν περιστρέφεται γύρω από τον άξονα y ούτε τείνει να περιστραφεί γύρω από τον άξονα x). **Υπολογίστε την επιτάχυνση και τη στατική τριβή.**



Κύλινδρος : κ=1/2

Συνθήκη κύλισης : $a = \alpha R$ (1)

Στροφική κίνηση: $FR - fR = I\alpha \Rightarrow FR - fR = \kappa M R^2 \dfrac{a}{R} \Rightarrow F - f = \kappa M a$ (2)

Μεταφορική κίνηση: $f = Ma$ (3)

(2)+(3) : $a = \dfrac{F}{M(1+\kappa)} = \dfrac{2F}{3M}$, $f = \dfrac{2F}{3}$

Τράβηγμα χαλιού κάτω από κύλινδρο (rolling on accelerating slab)

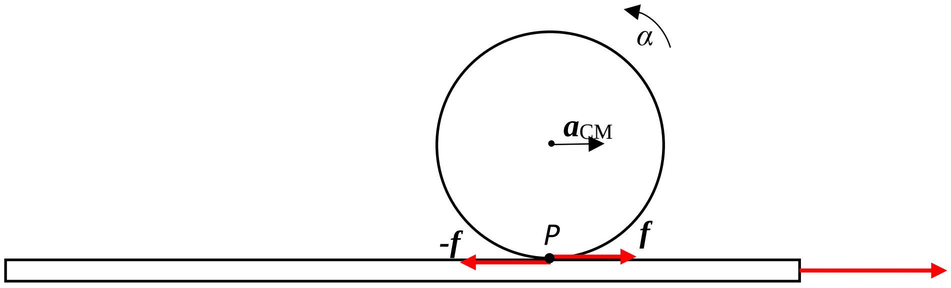
Το χαλί έχει μάζα M και ο κύλινδρος μάζα m, ακτίνα R και ροπή αδράνειας $I=\kappa MR^2$. Τραβάμε το χαλί με δύναμη F.

Πόση είναι η επιτάχυνση του κυλίνδρου a_{CM}, η στατική τριβή f και η επιτάχυνση του χαλιού a ?

Πόση είναι η επιτάχυνση A του συστήματος κύλινδρος-χαλί?

Ποια είναι η μέγιστη δύναμη F ώστε ο κύλινδρος να κυλά χωρίς ολίσθηση αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ κυλίνδρου χαλιού είναι μ_s ?

Ποια είναι η σχετική επιτάχυνση του κυλίνδρου ως προς το χαλί $a_{\kappa/\chi}$?



Στον κύλινδρο ασκείται μόνο η δύναμη f της στατικής τριβής. Άρα επιταχύνεται προς τα μπροστά (ως προς το ακίνητο δάπεδο κάτω από το χαλί) και στρέφεται ανθωρολογιακά όπως στο σχήμα.
Το σημείο P του κυλίνδρου που βρίσκεται σε επαφή με το χαλί πρέπει να έχει ταχύτητα όση και το χαλί ώστε ο κύλινδρος να κυλάει χωρίς ολίσθηση.

Γραμμική κίνηση χαλιού: $F - f = Ma$ (1)

Συνθήκη κύλισης: $\upsilon_P = \upsilon \Rightarrow \upsilon_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi} + \upsilon_{\sigma\tau\rho o\varphi} = \upsilon \Rightarrow \upsilon_{CM} + \omega R = \upsilon \Rightarrow a_{CM} + \alpha R = a$ (2)

Γραμμική κίνηση κυλίνδρου: $f = ma_{CM}$ (3)

Στροφική κίνηση κυλίνδρου: $fR = I\alpha \Rightarrow f = \kappa m R\alpha$ (4)

Από τις (3) και (4) παίρνουμε: $\alpha = \dfrac{a_{CM}}{\kappa R}$

Αντικαθιστώντας τις (3), (2) και (5) στην (1) παίρνουμε:

$$F - ma_{CM} = M(a_{CM} + \alpha R) \Rightarrow F = M(a_{CM} + \frac{a_{CM}}{\kappa}) + ma_{CM} \Rightarrow a_{CM} = \frac{F}{m + M(1 + 1/\kappa)}$$

$$f = \frac{m}{m + M(1 + 1/\kappa)} F$$

$$a = a_{CM} + \alpha R = a_{CM} + \frac{a_{CM}}{\kappa} \Rightarrow a = \frac{(1 + 1/\kappa)F}{m + M(1 + 1/\kappa)}$$

Η επιτάχυνση A του κέντρου μάζας του συστήματος κύλινδρος-χαλί είναι ίση με: $A = \dfrac{F}{m + M}$

Έλεγχος: αυτή η έκφραση πρέπει να συμπίπτει και με τον ορισμό $A = \dfrac{ma_{CM} + Ma}{m + M}$

Πράγματι: $ma_{CM} + Ma = m\dfrac{F}{m + M(1 + 1/\kappa)} + M\dfrac{(1 + 1/\kappa)F}{m + M(1 + 1/\kappa)} = \dfrac{mF + M(1 + 1/\kappa)F}{m + M(1 + 1/\kappa)} = F$

Η επιτάχυνση του κυλίνδρου ως προς το χαλί είναι :

$a_{\kappa/\chi} = a_{CM} - a = \dfrac{F}{m + M(1 + 1/\kappa)} - \dfrac{(1 + 1/\kappa)F}{m + M(1 + 1/\kappa)} = -\dfrac{F}{m\kappa + M(\kappa + 1)}$ αρνητική.

Για να κυλίεται ο κύλινδρος στο χαλί χωρίς ολίσθηση πρέπει η απαιτούμενη στατική τριβή να είναι μικρότερη από τη μέγιστη δυνατή: $f \le \mu_s N \Rightarrow \dfrac{m}{m + M(1 + 1/\kappa)} F \le \mu_s mg \Rightarrow F_{\max} = \mu_s [m + M(1 + 1/\kappa)] g$

Αριθμητική εφαρμογή : μ_s = 0,6 , χαλί M=10 kg, μπάλα bowling (θεωρούμε ομογενή σφαίρα που δεν ισχύει για τις πραγματικές μπάλες) m=7,3 kg, R=10,8 cm, κ=2/5=0,4 F=200 N.

Είναι $F \le F_{\max}$ ώστε να έχω κύλιση χωρίς ολίσθηση?

$F_{\max} = \mu_s [m + M(1 + 1/\kappa)] g = 0,6[7,3 + 10(1 + 5/2)] \cdot\ 9,8 = 248,7 \text{ N} > 200 \text{ N}$ OK

$$a_{CM} = \frac{F}{m+M(1+1/\kappa)} = 4,73 \text{ m/s}^2$$

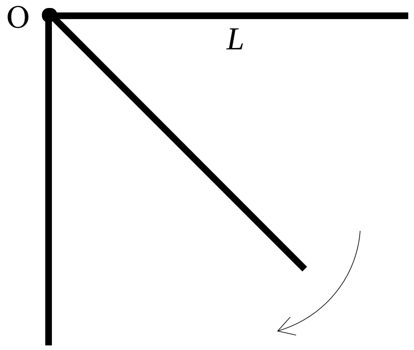
$$a = \frac{(1+1/\kappa)F}{m+M(1+1/\kappa)} = 16,55 \text{ m/s}^2$$

Έλεγχος : $4,73\cdot\ 7,3+10\cdot\ 16,55=200,0$ OK

$f = ma_{CM} = 34,53 \text{ N} < \mu_s mg = 42,92 \text{ N}$ OK

Περιστρεφόμενη ράβδος

15-17 Η ομογενής ράβδος του σχήματος μπορεί να περιστραφεί χωρίς τριβές γύρω από τον άξονα στο άκρο της. Η ράβδος αφήνεται να περιστραφεί υπό την επίδραση του βάρους της. Η ροπή αδρανείας ως προς το άκρο της Ο είναι $I = mL^2/3$.



15. Ποια είναι η γωνιακή της επιτάχυνση τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερη από την οριζόντια θέση.
Α) $g/2L$ Β) g/L Γ) $3g/2L$ Δ) $3g/L$

15. Γ) Η αντίδραση του άξονα δεν επάγει ροπή. Η μόνη ροπή προέρχεται από το βάρος της ράβδου που ασκείται στο μέσο της :

$$\tau = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{BL/2}{mL^2/3} = \frac{3mg}{2mL} \Rightarrow \alpha = \frac{3g}{2L}$$

16. Ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας της όταν βρεθεί στην κατακόρυφη θέση;
Α) $\sqrt{3gL}/2$ Β) $\sqrt{gL}$ Γ) $\sqrt{gL/2}$ Δ) $\sqrt{3gL/2}$

16. Α) Το κέντρο μάζας κατήλθε ύψος $h = L/2$. Η δυναμική βαρυτική ενέργεια μετατράπηκε σε περιστροφική κινητική ενέργεια. Η ταχύτητα υ, του μέσω της ράβδου συνδέεται με τη γωνιακή ταχύτητα ω, με τη σχέση : $\upsilon = \omega(L/2)$.

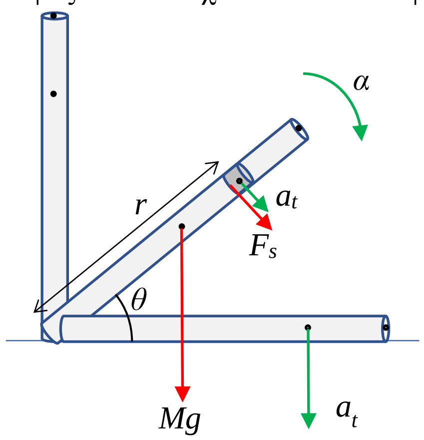
$$E_{οριζ} = E_{κατ} \Rightarrow U_g = K_R \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{3}mL^2\left(\frac{\upsilon}{L/2}\right)^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{3gL/4}$$

17. Ποια είναι η γωνιακή της επιτάχυνση τη στιγμή που βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση
Α) 0 Β) g/L Γ) $3g/2L$ Δ) $-g/L$

17. Α) Ούτε το βάρος προκαλεί ροπή όταν η ράβδος βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση. Άρα η ολική ροπή και ακολούθως η γωνιακή επιτάχυνση είναι στιγμιαία μηδέν.

Κατάρρευση υψικαμίνου (*Falling chimney*)

Ποια είναι η εφαπτομενική επιτάχυνση ενός σημείου της ράβδου που πέφτει όταν βρίσκεται σε γωνία θ από το έδαφος και όταν χτυπάει στο έδαφος;



Η μόνη εξωτερική δύναμη που παράγει ροπή είναι το βάρος της ράβδου

$$\tau = Mg \cdot \frac{L}{2}\cos\theta$$

Η γωνιακή επιτάχυνση δεν είναι σταθερή αλλά αυξάνει όσο η ράβδος πέφτει

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mg\cos\theta\frac{L}{2}}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3g\cos\theta}{2L}$$

Η γραμμική δηλαδή η εφαπτομενική επιτάχυνση ενός σημείου της ράβδου που απέχει r από τη βάση της θα είναι

$$a_t = r\alpha = \frac{3r}{2L}g\cos\theta$$

Όταν η ράβδος χτυπάει στο έδαφος η εφαπτομενική επιτάχυνση είναι κατακόρυφη και ίση με:

$$a_t = r\alpha = \frac{3r}{2L}g$$

Βλέπουμε ότι για τα σημεία της ράβδου με $\frac{3r}{2L} > 1 \Rightarrow r > \frac{2}{3}L$, δηλαδή για το ακραίο 1/3 του μήκους της η εφαπτομενική επιτάχυνση είναι μεγαλύτερη από την επιτάχυνση της βαρύτητας!

$$a_t > g \text{ για } r > \frac{2}{3}L$$

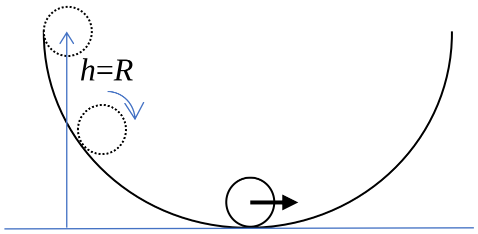
Από ποια δύναμη προκαλείται η πρόσθετη επιτάχυνση; Η δύναμη αυτή είναι διαμοριακή δύναμη συνοχής του υλικού και ονομάζεται διατμητική τάση (shear stress) επειδή είναι εφαπτομενική στη διατομή της ράβδου (φανταστείτε στατική τριβή μεταξύ των τμημάτων της ράβδου). Προέρχεται από την επαφή κάθε μέρους της ράβδου με τα γειτονικά του

Η διατμητική τάση έχει ένα ανώτατο όριο για κάθε υλικό και τρόπο κατασκευής γι' αυτό όταν πέφτουν οι καμινάδες σε κάποιο σημείο σπάνε καθώς η διατμητική τάση δεν επαρκεί για να προκαλέσει την απαιτούμενη πρόσθετη γραμμική επιτάχυνση.

Βίντεο You Tube: Chimney Demolition Compilation

Κύλιση σώματος πάνω σε άλλο σώμα

11-12 Μικρή σφαίρα ακτίνας *r* αφήνεται να κυλίσει στο εσωτερικό μεγαλύτερης σφαίρας ακτίνας *R* από ύψος *h*=*R*.



ΣΗΜΕΙΑ ΠΡΟΣΟΧΗΣ!

Η ακτίνα του κύκλου στον οποίο κινείται η μικρή σφαίρα είναι *R*–*r* (όχι *R*)

Η σφαίρα έχει και στροφική κινητική ενέργεια $I\omega^2/2$ εκτός από τη μεταφορική $m\upsilon^2/2$

Το CM κατεβαίνει κατά ύψος *h*–*r* (όχι *h*)

11. Η ταχύτητα της σφαίρας στον πυθμένα είναι :

Α) $\sqrt{gR}$ Β) $\sqrt{\frac{10}{7}gR}$ Γ) $\sqrt{\frac{10}{7}g(R-r)}$ Δ) $\sqrt{g(R-r)}$

11. Γ) $E_h = E_r \Rightarrow mgh = mgr + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow mg(h-r) = \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\frac{\upsilon^2}{r^2} + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow$

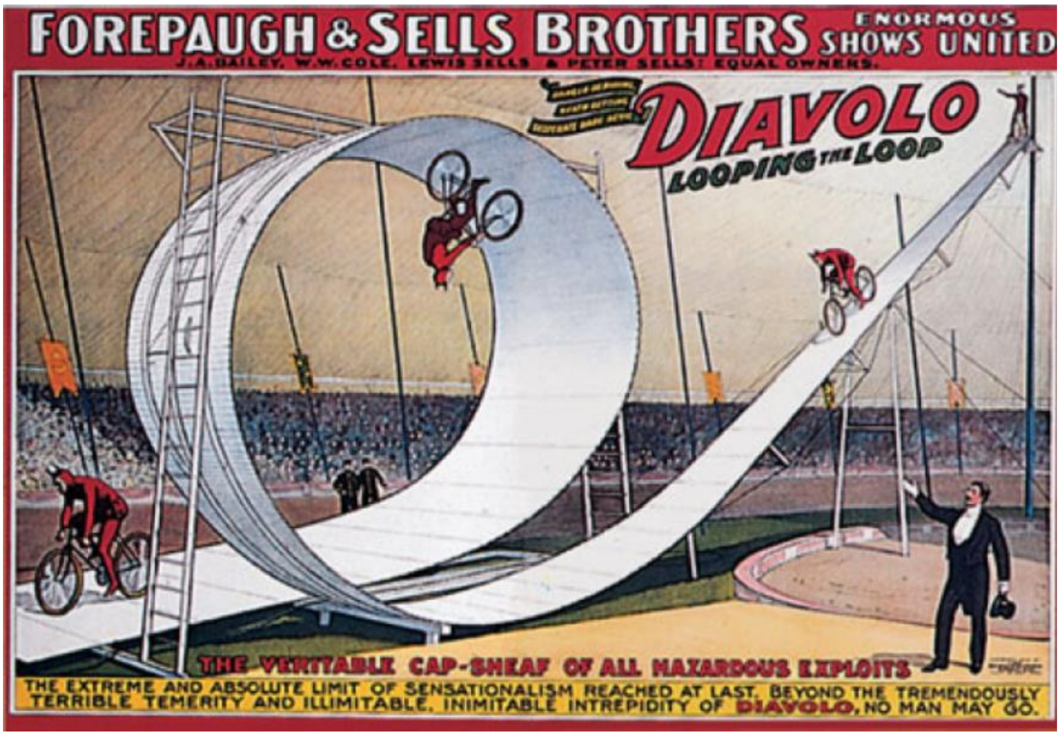
$$g(h-r) = \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)\upsilon^2 = \frac{7}{10}\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{10}{7}g(h-r) = \frac{10}{7}g(R-r)$$

12. Η κάθετη αντίδραση στη μικρή σφαίρα στον πυθμένα είναι:

Α) $\frac{10}{7}mg$ Β) $\frac{17}{7}mg$ Γ) mg Δ) $\frac{17}{10}mg$

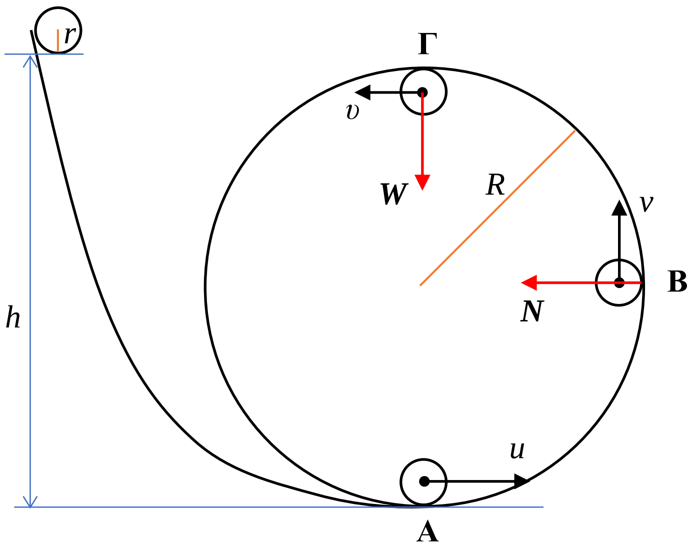
12. Β) $N - mg = m\frac{\upsilon^2}{R-r} \Rightarrow N = mg\left(1+\frac{10}{7}\right) \Rightarrow N = \frac{17}{7}mg$ όπου χρησιμοποιήσαμε για την ταχύτητα το αποτέλεσμα της προηγούμενης ερώτησης

Τσίρκο



Ο μικρός τροχός εκτελεί **οριακά ανακύκλωση** μέσα στο μεγάλο κύλινδρο.
1) Ποιες είναι οι τιμές της ταχύτητάς του υ , u και v στα αντίστοιχα σημεία Α, Β και Γ;
2) Από τι ύψος h πρέπει να αφεθεί ο μικρός τροχός για εκτελέσει ανακύκλωση οριακά;
3) Ποια είναι η κάθετη αντίδραση N όταν ο τροχός διασχίζει την οριζόντια ακτίνα (σημείο Β)

Αριθμητικά δεδομένα : m=5 kg, r=0,5 m, κ=0,8, $I=\kappa m r^2$, R=4 m, g= 9,8 m/s^2



Το CM του τροχού κάνει κατακόρυφη κυκλική κίνηση. Η κεντρομόλος δύναμη παρέχεται από το βάρος του W όταν έχει ακτινική συνιστώσα και την κάθετη αντίδραση N που είναι πάντα ακτινική. Η στατική τριβή f είναι πάντοτε εφαπτομενική στον κύκλο και δεν συνεισφέρει στην κεντρομόλο. Έργο παράγει μόνο το βάρος W άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Η N είναι κάθετη στη μετατόπιση ενώ η f όντας στατική δεν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της. Η στατική τριβή f είναι υπεύθυνη για την περιστροφή του τροχού γύρω από το CM. Παρόλο που δεν παράγει έργο αφαιρεί από την μεταφορική κινητική ενέργεια που παράγει το βάρος ένα μέρος και το μετασχηματίζει σε στροφική κρατώντας το σημείο επαφής σταθερό ώστε το βάρος να περιστρέψει τον τροχό.

Για να εκτελέσει οριακά ανακύκλωση ο τροχός, πρέπει στο ανώτατο σημείο Γ το βάρος του μόνο να επαρκεί για να παρέχει την κεντρομόλο δύναμη ($N_Γ$=0) : $mg = m\dfrac{\upsilon^2}{R-r} \Rightarrow \upsilon^2 = g(R-r)$

$\upsilon = \sqrt{g(R-r)} = \sqrt{9,8(4-0,5)} = 5,86$ m/s $= 21,1$ km/h

Η κινητική ενέργεια γράφεται ως συνήθως, χρησιμοποιώντας τη συνθήκη κύλισης $V = \omega r$, στη μορφή:

$$K = K_T + K_R = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}\kappa m r^2\frac{V^2}{r^2} = \frac{1+\kappa}{2}mV^2$$

Οι ταχύτητες στα υπόλοιπα σημεία υπολογίζονται από τη διατήρηση της ενέργειας.

$$E_B = E_Γ \Rightarrow \frac{1+\kappa}{2}mv^2 + mgR = \frac{1+\kappa}{2}m\upsilon^2 + mg(2R-r) \Rightarrow \frac{1+\kappa}{2}v^2 = \frac{1+\kappa}{2}g(R-r) + g(R-r) \Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{3+\kappa}{1+\kappa}g(R-r)$$

$$v = \sqrt{\frac{3+\kappa}{1+\kappa}g(R-r)} = \sqrt{\frac{3+0,8}{1+0,8}9,8(4-0,5)} = 8,51 \text{ m/s} = 30,6 \text{ km/h}$$

$$E_A = E_Γ \Rightarrow \frac{1+\kappa}{2}mu^2 + mgr = \frac{1+\kappa}{2}m\upsilon^2 + mg(2R-r) \Rightarrow \frac{1+\kappa}{2}u^2 = \frac{1+\kappa}{2}g(R-r) + 2g(R-r) \Rightarrow$$

$$u^2 = \frac{5+\kappa}{1+\kappa}g(R-r)$$

$$u = \sqrt{\frac{5+\kappa}{1+\kappa}g(R-r)} = \sqrt{\frac{5+0,8}{1+0,8}9,8(4-0,5)} = 10,5 \text{ m/s} = 37,8 \text{ km/h}$$

Ελέγχουμε ότι για κ=0 και r=0 παίρνουμε τις ταχύτητες του υλικού σημείου σε κατακόρυφο κύκλο.

Η κάθετη αντίδραση στο Β παρέχει μόνη της την κεντρομόλο. Το βάρος δεν συνεισφέρει επειδή η ακτίνα είναι οριζόντια.

$$N = m\frac{v^2}{R-r} = \frac{m}{R-r}\frac{3+\kappa}{1+\kappa}g(R-r) = mg\frac{3+\kappa}{1+\kappa} = 5\cdot\ 9,8\frac{3+0,8}{1+0,8} = 103,4 \text{ N}$$

Δεν εξαρτάται από το μέγεθος των κύκλων! Μόνο από τη μάζα του τροχού και τον τρόπο κατανομής της (κ)

Το απαιτούμενο ύψος h βρίσκεται πάλι από διατήρηση ενέργειας

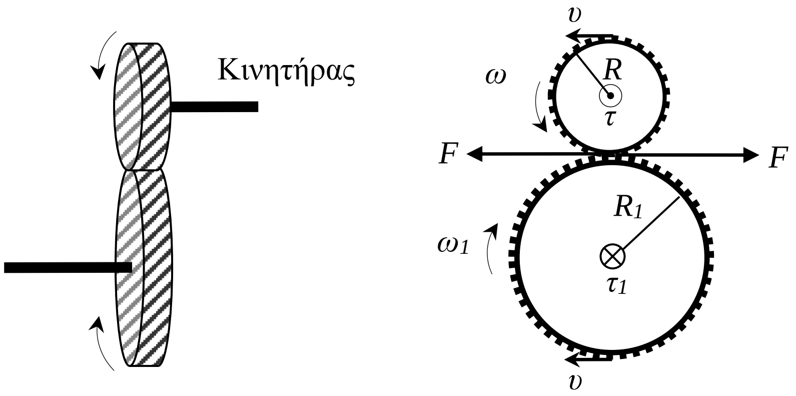
$$E_0 = E_Γ \Rightarrow mg(h+r) = \frac{1+\kappa}{2}m\upsilon^2 + mg(2R-r) \Rightarrow gh = \frac{1+\kappa}{2}g(R-r) + 2g(R-r) \Rightarrow$$

$$h = \frac{5+\kappa}{2}(R-r) = \frac{5+0,8}{2}(4-0,5) = 10,15 \text{ m}$$

Γρανάζια – Ιμάντες

Δίσκοι που «εφάπτονται» (γρανάζια)

Το κιβώτιο ταχυτήτων μετατρέπει τη ροπή (τ) και τη γωνιακή ταχύτητα (ω) του κινητήρα σε επιθυμητές τιμές. Συνδέοντας δύο δίσκους εφαπτομενικά, χωρίς ολίσθηση, δηλαδή με γρανάζια, μπορούμε ταυτόχρονα να μειώσουμε τη γωνιακή ταχύτητα και να αυξήσουμε τη ροπή κατά την ίδια αναλογία (ή το αντίστροφο).



Οι δίσκοι γυρίζουν με σταθερή ταχύτητα.

Οι εφαπτομενικές ταχύτητες είναι ίσες : $\upsilon_1 = \upsilon \Rightarrow R_1\omega_1 = R\omega \Rightarrow \ \omega_1 = \left(\dfrac{R}{R_1}\right)\omega$

Οι δυνάμεις από τον ένα τροχό στον άλλο είναι ίσες (δράση-αντίδραση) :

$$F_1 = F \Rightarrow \frac{\tau_1}{R_1} = \frac{\tau}{R} \Rightarrow \tau_1 = \left(\frac{R_1}{R}\right)\tau$$

Αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια που μεταδίδεται από το ένα γρανάζι στο άλλο ανά δευτερόλεπτο διατηρείται (εφόσον δεν υπάρχουν απώλειες από τριβές στην επαφή)

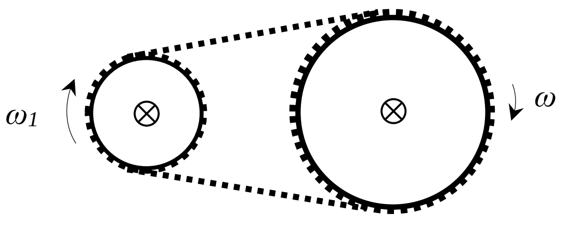
$$P_1 = \tau_1\omega_1 = \tau\frac{R_1}{R}\omega\frac{R}{R_1} = \tau\omega = P$$

Όταν συνδέουμε με μεγαλύτερο γρανάζι μειώνουμε την ταχύτητα και αυξάνουμε τη ροπή (ξεκίνημα, ανηφόρες) : $R_1 > R \Rightarrow \quad \omega_1 < \omega$ και $\tau_1 > \tau$

Όταν συνδέουμε με μικρότερο γρανάζι αυξάνουμε την ταχύτητα και μειώνουμε τη ροπή (αυτοκινητόδρομος) : $R_1 < R \Rightarrow \quad \omega_1 > \omega$ και $\tau_1 < \tau$

Το αντίστοιχο συμβαίνει και στα ποδήλατα. Απλά εκεί ο μπροστά δίσκος με τα πετάλια συνδέεται με τον δίσκο της πίσω ρόδας με αλυσίδα και όχι με γρανάζια.

42. Τα πετάλια με τα οποία παράγουμε ροπή σε ένα ποδήλατο συνδέονται στον άξονα του μπροστινού δίσκου του ποδηλάτου και τον περιστρέφουν. Αυτός έχει ακτίνα R και αριθμό δοντιών N. Με μια αλυσίδα η ροπή μεταφέρεται στο δίσκο της πίσω ρόδας η οποία και κινεί το ποδήλατο. Στην πίσω ρόδα μπορούμε να συνδέσουμε διάφορους δίσκους με αποτέλεσμα να αλλάζουμε «ταχύτητες».



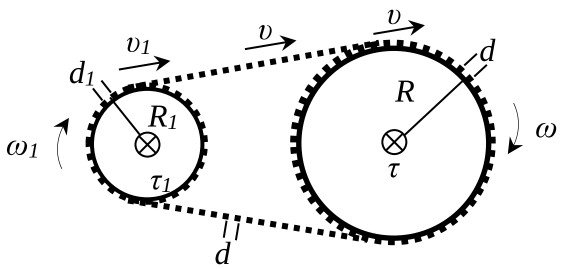
Θέλουμε η γωνιακή ταχύτητα ω_1 του πίσω τροχού να είναι 3 φορές μεγαλύτερη από τη γωνιακή ταχύτητα ω με την οποία κάνουμε πετάλι. Ο αριθμός των δοντιών του πίσω δίσκου N_1 πρέπει να συνδέεται με αυτόν του μπροστινού με τη σχέση

Α) $N_1 = N/3$ Β) $N_1 = 3N$ Γ) $3N_1 = 2N$ Δ) $2N_1 = 3N$

42. Α) Οι δίσκοι πρέπει να έχουν ίδιο διάστημα d μεταξύ των δοντιών τους και ίσο με αυτό της αλυσίδας ώστε η αλυσίδα να εφαρμόζει και στους δύο. Δηλαδή ο αριθμός των δοντιών τους είναι ανάλογος του μεγέθους τους:

$$d = d_1 \Rightarrow \frac{2\pi R}{N} = \frac{2\pi R_1}{N_1} \Rightarrow N_1 = N\frac{R_1}{R}$$

Οι ακτίνες των δίσκων είναι αντιστρόφως ανάλογες των γωνιακών τους ταχυτήτων ώστε τα περιμετρικά τους σημεία να έχουν ίση γραμμική ταχύτητα και ίση με αυτή της αλυσίδας: $\upsilon_1 = \upsilon \Rightarrow \omega_1 R_1 = \omega R \Rightarrow \frac{R_1}{R} = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{1}{3}$.



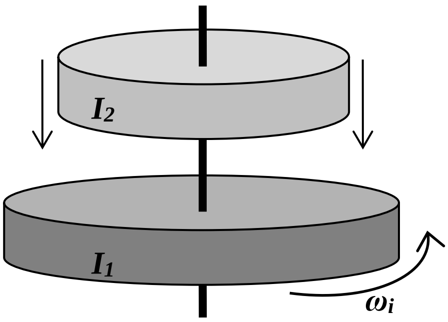
Οπότε $N_1 = N\frac{R_1}{R} = \frac{N}{3}$.

Γενικά αν έχουμε πολλούς δίσκους τόσο μπροστά όσο και πίσω πρέπει να συνδέσουμε το μικρότερο δίσκο πίσω με τον μεγαλύτερο μπροστά για να πετύχουμε τη μέγιστη ταχύτητα.

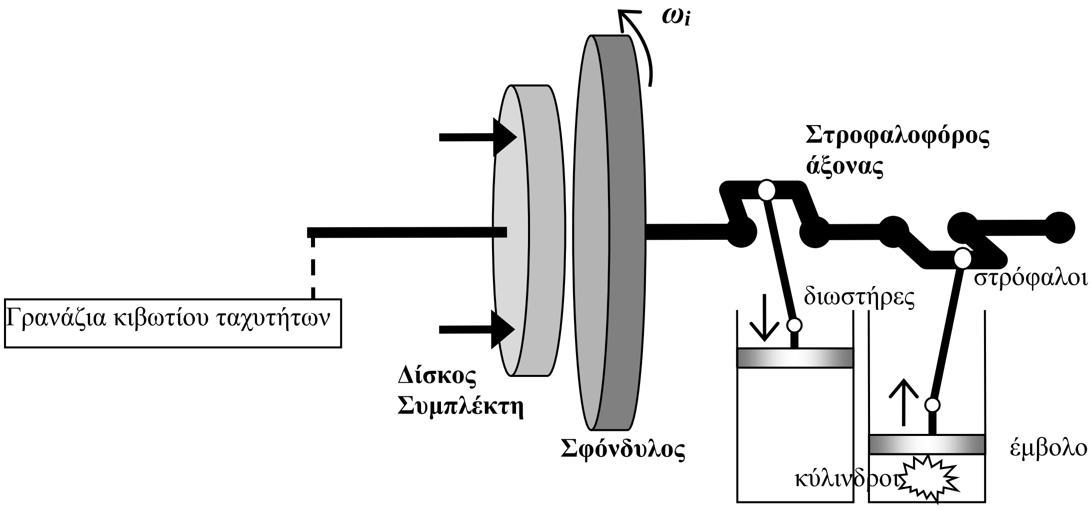
Διατήρηση στροφορμής

Δίσκοι που «συγκρούονται»

Ένας δίσκος με ροπή αδρανείας I_1 περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_i γύρω από τον άξονά του όταν ένας δεύτερος ακίνητος δίσκος παράλληλος με τον πρώτο, με ροπή αδρανείας I_2, αφήνεται πάνω του κατά μήκος του κοινού άξονά τους. Οι δύο δίσκοι καταλήγουν τελικά να περιστρέφονται με κοινή γωνιακή ταχύτητα ω_f. Η τελική κοινή γωνιακή τους ταχύτητα ω_f θα βρεθεί από την αρχή διατήρησης της στροφορμής.

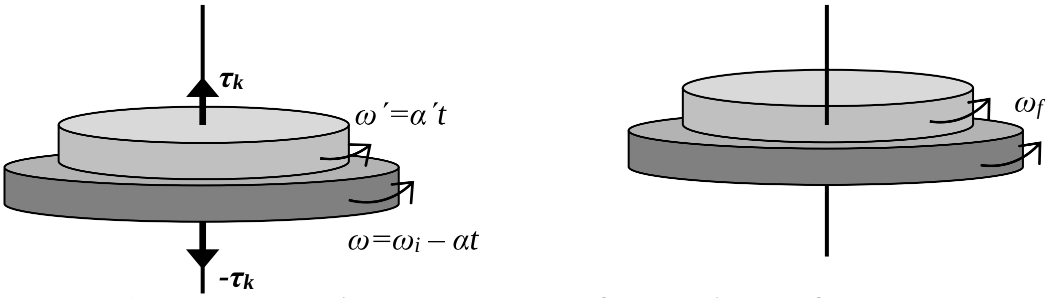


Έτσι βίαια και βάρβαρα μεταδίδεται η κίνηση στους τροχούς ενός αυτοκινήτου από τον κινητήρα. Ο δίσκος του συμπλέκτη πιέζεται με ισχυρά ελατήρια πάνω στον περιστρεφόμενο σφόνδυλο. Οι δύο δίσκοι συμπλέκονται λόγω τριβής και ο δίσκος του συμπλέκτη αρχίζει να περιστρέφεται και αυτός. Όταν πατάτε το πετάλι (ποδόπληκτρο) του συμπλέκτη, τους αποσυνδέετε. Συνδέετε τον άξονα του συμπλέκτη με όποιο γρανάζι ταχύτητας θέλετε και μετά τους συμπλέκετε πάλι για να πάει η περιστροφή στους τροχούς.



Σε κάθε σημείο επαφής των δύο δίσκων οι δυνάμεις τριβής ολίσθησης που ασκεί ο ένας στον άλλο είναι ζεύγη δράσης – αντίδρασης. Άρα οι δυνάμεις είναι ίσες και αντίρροπες και αφού εφαρμόζονται σε σημεία με ίση απόσταση από τον άξονα περιστροφής (τα αντίστοιχα σημεία επαφής μεταξύ των δύο δίσκων) θα επάγουν αντίθετες ροπές. Η ολική ροπή είναι μηδέν. Έτσι η στροφορμή του συστήματος θα διατηρηθεί και η τελική κοινή γωνιακή ταχύτητα θα είναι :

$$L_i = L_f \Rightarrow I_1\omega_i = (I_1 + I_2)\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_i$$



Αν γνωρίζουμε τον συντελεστή κινητικής τριβής μεταξύ των δίσκων μπορούμε να υπολογίσουμε και το χρόνο που θα χρειαστεί μέχρι να καταλήξουν στην ω_f.

4. Ένας δίσκος μάζας M και ακτίνας R περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_i γύρω από τον άξονά του. Ένας ακίνητος αρχικά κύλινδρος με τον άξονά του πάνω στον άξονα του δίσκου αφήνεται να πέσει πάνω στο δίσκο. Τα δύο σώματα καταλήγουν τελικά να περιστρέφονται με κοινή γωνιακή ταχύτητα ω_f. Αν ο κύλινδρος έχει τη μισή ακτίνα από το δίσκο αλλά την ίδια μάζα η τελική κοινή γωνιακή τους ταχύτητα ω_f θα είναι ίση με :

Α) $\frac{5}{4}\omega_i$ Β) $\frac{4}{5}\omega_i$ Γ) $\frac{2}{3}\omega_i$ Δ) $\frac{3}{2}\omega_i$

4. Γ) Η στροφορμή του συστήματος των σωμάτων θα παραμείνει σταθερή επειδή οι ροπές είναι εσωτερικές (αντίθετες δυνάμεις που εφαρμόζονται στο ίδιο σημείο). Έτσι η τελική κοινή γωνιακή ταχύτητα θα είναι από :

$$L_i = L_f \Rightarrow I_1\omega_i = (I_1 + I_2)\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_i \Rightarrow$$

$$\omega_f = \frac{MR^2/2}{MR^2/2 + M\left(R/2\right)^2/2}\omega_i = \frac{1}{1+1/4}\omega_i = \frac{4}{5}\omega_i$$

5. Ένας δίσκος με ροπή αδρανείας 30 kg·m^2 περιστρέφεται οριζόντια με γωνιακή ταχύτητα 60 rad/s γύρω από τον άξονά του όταν ένας δεύτερος δίσκος παράλληλος με τον πρώτο, με ροπή αδρανείας 20 kg·m^2, που αρχικά δεν περιστρεφόταν πέφτει πάνω του (κατά μήκος του κοινού άξονά τους). Οι δύο κύλινδροι έχουν τελικά κοινή γωνιακή ταχύτητα που είναι ίση με :

Α) 36 rad/s Β) 48 rad/s Γ) 54 rad/s Δ) 60 rad/s

5. Α) Η Δ) απορρίπτεται γιατί είναι ίση με την αρχική. Από διατήρηση στροφορμής :

$$\omega_f = \frac{I_1}{I_1+I_2}\omega_i = \frac{30}{30+20}60 = \frac{3}{5}60 = 3\cdot 12 = 36$$

35. Δύο ομογενής οριζόντιοι δίσκοι ακτίνων $R_1 > R_2$ και μαζών m_1 και m_2 μπορούν να περιστρέφονται χωρίς τριβές γύρω από κάθετο άξονα που περνάει από τα κέντρα τους. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ τους είναι μ. Αρχικά ο δίσκος 1 περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_i. Αν αφήσουμε τον δίσκο 2 ο οποίος δεν περιστρέφεται να πέσει πάνω στον 1 σε πόσο χρόνο θα αρχίσουν να περιστρέφονται με κοινή γωνιακή ταχύτητα.

Α) $t = \dfrac{3}{2\mu g m_2 R_2}\dfrac{I_1 I_2}{I_1+I_2}\omega_i$ Β) $t = \dfrac{2}{3\mu g m_2 R_2}\dfrac{I_2}{I_1+I_2}\omega_i$

Γ) $t = \dfrac{3}{2\mu g m_2 R_2}\dfrac{I_2^2}{I_1+I_2}\omega_i$ Δ) $t = \dfrac{2}{3\mu g m_2 R_2}\dfrac{I_1}{I_1+I_2}\omega_i$

35. Οι Β) Δ) απορρίπτονται λόγω μονάδων, δεν είναι χρόνοι. Από συμμετρία θα κλίναμε προς την Α) έναντι της Γ).

Α) Η ροπή της τριβής ολίσθησης είναι σταθερή και ο δίσκος 1 κάνει ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση ενώ ο 2 ομαλά επιταχυνόμενη. Τη χρονική στιγμή t οι δύο γωνιακές ταχύτητες γίνονται ίσες και η τριβή μηδενίζεται:

$$\omega_{f1} = \omega_{f2} \Rightarrow \omega_i - \alpha_1 t = \alpha_2 t \Rightarrow \omega_i = (\alpha_1+\alpha_2)t = \left(\frac{\tau}{I_1}+\frac{\tau}{I_2}\right)t = \frac{(I_1+I_2)}{I_1 I_2}\tau t \Rightarrow t = \frac{\omega_i}{\tau}\frac{I_1 I_2}{I_1+I_2}$$

Πρέπει να υπολογίσουμε τη ροπή τ που ασκείται μεταξύ των δίσκων λόγω κινητικής τριβής. Σε κάθε στοιχείο μάζας dm του μικρότερου δίσκου 2 που απέχει r από τον άξονα περιστροφής η ροπή είναι σταθερή και ίση με :

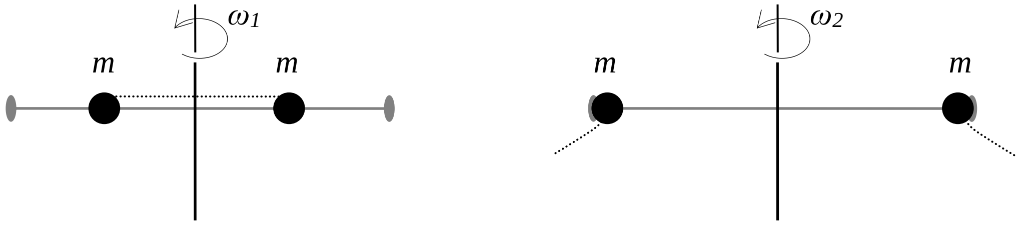
$$d\tau = r\cdot df = r\cdot \mu dN = r\mu\cdot g dm = r\mu g\cdot \rho dV = r\mu g\rho\cdot h r d\theta dr = \mu g\rho h\cdot d\theta\cdot r^2 dr$$

Οπότε η ολική ροπή είναι :

$$\tau = \int d\tau = \mu g\rho h\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{R_2} r^2 dr = \mu g\frac{m_2}{h\pi R_2^2}h\cdot 2\pi\cdot\frac{R_2^3}{3} \Rightarrow \tau = \frac{2}{3}\mu g m_2 R_2$$

Άρα $t = \dfrac{3}{2\mu g m_2 R_2}\dfrac{I_1 I_2}{I_1+I_2}\omega_i$

38-40 Οι μάζες θεωρούνται σημειακές και συγκρατούνται με αβαρές νήμα στο μέσο κάθε πλευράς της επίσης αβαρούς ράβδου. Το σύστημα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1 γύρω από άξονα κάθετο στο μέσο της ράβδου. Όταν κόψουμε το νήμα οι μάζες μετακινούνται στα άκρα της ράβδου.



38. Από τις παρακάτω προτάσεις, είναι ορθή η :

Α) Διατηρείται και η στροφορμή και η κινητική ενέργεια του συστήματος

Β) Δεν διατηρείται ούτε η στροφορμή ούτε η κινητική ενέργεια του συστήματος
Γ) Διατηρείται η στροφορμή αλλά όχι η κινητική ενέργεια του συστήματος
Δ) Δεν διατηρείται η στροφορμή αλλά η κινητική ενέργεια του συστήματος

38. Γ) Οι δυνάμεις από τον άξονα στις μάζες είτε υπάρχει τριβή είτε όχι, επάγουν αντίθετες ροπές και άρα η ολική ροπή είναι μηδέν και η στροφορμή διατηρείται. Εφόσον αλλάζει το σχήμα του συστήματος η κινητική του ενέργεια αλλάζει ακόμα και αν δεν υπάρχουν τριβές με τον άξονα.

39. Τώρα το σύστημα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα
Α) $4\omega_1$ Β) $2\omega_1$ Γ) $\omega_1/2$ Δ) $\omega_1/4$

39. Δ) $I_2 = 2\cdot m\left(2r\right)^2 = 4\cdot 2mr^2 = 4I_1$

$$L_1 = L_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 \Rightarrow \omega_2 = \frac{\omega_1}{4}$$

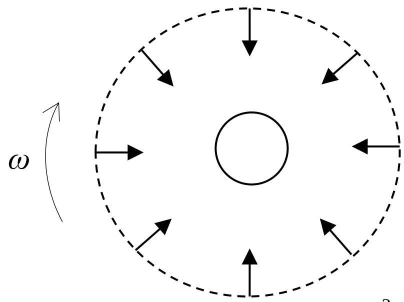
40. Ο λόγος της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος προς την τελική είναι :
Α) μικρότερος της μονάδας Β) ίσος με τη μονάδα
Γ) μεγαλύτερος της μονάδας Δ) εξαρτάται από την ω_1

40. Γ) $K_{R2} = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 = \frac{1}{2}4I_1\left(\frac{\omega_1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{2}I_1\omega_1^2 \Rightarrow K_{R2} = \frac{K_{R1}}{4} \Rightarrow \frac{K_{R1}}{K_{R2}} = 4$

Ο λόγος των ενεργειών δεν εξαρτάται από την τιμή της ω_1 αλλά από το λόγο ω_1/ω_2, με τον οποίο και είναι ίσος.

Αστέρι που συρρικνώνεται

Ένα αστέρι είναι ουσιαστικά μια αέρια σφαίρα υδρογόνου που ισορροπεί το βάρος του με την πίεση της ακτινοβολίας που εκπέμπεται λόγω των πυρηνικών αντιδράσεων στο κέντρο του. Εκεί λόγω της βαρύτητας η πίεση και η θερμοκρασία είναι τεράστιες και οδηγούν στις πυρηνικές αντιδράσεις σύντηξης. Όταν το πυρηνικό καύσιμο τελειώσει το άστρο καταρρέει αρκετά βίαια κάτω από το ίδιο του το βάρος. Επειδή το βάρος είναι κεντρική δύναμη δεν θα επάγει ροπές. Έτσι κατά την κατάρρευση η όποια αρχική στροφορμή του άστρου θα παραμείνει σταθερή και έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε την τελική γωνιακή του ταχύτητα.



$$L_i = L_f \Rightarrow I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow \frac{2}{5}mR_i^2\omega_i = \frac{2}{5}mR_f^2\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{R_i^2}{R_f^2}\omega_i$$

Αν η ακτίνα μειωθεί στο 1/2 τότε : $\omega_f = \left(\frac{R_i}{R_i/2}\right)^2\omega_i = 4\omega_i$

Η κινητική ενέργεια δεν διατηρείται αλλά αυξάνεται λόγω του έργου του βάρους.

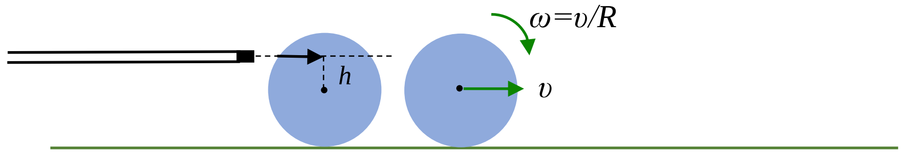
$$K_f = \frac{1}{2}I_f\omega_f^2 = \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR_f^2\cdot\left(\frac{R_i^2}{R_f^2}\omega_i\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR_i^2\omega_i^2\cdot\frac{R_i^2}{R_f^2} = \frac{R_i^2}{R_f^2}\cdot K_i = 4K_i$$

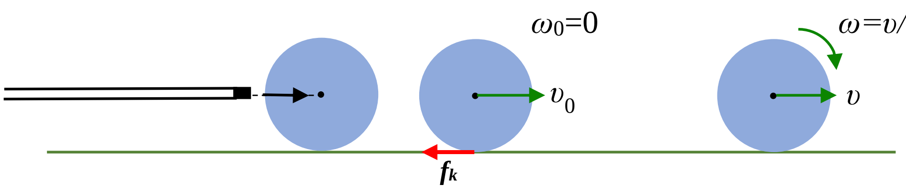
Το ίδιο συμβαίνει και όταν κάθεστε σε μια περιστρεφόμενη καρέκλα γραφείου και μαζεύεται τα απλωμένα χέρια σας στα οποία κρατάτε βαράκια ή όταν μια μπαλαρίνα στον πάγο μαζεύει τα χέρια της ενώ περιστρέφεται.
Αν γνωρίζουμε το ρυθμό με τον οποίο μειώνεται η ακτίνα μπορούμε να υπολογίσουμε και το ρυθμό αύξησης της γωνιακής ταχύτητας.

Κρούσεις

Μπιλιάρδο

24-26. Τη χρονική στιγμή t=0 μια μπάλα μπιλιάρδου χτυπιέται οριζόντια με στέκα η οποία της μεταφέρει στιγμιαία ορμή P. Η μπάλα είναι σφαίρα μάζας m και ακτίνας R ενώ ο συντελεστής κινητικής τριβής με το δάπεδο είναι μ_k .





24. Σε τι ύψος h πάνω από το κέντρο της πρέπει να τη βρει η στέκα ώστε η μπάλα να εκτελέσει κύλιση αμέσως ;

Α) 0 Β) $\frac{2}{5}R$ Γ) $\frac{3}{5}R$ Δ) $\frac{3}{4}R$

24. Β) Από την ορμή που μετέφερε η στέκα βρίσκουμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας $m\upsilon_0 = P$ ενώ από τη στροφορμή που μετέφερε βρίσκουμε την αρχική γωνιακή ταχύτητα $I\omega_0 = hP$. Για να έχουμε κύλιση αμέσως θα πρέπει

$$\upsilon_0 = \omega_0 R \Rightarrow \frac{P}{m} = \frac{hP}{I}R \Rightarrow h = \frac{I}{mR} = \frac{\frac{2}{5}mR^2}{mR} \Rightarrow h = \frac{2}{5}R$$

25. Αν η στέκα τη χτυπήσει ακριβώς στο κέντρο ($h=0$) σε πόσο χρονικό διάστημα θα αρχίσει η μπάλα να κυλίεται ($f = \mu_k mg$) ;

Α) $\frac{2}{5}\frac{P}{f}$ Β) $\frac{5}{2}\frac{P}{f}$ Γ) $\frac{7}{2}\frac{P}{f}$ Δ) $\frac{2}{7}\frac{P}{f}$

25. Δ) Η μπάλα θα αρχίσει να ολισθαίνει με αρχική ταχύτητα $m\upsilon_0 = P$ ενώ η επίδραση της τριβής ολίσθησης $f_k = \mu_k mg$ θα την επιβραδύνει ($-f_k = ma$) :

$$\upsilon = \upsilon_0 + at = \upsilon_0 - \frac{f_k}{m}t \Rightarrow \quad \upsilon = \upsilon_0 - \mu_k gt$$

Αφού η στέκα τη βρήκε στο κέντρο η μπάλα δεν θα έχει αρχική γωνιακή ταχύτητα $I\omega_0 = 0$. Η γωνιακή ταχύτητά της όμως θα αρχίσει να αυξάνει ($\tau = I\alpha$) από τη ροπή της τριβής ολίσθησης $\tau = f_k R = \mu_k mgR$:

$$\omega = \alpha t = \frac{f_k R}{I}t = \frac{\mu_k mgR}{\frac{2}{5}mR^2}t \Rightarrow \quad \omega = \frac{5\mu_k g}{2R}t$$

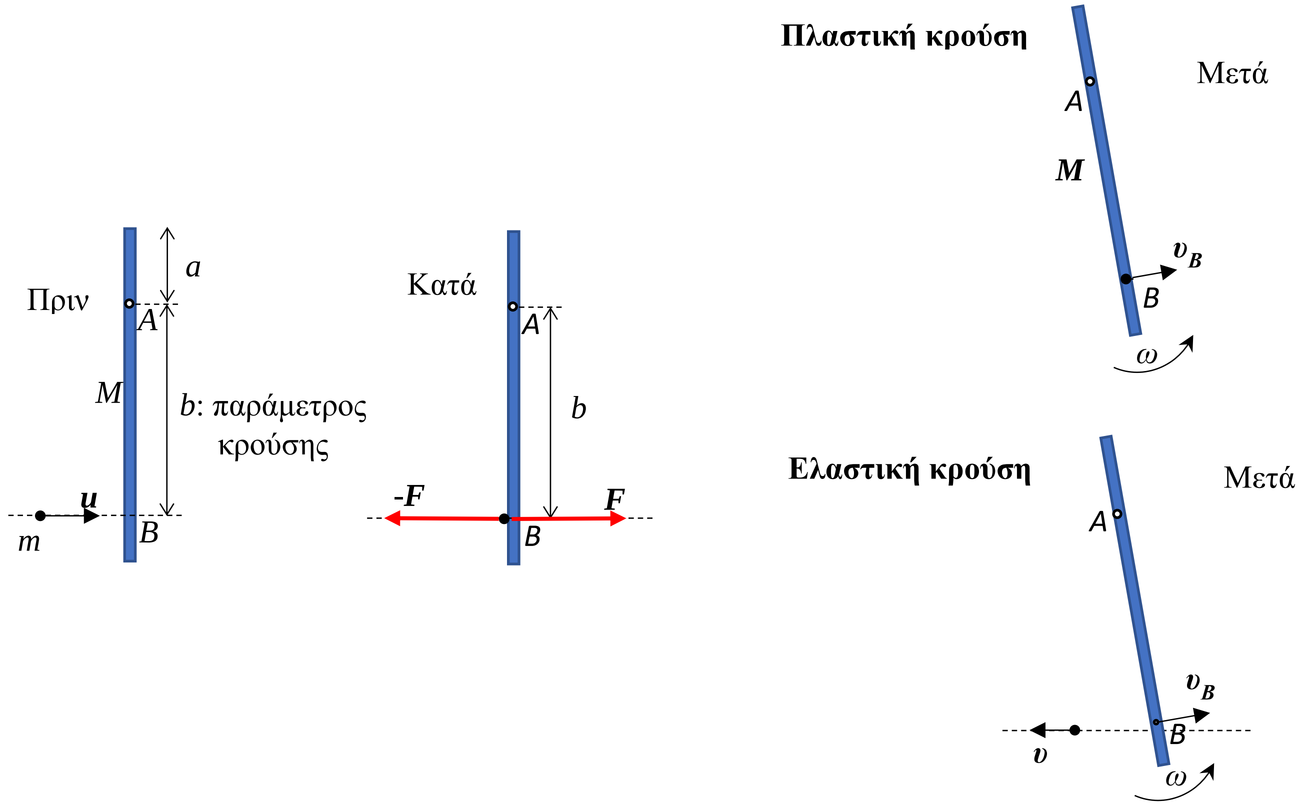
Όταν t=t_r τότε θα γίνει $\upsilon = \omega R \Rightarrow \upsilon_0 - \mu_k g t_r = \frac{5\mu_k g}{2R}t_r \cdot R \Rightarrow t_r = \frac{2\upsilon_0}{7\mu_k g} = \frac{2}{7}\frac{P}{f}$

26. Πόση θα είναι τότε η ταχύτητα του κέντρου μάζας της;

Α) $\frac{5}{7}\frac{P}{m}$ Β) $\frac{2}{5}\frac{P}{m}$ Γ) $\frac{2}{7}\frac{P}{m}$ Δ) $\frac{3}{5}\frac{P}{m}$

26. Α) $\upsilon_r = \upsilon_0 - \dfrac{f_k}{m} t_r = \dfrac{P}{m} - \dfrac{f_k}{m} \dfrac{2}{7} \dfrac{P}{f_k} = \dfrac{5}{7} \dfrac{P}{m}$

Πλαστική και ελαστική κρούση υλικού σημείου με ράβδο



Η ροπή αδράνειας της ράβδου γύρω από κάθετο άξονα σε απόσταση a από το άκρο της είναι:

$$I_a = \frac{M}{3}\left(L^2 - 3La + 3a^2\right).$$

Διαιρώντας τη ροπή αδράνειας I_a , με το τετράγωνο της παραμέτρου κρούσης b, παίρνουμε ένα μέγεθος με μονάδες μάζας που εξαρτάται από το a και το b:

$$m_{ab} = \frac{I_a}{b^2}$$

Η ταχύτητα του σημείου Β της ράβδου μετά την κρούση είναι $\vec{\upsilon}_B = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} \Rightarrow \upsilon_B = \omega b$

Η ορμή δεν διατηρείται επειδή η αντίδραση του άξονα περιστροφής, που είναι ακλόνητος, μπορεί να πάρει οσοδήποτε μεγάλη τιμή οπότε δεν είναι αμελητέα και άρα το σύστημα δεν είναι απομονωμένο.

Και στις δύο κρούσεις διατηρείται η στροφορμή του συστήματος γύρω από τον άξονα Α, καθώς η αντίδραση του άξονα έχει μηδενική ροπή γύρω από τον άξονα και επειδή οι δυνάμεις επαφής κατά την κρούση είναι αντίθετες και ασκούνται στο ίδιο σημείο Β οπότε επάγουν αντίθετες ροπές γύρω από κάθε σημείο.

Όταν αυτές οι δυνάμεις επαφής είναι ελαστικές τότε διατηρείται και η κινητική ενέργεια, μέρος της οποίας μετατρέπεται προσωρινά σε ελαστική δυναμική ενέργεια κατά την κρούση

Πλαστική κρούση

Διατηρείται μόνο η στροφορμή του συστήματος (1 εξίσωση για να βρούμε τη γωνιακή ταχύτητα του συσσωματώματος μετά ή την γραμμική ταχύτητα του σημείου Β)

$$L'_A = L_A \Rightarrow \left(I_a + mb^2\right)\omega = mub \Rightarrow \omega = \frac{mub}{I_a + mb^2} \Rightarrow \upsilon_B = \frac{mu}{m_{ab} + m}$$

Ο τύπος της ταχύτητας του σημείου Β είναι ίδιος με της κεντρικής πλαστικής κρούσης υλικών σημείων με $M \rightarrow m_{ab}$

Ελαστική κρούση

Διατηρείται και η στροφορμή και η κινητική ενέργεια του συστήματος.

$$L_A' = L_A \Rightarrow I_a\omega + m\upsilon b = mub \Rightarrow m(u-\upsilon) = \frac{I_a}{b^2}\omega b \Rightarrow m(u-\upsilon) = m_{ab}\upsilon_B \qquad (1)$$

$$K' = K \Rightarrow \frac{1}{2}I_a\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}mu^2 \Rightarrow m(u^2-\upsilon^2) = \frac{I_a}{b^2}\omega^2 b^2 \Rightarrow m(u-\upsilon)(u+\upsilon) = m_{ab}\upsilon_B^2 \qquad (2)$$

Διαιρώντας κατά τα γνωστά την (2) με την (1) καταλήγουμε σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων :

$$m(u-\upsilon) = m_{ab}\upsilon_B \qquad (1)$$

$$u+\upsilon = \upsilon_B \qquad (2')$$

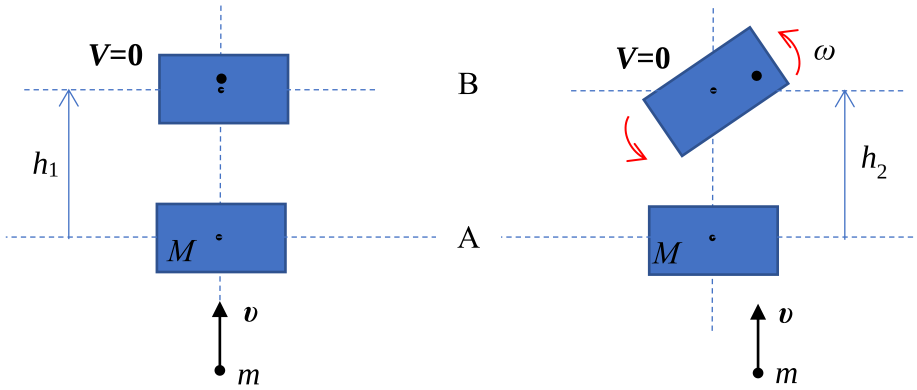
που είναι ίδιες με της κεντρικής ελαστικής κρούσης υλικών σημείων και έχουν λύση

$$\upsilon = \frac{m-m_{ab}}{m+m_{ab}}u$$

$$\upsilon_B = \frac{2m}{m+m_{ab}}u \Rightarrow \omega = \frac{2m}{m+m_{ab}}\frac{u}{b}$$

ΜΕ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΑΚΡΙΒΩΣ ΜΕΘΟΔΟ ΚΑΝΤΕ ΜΟΝΟΙ ΣΑΣ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΟΠΟΥ ΚΑΙ Η ΡΑΒΔΟΣ ΚΙΝΕΙΤΑΙ ΑΡΧΙΚΑ ΓΙΑ ΝΑ ΚΑΤΑΛΗΞΕΤΕ ΠΑΛΙ ΣΤΟΥΣ ΤΥΠΟΥΣ ΤΗΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΚΡΟΥΣΗΣ ΥΛΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΜΕ ΜΑΖΕΣ m , m_{ab}

Πλαστική έκκεντρη κρούση



Η κρούση είναι πλαστική και η σφαίρα σφηνώνεται στο κομμάτι του ξύλου. Στην πρώτη περίπτωση η κρούση είναι κεντρική και το κομμάτι ξύλου δεν περιστρέφεται. Στη δεύτερη η κρούση είναι έκκεντρη και το κομμάτι του ξύλου περιστρέφεται μετά την κρούση.

Ποια είναι η σχέση μεταξύ των μέγιστων υψών?

Α) $h_1 > h_2$

Β) $h_1 = h_2$

Γ) $h_1 < h_2$

Δ) Δεν μπορεί να προσδιοριστεί χωρίς να γνωρίζουμε τις επιμέρους δυνάμεις κατά την πλαστική κρούση

Β) Το μέγιστο ύψος καθορίζεται από την ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την πλαστική κρούση η οποία είναι η ίδια και στις δύο περιπτώσεις καθώς καθορίζεται από τη διατήρηση της ορμής. Η σφαίρα μεταφέρει όλη την ορμή της στο συσσωμάτωμα. Δεν μεταφέρει όμως όλη την κινητική της ενέργεια αφού η κρούση είναι πλαστική. Το κλάσμα κινητικής ενέργειας που χάνεται είναι διαφορετικό στις δύο περιπτώσεις και δεν προσδιορίζεται θεωρητικά. Εξαρτάται από τις τεχνικές λεπτομέρειες της πλαστικής κρούσης. Κάνοντας κάποιες χονδροειδείς προσεγγίσεις για τη δύναμη κατά την εισχώρηση, μπορούμε να συνάγουμε ότι η χαμένη κινητική ενέργεια θα είναι ανάλογη με το βάθος διείσδυσης της σφαίρας.

Πειραματικά βρίσκουμε ότι στη δεύτερη περίπτωση (έκκεντρη) η σφαίρα έχει διεισδύσει λιγότερο μέσα στο ξύλο. Έτσι έχει μεταφέρει περισσότερη κινητική ενέργεια στο συσσωμάτωμα που είναι ίση με την στροφική ενέργεια στο μέγιστο ύψος.

$$m\upsilon = (m+M)V \Rightarrow V = \frac{m\upsilon}{m+M}$$

Το βάρος δεν ασκεί ροπή γύρω από το κέντρο μάζας, έτσι δεν μπορεί να αλλάξει την όποια στροφική κινητική ενέργεια είχε το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Η στροφική κινητική ενέργεια του συσσωματώματος διατηρείται κατά την κατακόρυφη βολή από τη θέση Α στη θέση Β:

$$K_{R\tau\varepsilon\lambda} = K_{R\alpha\rho\chi}$$

$$W_F = K_{T\tau\varepsilon\lambda} + K_{R\tau\varepsilon\lambda} - K_{T\alpha\rho\chi} - K_{R\alpha\rho\chi} \Rightarrow -(m+M)gh = 0 + K_{R\alpha\rho\chi} - \frac{1}{2}(m+M)V^2 - K_{R\alpha\rho\chi} \Rightarrow h = \frac{V^2}{2g}$$

Βίντεο You Tube: Bullet Block Experiment, Bullet Block Experiment Result, Bullet Block Experiment Explained (Veritasium), video response to Bullet Block Experiment.

Αν το σώμα δεν είναι ιδανικό στερεό τότε θα ανέβει ακόμα πιο ψηλά (ελάχιστα) όταν περιστρέφεται! Επειδή όταν θα συμβαίνει η κρούση και το σώμα θα αρχίσει να περιστρέφεται θα το σπρώξει και το τραπέζι.