Διανύσματα

Θυμίζουμε ότι :

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$
$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$$
$$\vec{C} = (C_x, C_y, C_z) = C_x\hat{x} + C_y\hat{y} + C_z\hat{z}$$

τα διανύσματα του τρισδιάστατου φυσικού χώρου $R\times R\times R = R^3$, είναι διατεταγμένες τριάδες αριθμών που ονομάζονται συντεταγμένες. Για την ακρίβεια τριάδες τέτοιων αριθμών ώστε το μήκος (μέτρο) του διανύσματος να μην μεταβάλλεται σε στροφές ούτε σε μετατοπίσεις του συστήματος αναφοράς. Μπορούμε να τα γράφουμε σε μορφή γραμμής ή και σε μορφή στήλης.
Δύο διανύσματα θεωρούνται ίσα όταν είναι ίσες οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους, ανεξάρτητα με το που βρίσκονται στο χώρο

$$\vec{A} = \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} A_x = B_x \\ A_y = B_y \\ A_z = B_z \end{cases}$$

Δηλαδή μια διανυσματική εξίσωση ισοδυναμεί με τρεις αλγεβρικές εξισώσεις.
Επειδή ο χώρος είναι τρισδιάστατος, αρκούν τρία γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα για να κατασκευαστεί κάθε άλλο διάνυσμα του διανυσματικού χώρου. Τα διανύσματα αυτά ονομάζονται διανύσματα βάσης και καθορίζουν το σύστημα αναφοράς. Δύο διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα όταν το ένα δεν μπορεί να γραφτεί σαν πολλαπλάσιο του άλλου. Ο πολλαπλασιασμός διανύσματος επί αριθμό και το άθροισμα διανυσμάτων ορίζονται ως

$$\lambda\vec{A} = (\lambda A_x, \lambda A_y, \lambda A_z) = \lambda A_x\hat{x} + \lambda A_y\hat{y} + \lambda A_z\hat{z}$$
$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) = (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y} + (A_z + B_z)\hat{z}$$

Η καρτεσιανή τριάδα αριθμών (x,y,z) είναι διάνυσμα αλλά οι σφαιρικές (r,φ,θ) και κυλινδρικές (r,φ,z) τριάδες δεν είναι (οι φ και θ δεν είναι καν μήκη).

Εσωτερικό γινόμενο (dot product) $\vec{A}\cdot\vec{B}$

Το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων είναι αριθμός. Αν και λέγεται εσωτερικό γινόμενο είναι εξωτερική πράξη : $R^3\times R^3 \to R$. Χρησιμοποιείται για τον ορισμό μέτρου στο διανυσματικό χώρο. Είναι **μεταθετική** και **επιμεριστική** (ως προς την πρόσθεση) πράξη

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}, \qquad \vec{A}\cdot(\lambda\vec{B} + \mu\vec{C}) = \lambda\vec{A}\cdot\vec{B} + \mu\vec{A}\cdot\vec{C}$$

ορισμός:
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

η δεύτερη ισότητα ισχύει επειδή τα διανύσματα βάσης $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ είναι ορθοκανονικά, άρα :

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1, \quad \hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \hat{z}\cdot\hat{x} = 0$$

Όταν δύο διανύσματα είναι κάθετα $\theta=\pi/2$ τότε το εσωτερικό τους γινόμενο μηδενίζεται :

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{A}\perp\vec{B}}$$

Το μέτρο (μήκος) ενός διανύσματος ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο με τον εαυτό του

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = |\vec{A}||\vec{A}|\cos 0 = |\vec{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$
$$\boxed{|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \geq 0}$$

Η γωνία θ μεταξύ δύο διανυσμάτων βρίσκεται από :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{|\vec{A}||\vec{B}|}}$$

Ένα μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του $\vec{A}$ κατασκευάζεται ως :

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

Εξωτερικό γινόμενο (cross product) $\vec{A}\times\vec{B}$

Το εξωτερικό γινόμενο είναι εσωτερική πράξη $R^3 \times R^3 \to R^3$, δηλαδή το αποτέλεσμα είναι διάνυσμα το οποίο είναι κάθετο και στα δύο διανύσματα του γινομένου. Η πράξη είναι **αντιμεταθετική** και **επιμεριστική** :

$$\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B}, \qquad \vec{A}\times(\lambda\vec{B}+\mu\vec{C}) = \lambda\vec{A}\times\vec{B}+\mu\vec{A}\times\vec{C}$$

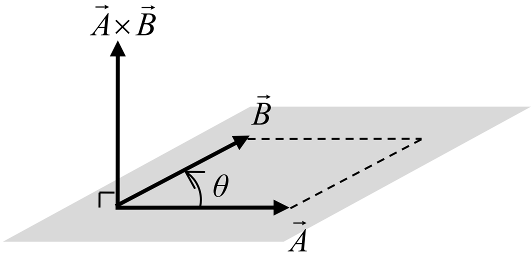
Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου είναι:

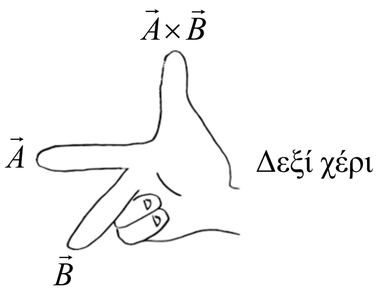
$$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$$

και αντιστοιχεί στο εμβαδόν του παραλληλογράμμου που κατασκευάζεται με πλευρές τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$.

Η διεύθυνσή του διανύσματος $\vec{A}\times\vec{B}$ είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$.

Η κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{A}\times\vec{B}$ ορίζεται δεξιόστροφα με τον κανόνα του δεξιού χεριού όπως στο σχήμα. Η γωνία θ αρχίζει από το πρώτο διάνυσμα του γινομένου και καταλήγει στο δεύτερο δεξιόστροφα, δηλαδή φτιάχνοντας το τόξο της με τα 4 δάχτυλα του δεξιού χεριού. Ο αντίχειρας δείχνει στην κατεύθυνση του εξωτερικού γινομένου.





Σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{x}\left(A_yB_z - B_yA_z\right) + \hat{y}\left(A_zB_x - B_zA_x\right) + \hat{z}\left(A_xB_y - B_xA_y\right)}$$

επειδή το σύστημα αναφοράς είναι δεξιόστροφο (σειρά *xyz*)

$\hat{x}\times\hat{x} = \hat{y}\times\hat{y} = \hat{z}\times\hat{z} = 0, \quad \hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}, \quad \hat{y}\times\hat{z} = \hat{x}, \quad \hat{z}\times\hat{x} = \hat{y}$

Όταν δύο διανύσματα είναι παράλληλα θ=0 τότε το εξωτερικό τους γινόμενο μηδενίζεται :

$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \parallel \vec{B}}$$

Από τη θεμελιώδη τριγωνομετρική ταυτότητα ($\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$) παίρνουμε

$$\boxed{\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)^2 + \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)^2 = A^2B^2}$$

Τριπλό Βαθμωτό γινόμενο διανυσμάτων $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$

$$\boxed{\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) \equiv \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}}$$

Αντιπροσωπεύει τον όγκο του παραλληλεπίπεδου που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$.

Ιδιότητες

$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}$	αντιμετάθεση των δυο γινομένων
$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)=\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$	κυκλική μετάθεση των διανυσμάτων
$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=-\vec{A}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{B}\right)=-\vec{B}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)=-\vec{C}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{A}\right)$	αντιμετάθεση δυο διανυσμάτων

Αν το βαθμωτό τριπλό γινόμενο τριών διανυσμάτων είναι μηδέν τότε τα τρία διανύσματα κείνται στο ίδιο επίπεδο (άρα ορίζουν μηδέν όγκο)

Αν οποιαδήποτε δύο από τα διανύσματα του γινομένου είναι ίσα τότε το γινόμενο μηδενίζεται :

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{A}\right)=0$$

Ισχύουν επίσης

$$\left(\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right)\vec{A}=\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)$$

$$\left(\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right)\left(\vec{D}\times\left(\vec{E}\times\vec{F}\right)\right)=\begin{vmatrix}\vec{A}\cdot\vec{D} & \vec{A}\cdot\vec{E} & \vec{A}\cdot\vec{F}\\ \vec{B}\cdot\vec{D} & \vec{B}\cdot\vec{E} & \vec{B}\cdot\vec{F}\\ \vec{C}\cdot\vec{D} & \vec{C}\cdot\vec{E} & \vec{C}\cdot\vec{F}\end{vmatrix}$$

τα οποία είναι αντίστοιχα γινόμενο αριθμού με διάνυσμα και απλό γινόμενο δύο αριθμών. Η τελευταία εξίσωση είναι η γνωστή ιδιότητα των οριζουσών : το γινόμενο των οριζουσών δύο πινάκων είναι ίσο με την ορίζουσα του γινομένου των δύο πινάκων

Τριπλό Διανυσματικό γινόμενο διανυσμάτων $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$

$$\boxed{\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}}$$

Ιδιότητες

$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=-(\vec{C}\cdot\vec{B})\vec{A}+(\vec{C}\cdot\vec{A})\vec{B}$

$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)+\vec{B}\times\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)+\vec{C}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=0$ ταυτότητα Jacobi

$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}-\vec{B}\times\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)$

Οικονομική γραφή γινομένων

Τα διάφορα γινόμενα των διανυσμάτων γράφονται και με οικονομικότερο τρόπο αν ορίσουμε το συμμετρικό σύμβολο, δέλτα του Kronecker :

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

(δηλαδή : $\delta_{11}=\delta_{22}=\delta_{33}=1,\quad \delta_{12}=\delta_{21}=\delta_{13}=\delta_{31}=\delta_{23}=\delta_{32}=0$)

και το αντισυμμετρικό σύμβολο, Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & \text{άρτιες μεταθεσεις των 123, δηλαδή αν } (i,j,k)=(1,2,3),\ (2,3,1) \text{ ή } (3,1,2)\\ 0 & \text{αν δυο δείκτες είναι ίσοι, δηλαδή αν } i=j,\ \text{ή } j=k,\ \text{ή } k=i\\ -1 & \text{περιττές μεταθέσεις των 123, δηλαδή αν } (i,j,k)=(2,1,3),\ (3,2,1) \text{ ή } (1,3,2)\end{cases}$$

Π.χ. $\varepsilon_{112}=\varepsilon_{212}=\varepsilon_{333}=\ldots$ κλπ. $=0,\quad \varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1,\quad \varepsilon_{213}=\varepsilon_{132}=\varepsilon_{321}=-1$

Για τους οποίους ισχύει : $\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{k\ell m}=\delta_{ik}\delta_{j\ell}-\delta_{im}\delta_{j\ell}}$

Τότε

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=\delta_{ij}A^iB^j}$$

$$\boxed{\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_i=\varepsilon_{ijk}A^jB^k}$$

$$\boxed{\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\varepsilon_{ijk}A^iB^jC^k}$$

$$\boxed{\left(\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right)_i=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{k\ell m}A^jB^\ell C^m}$$

όπου 1) οι δείκτες παίρνουν τις τιμές από 1 έως 3 : i,j,k = 1,2,3
2) επαναλαμβανόμενοι δείκτες πάνω-κάτω αθροίζονται
3) και έχουμε αντιστοιχίσει $x\to 1,\ \ y\to 2,\ \ z\to 3$

Π.χ. $\vec{A}\cdot\vec{B}=\delta_{ij}A^iB^j=\sum_{i=1}^{3}A_i\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}B_j=\sum_{i=1}^{3}A_i\left(\delta_{i1}B_1+\delta_{i2}B_2+\delta_{i3}B_3\right)=$

$$=A_1(\delta_{11}B_1+\delta_{12}B_2+\delta_{13}B_3)+A_2(\delta_{21}B_1+\delta_{22}B_2+\delta_{23}B_3)+A_3(\delta_{31}B_1+\delta_{32}B_2+\delta_{33}B_3)=$$
$$=1\cdot A_1B_1+0\cdot A_1B_2+0\cdot A_1B_3+0\cdot A_2B_1+1\cdot A_2B_2+0\cdot A_2B_3+0\cdot A_1B_1+0\cdot A_1B_2+1\cdot A_1B_3=$$
$$=A_1B_1+A_2B_2+A_1B_3=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

Συναρτήσεις διανυσμάτων

Επειδή ένα διάνυσμα του χώρου ορίζεται από τρεις αριθμούς (x, y, z), τις συντεταγμένες του, οι συναρτήσεις που αντιστοιχίζουν ένα διάνυσμα σε ένα αριθμό ή σε ένα άλλο διάνυσμα, θα είναι συναρτήσεις τριών μεταβλητών:

Βαθμωτή συνάρτηση πολλών μεταβλητών : $\varphi(x,y,z)$

Διανυσματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών: $\vec{A}(x,y,z)=A_x(x,y,z)\hat{x}+A_y(x,y,z)\hat{y}+A_z(x,y,z)\hat{z}$

$$=\left(A_x(x,y,z),\ A_y(x,y,z),\ A_z(x,y,z)\right)$$

Η διανυσματική συνάρτηση αποτελείται από τρεις βαθμωτές συναρτήσεις, τις συνιστώσες της, όπως ένα διάνυσμα αποτελείται από τρεις αριθμούς

Η **μερική παράγωγος βαθμωτής συνάρτησης** πολλών μεταβλητών ως προς μια από αυτές τις μεταβλητές ορίζεται όπως και η συνηθισμένη παράγωγος μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής θεωρώντας τις υπόλοιπες μεταβλητές σταθερές

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\varphi(x+\Delta x,y,z)-\varphi(x,y,z)}{\Delta x}\right)$$

και ανάλογα ορίζονται και οι ανώτερες παράγωγοι σε μια μεταβλητή ή μικτές σε δύο ή τρεις μεταβλητές

Π.χ. $\varphi(x,y,z)=2x^2yz+4y^2z^2+xz+\dfrac{y}{x}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=4xyz+z-\frac{y}{x^2},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=2x^2z+8yz^2+\frac{1}{x},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=2x^2y+8y^2z+x$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=4yz-2\frac{y}{x^3},\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=8z^2,\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=8y^2$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}=4xz-\frac{1}{x^2},\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=4xz-\frac{1}{x^2},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x\partial z}=4xy+1,$$

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial z \partial x} = 4xy + 1$, $\quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial z \partial y} = 2x^2 + 16yz$, $\quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial y \partial z} = 2x^2 + 16yz$

Ισχύει γενικά ότι η σειρά των παραγωγίσεων δεν έχει σημασία

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial x \partial z} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial z \partial x}$$

Ορίζεται ο διανυσματικός διαφορικός τελεστής **ανάδελτα** ή **del** ως το διάνυσμα των αντίστοιχων παραγώγων

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}$$

το εσωτερικό γινόμενο με τον εαυτό του ονομάζεται **Λαπλασιανή** (**Laplacian**):

$$\boxed{\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

Κλίση ή **βαθμίδα** (**grad** από gradient) βαθμωτής συνάρτησης

$$\boxed{\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\hat{z} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = \mathrm{grad}\varphi}$$

Η φ είναι βαθμωτή συνάρτηση όμως η κλίση της $\vec{\nabla}\varphi$, είναι μια διανυσματική συνάρτηση που όπως αποδεικνύεται δείχνει σε κάθε σημείο του χώρου την κατεύθυνση μέγιστης μεταβολής της φ.

Αν μία από τις μεταβλητές της φ , έστω η x, μεταβληθεί από x σε $x+dx$, τότε η μερική μεταβολή της φ, κατ΄αναλογία με τη μεταβολή μιας συνάρτησης $f(x)$ μιας μεταβλητής $df = \dfrac{df}{dx}dx$, θα είναι

$$d_x\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx$$

Έτσι η συνολική μεταβολή της φ όταν μεταβληθούν ταυτόχρονα και οι τρεις μεταβλητές και το διάνυσμα θέσης μεταβληθεί από

$$\vec{r} = (x, y, z) \xrightarrow{\sigma\varepsilon} \vec{r}\,' = (x', y', z') = (x + dx, y + dy, z + dz) = (x, y, z) + (dx, dy, dz) = \vec{r} + d\vec{r}$$

θα είναι

$$d\varphi = d_x\varphi + d\varphi_y + d\varphi_z = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz \Rightarrow \boxed{d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r}}$$

Μπορείτε εύκολα να αποδείξετε ότι για κάθε βαθμωτή συνάρτηση φ ισχύει η διανυσματική ταυτότητα :

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0}$$

Φανταστείτε το σαν το εξωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος με τον εαυτό του το οποίο είναι μηδέν.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial\varphi/\partial x & \partial\varphi/\partial y & \partial\varphi/\partial z \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}\right) = 0$$

Αφού $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}$, κλπ. , η σειρά της παραγώγισης δεν έχει σημασία.

Για διανυσματικές συναρτήσεις $\vec{A}(x,y,z)$ μπορούμε να κάνουμε δύο πράγματα με το ανάδελτα : είτε να πάρουμε το εσωτερικό τους γινόμενο $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ είτε το εξωτερικό τους γινόμενο $\vec{\nabla}\times\vec{A}$

Ροή διανυσματικής συνάρτησης μέσα από μια επιφάνεια είναι το επιφανειακό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\vec{A}$ πάνω στην επιφάνεια S :

$$\Phi_A = \int_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

Το διάνυσμα μιας επιφάνειας είναι ένα διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια με μέτρο ίσο με το εμβαδόν της. Η κατεύθυνσή του ορίζεται ώστε να εξέρχεται από την κυρτή πλευρά της. Αν η επιφάνεια είναι επίπεδη ορίζουμε εμείς τη φορά του διανύσματός της. Η ροή σταθερής συνάρτησης μέσα από επίπεδη επιφάνεια είναι το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος της επιφάνειας επί την τιμή της διανυσματικής συνάρτησης πάνω στην επιφάνεια. Όταν η επιφάνεια δεν είναι επίπεδη και η διανυσματική συνάρτηση δεν έχει σταθερή τιμή πάνω στην επιφάνεια, τότε χωρίζουμε την επιφάνεια σε πολύ μικρά κομμάτια που να θεωρούνται επίπεδα και τα οποία να είναι τόσο μικρά ώστε η συνάρτηση να έχει σταθερή τιμή πάνω τους και προσθέτουμε τις επιμέρους στοιχειώδεις ροές $\Delta\Phi_i = \vec{A}_i\cdot\Delta\vec{S}_i$. Στο όριο που τα εμβαδά των κομματιών πάνε στο μηδέν το άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα.

$$\sum_i \Delta\Phi_i = \sum_i \vec{A}_i\cdot\Delta\vec{S}_i \xrightarrow[\Delta S_i\to 0]{} \Phi_A = \int_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

Απόκλιση (Divergence) διανυσματικής συνάρτησης σε ένα σημείο (*x,y,z,*)

Είναι το όριο του λόγου της ροής της $\vec{A}$ μέσα από μια κλειστή επιφάνεια S γύρω από το σημείο (*x,y,z,*) προς τον όγκο $V(S)$ που περικλείει η επιφάνεια, όταν η επιφάνεια συρρικνώνεται στο σημείο (*x,y,z,*) και άρα ο περικλειόμενος όγκος της τείνει στο μηδέν

$$\mathrm{div}\vec{A} = \lim_{V(S)\to 0}\left(\frac{\Phi_A}{V}\right) = \lim_{V(S)\to 0}\left(\frac{\int_S \vec{A}\cdot d\vec{S}}{V}\right)$$

Η απόκλιση είναι βαθμωτή συνάρτηση. Αποδεικνύεται, θεώρημα απόκλισης, ότι :

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

Θεώρημα απόκλισης : $\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}dV$

«Έργο» διανυσματικής συνάρτησης

Το «έργο» μιας διανυσματικής συνάρτησης είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\vec{A}$ πάνω στην καμπύλη C από ένα σημείο a έως ένα σημείο b :

$$W_A = \int_a^b \vec{A}\cdot d\vec{\ell}_C$$

Στροβιλισμός (curl) ή στρέψη (rot) διανυσματικής συνάρτησης

Είναι κι αυτή διανυσματική συνάρτηση όπως η $\vec{A}$. Κάθε συνιστώσα της είναι το όριο του λόγου του έργου της διανυσματικής συνάρτησης πάνω σε μια κλειστή καμπύλη C που βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στην αντίστοιχη συνιστώσα και περιέχει το σημείο (*x,y,z*) στο εσωτερικό της προς το εμβαδόν που περικλείει η κλειστή καμπύλη όταν η καμπύλη συρρικνώνεται στο σημείο (*x,y,z*) και άρα το περικλειόμενο εμβαδόν τείνει στο μηδέν

Π.χ.
$$\left(\mathrm{curl}\vec{A}\right)_x = \lim_{S(C_{yz})\to 0}\left(\frac{W_A}{S}\right) = \lim_{S(C_{yz})\to 0}\left(\frac{\int\limits_{C_{yz}} \vec{A}\cdot d\ell_C}{S}\right)$$

Αποδεικνύεται, θεώρημα Stokes, ότι :

$$\boxed{\mathrm{curl}\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\hat{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\hat{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)}$$

Θεώρημα Stokes : $\oint\limits_C \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \int\limits_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\cdot d\vec{S}$

Ταυτότητες με το ανάδελτα $\vec{\nabla}$

$\text{div grad} f = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \nabla^2 f$

$\text{curl grad} f = \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$

$\text{div div}\vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{A}}\right)$

$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} = \vec{\nabla}^2\vec{A}$

$\text{div curl}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{A}}\right) = 0$

$\text{curl curl}\vec{A} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{A}}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{A}}\right) - \nabla^2\vec{\mathrm{A}}$

$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}\right) = \vec{\mathrm{B}}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{A}}\right) - \vec{\mathrm{A}}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{B}}\right)$

$\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + 2\vec{\nabla}f\cdot\vec{\nabla}g + g\nabla^2 f$

Εκφράσεις του ανάδελτα και της λαπλασιανής σε σφαιρικές και κυλινδρικές συντεταγμένες

Κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Σφαιρικές συντεταγμένες

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$