ΠΛΑΓΙΑ ΒΟΛΗ

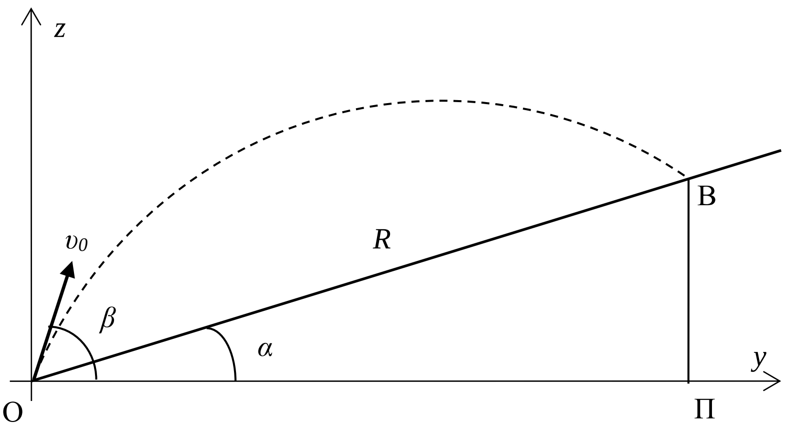
1) Πλάγια βολή σε κεκλιμένο επίπεδο

Βλήμα εκτοξεύεται από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου που σχηματίζει γωνία α με την οριζόντιο. Το βλήμα βάλλεται με ταχύτητα υ_0 που σχηματίζει γωνία β με το οριζόντιο επίπεδο.

1.1 Βρείτε το βεληνεκές R της βολής

1.2 Δείξτε ότι το βεληνεκές γίνεται μέγιστο όταν $\beta = \pi/4 + \alpha/2$

1.3 Βρείτε το μέγιστο βεληνεκές



Λύση

1.1 Εξίσωση κίνησης βλήματος

$$\vec{r} = (\upsilon_0 \cos\beta)t\hat{y} + [(\upsilon_0 \sin\beta)t - \frac{1}{2}gt^2]\hat{z} \Rightarrow \begin{cases} y = (\upsilon_0 \cos\beta)t \\ z = (\upsilon_0 \sin\beta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Εξίσωση ευθείας κεκλιμένου επιπέδου

$$z = y\tan\alpha$$

Κοινά σημεία ευθείας κεκλιμένου επιπέδου και τροχιάς βλήματος τις χρονικές στιγμές t=0 (Ο) και

$$(\upsilon_0 \sin\beta)t - \frac{1}{2}gt^2 = \tan\alpha(\upsilon_0 \cos\beta)t \Rightarrow \frac{1}{2}gt = \upsilon_0 \sin\beta - \upsilon_0 \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\beta \Rightarrow$$

$$t = \frac{2\upsilon_0}{g\cos\alpha}(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) \Rightarrow$$

$$t = \frac{2\upsilon_0 \sin(\beta-\alpha)}{g\cos\alpha}$$ στο Β

Από τριγωνομετρία στο τρίγωνο ΟΒΠ

$$\cos\alpha = \frac{\text{ΟΠ}}{\text{ΟΒ}} = \frac{y}{R} \Rightarrow R = \frac{y}{\cos\alpha} = \upsilon_0 \cos\beta \frac{2\upsilon_0 \sin(\beta-\alpha)}{g\cos\alpha}\frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow R = \frac{2\upsilon_0^2 \sin(\beta-\alpha)\cos\beta}{g\cos^2\alpha}$$

Από τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$$

$$\boxed{R = \frac{\upsilon_0^2}{g\cos^2\alpha}\left[\sin(2\beta-\alpha) - \sin\alpha\right]}$$

1.2

$R = R_{\max}$ όταν $\sin(2\beta-\alpha) = 1 \Rightarrow 2\beta - \alpha = \pi/2 \Rightarrow \beta = \alpha/2 + \pi/4$

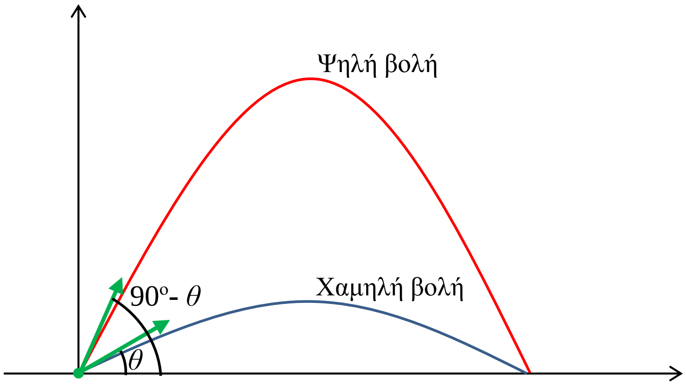
1.3

$$R_{\max} = \frac{\upsilon_0^2}{g\cos^2\alpha}\left[1-\sin\alpha\right] = \frac{\upsilon_0^2}{g(1-\sin^2\alpha)}\left[1-\sin\alpha\right] \Rightarrow R_{\max} = \frac{\upsilon_0^2}{g(1+\sin\alpha)}$$

2) Δείξτε ότι συμπληρωματικές γωνίες βολής $\theta_1=\theta$ και $\theta_2=\pi/2-\theta$, π.χ. 30° και 60° έχουν το ίδιο βεληνεκές

Δείξτε ότι για τους χρόνους πτήσης τους ισχύουν : $T_1 = \tan\theta \cdot T_2$ και $\sqrt{T_1^2+T_2^2} = T_{90^o}$

όπου $\theta=\theta_1$ η μικρότερη από τις δύο γωνίες και $T_{90^o} = 2\upsilon_0/g$ ο χρόνος πτήσης της κατακόρυφης βολής



Λύση

Για συμπληρωματικές γωνίες $\theta_1+\theta_2 = 90^o$, ισχύει ότι το ημίτονο της μίας είναι ίσο με το συνημίτονο της άλλης : $\sin\theta_1 = \cos\theta_2$, $\cos\theta_1 = \sin\theta_2$, οπότε : $R_1 = \dfrac{2\upsilon_0^2 \sin\theta_1 \cos\theta_1}{g} = \dfrac{2\upsilon_0^2 \cos\theta_2 \sin\theta_2}{g} = R_2$

Η΄ επειδή παραπληρωματικές γωνίες $2\theta_1 + 2\theta_2 = 180^o$ έχουν το ίδιο ημίτονο , έχουμε :

$$R_1 = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\theta_1}{g} = \frac{2\upsilon_0^2 \sin(180^o - 2\theta_2)}{g} = \frac{2\upsilon_0^2 \sin(2\theta_2)}{g} = R_2$$

Οι χρόνοι πτήσης είναι $T_1 = \dfrac{2\upsilon_0 \sin\theta}{g}$ και $T_2 = \dfrac{2\upsilon_0 \sin(90^o - \theta)}{g} = \dfrac{2\upsilon_0 \cos\theta}{g}$

Διαιρώντας παίρνουμε : $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow T_1 = T_2 \tan\theta$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας παίρνουμε :

$$T_1^2 + T_2^2 = \frac{4\upsilon_0^2 \sin^2\theta}{g^2} + \frac{4\upsilon_0^2 \cos^2\theta}{g^2} = \frac{4\upsilon_0^2}{g^2} = T_{90^o}^2$$

3) Δείξτε ότι το βεληνεκές και το μέγιστο ύψος συνδέονται με τη σχέση $h = R\dfrac{\tan\beta}{4}$

Λύση

Το βεληνεκές και το μέγιστο ύψος δίνονται από τους τύπους $R = \dfrac{2\upsilon_0^2 \sin\beta\cos\beta}{g}$ και $h = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin^2\beta}{2g}$.

Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε :

$$\frac{h}{R} = \frac{\dfrac{\upsilon_0^2 \sin^2\beta}{2g}}{\dfrac{2\upsilon_0^2 \sin\beta\cos\beta}{g}} = \frac{\sin\beta}{4\cos\beta} \Rightarrow h = R\frac{\tan\beta}{4}$$

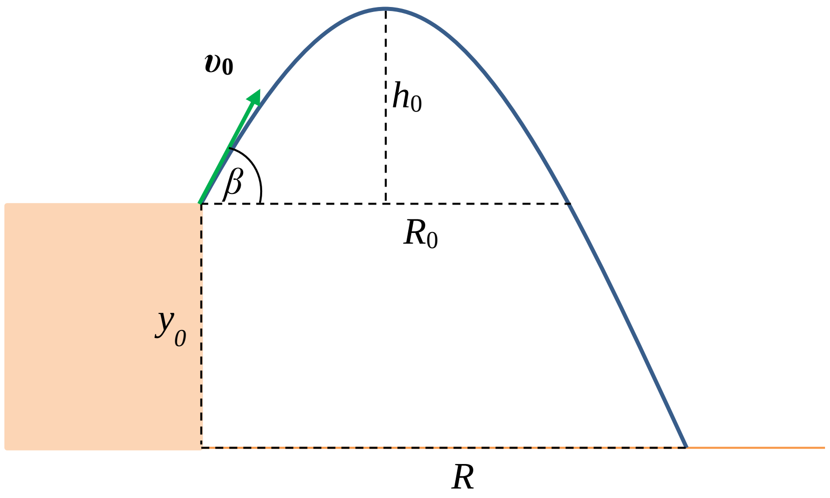
4) Βεληνεκές σε βολή από ύψος

Δείξτε ότι για βολή από αρχικό ύψος y_0 το βεληνεκές δίνεται από τον τύπο

$$R = \frac{\upsilon_0 \cos\beta}{g}\left(\upsilon_0 \sin\beta + \sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2\beta + 2gy_0}\right)$$

Φέρτε τον παραπάνω τύπο στη μορφή $R = \frac{R_0}{2}\left(1+\sqrt{1+y_0/h_0}\right)$

όπου $R_0 = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\beta}{g}$ και $h_0 = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\beta}{2g}$ το βεληνεκές και το μέγιστο ύψος για βολή από το έδαφος (y_0=0)



Απάντηση

Αρχικά ελέγχουμε ότι η παραπάνω έκφραση δίνει το γνωστό μας βεληνεκές $\frac{\upsilon_0^2 \sin 2\beta}{g}$ για βολή από το έδαφος (δηλ. με αρχικό ύψος y_0 ίσο με μηδέν). Πράγματι ισχύει :

$$R(y_0=0) = \frac{\upsilon_0 \cos\beta}{g}\left(\upsilon_0 \sin\beta + \sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2\beta + 2g\cdot 0}\right) = \frac{\upsilon_0 \cos\beta}{g}\left(\upsilon_0 \sin\beta + \upsilon_0 \sin\beta\right)$$
$$= \frac{\upsilon_0^2 2\cos\beta \sin\beta}{g} = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\beta}{g}$$

Η εξίσωση του ύψους είναι

$$y = y_0 + \upsilon_0 \sin\beta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

Βρίσκουμε το χρόνο πτήσης T>0 , θέτοντας y=0 και λύνοντας τη δευτεροβάθμια

$$-\frac{1}{2}gt^2 + \upsilon_0 \sin\beta\cdot t + y_0 = 0 \Rightarrow t^2 - \left(\frac{2\upsilon_0 \sin\beta}{g}\right)t - \frac{2y_0}{g} = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-\left(-\frac{2\upsilon_0 \sin\beta}{g}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{2\upsilon_0 \sin\beta}{g}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot\left(-\frac{2y_0}{g}\right)}}{2\cdot 1}$$
$$= \frac{\upsilon_0 \sin\beta}{g} \pm \frac{\sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2\beta + 2gy_0}}{g}$$

Επιλέγουμε τη θετική λύση : $T = \frac{\upsilon_0 \sin\beta}{g} + \frac{\sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2\beta + 2gy_0}}{g}$

Το βεληνεκές είναι

$$R = \upsilon_{0x} T = \upsilon_0 \cos\beta \left(\frac{\upsilon_0 \sin\beta}{g} + \frac{\sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2\beta + 2gy_0}}{g} \right) = \frac{\upsilon_0 \cos\beta}{g}\left(\upsilon_0 \sin\beta + \sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2\beta + 2gy_0} \right)$$

Το οποίο γράφεται και

$$R = \frac{\upsilon_0 \cos\beta}{g}\left(\upsilon_0 \sin\beta + \upsilon_0 \sin\beta \sqrt{1 + \frac{2gy_0}{\upsilon_0^2 \sin^2\beta}} \right) = \frac{\upsilon_0 \cos\beta}{g} \upsilon_0 \sin\beta \left(1 + \sqrt{1 + \frac{y_0}{\upsilon_0^2 \sin^2\beta / 2g}} \right) \Rightarrow$$

$$R = \frac{R_0}{2}\left(1 + \sqrt{1 + y_0/h_0} \right)$$

5) Κεντρομόλος επιτάχυνση και ακτίνα καμπυλότητας στην πλάγια βολή

Τη χρονική στιγμή t =0, εκτελούμε από το έδαφος πλάγια βολή με αρχική ταχύτητα υ_0=100 m/s σε γωνία βολής β=53,13° πάνω από οριζόντιο έδαφος. Δίνονται cosβ=0,6 και sinβ=0,8.

Υπολογίστε το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης και την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς :

Α) τις χρονικές στιγμές t = 3,5 s και t = 12,5 s

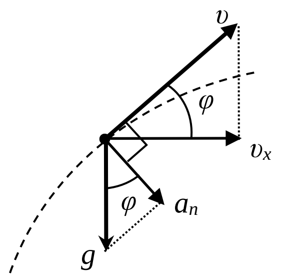
Β) όταν το σώμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος του $y = h$

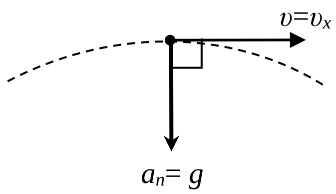
Γ) όταν οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας είναι ίσες κατά μέτρο $\upsilon_y = \pm\upsilon_x$

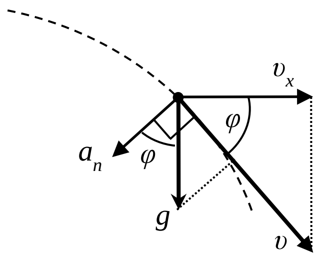
Δ) τη χρονική στιγμή t = 0 s

Λύση

Η ολική επιτάχυνση έχει μέτρο g και κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα κάτω ($-\hat{z}$): $\vec{a} = -g\hat{z}$.







Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι η συνιστώσα της επιτάχυνσης στην κατεύθυνση που είναι κάθετη στην τροχιά (δηλ. στην ταχύτητα) και άρα υπολογίζεται από τον τύπο $a_n = g\cos\varphi$ όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα. Η γωνία φ είναι η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα με τον οριζόντιο άξονα x : $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} \right)$. Άρα στο μέγιστο ύψος που η επιτάχυνση είναι κάθετη στην ταχύτητα, όλη η επιτάχυνση g είναι κεντρομόλος.

Η στιγμιαία ακτίνα καμπυλότητας ρ συνδέεται με την κεντρομόλο επιτάχυνση με τον τύπο : $a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}$

Ο χρόνος ανόδου της βολής είναι $t_{\alpha\nu} = \frac{\upsilon_{0y}}{g} = \frac{\upsilon_0 \sin\beta}{g} = \frac{100 \cdot 0,8}{10} = 8$ s

Άρα στα 3,5 s το βλήμα ανεβαίνει ακόμα ενώ στα 12,5 s κατεβαίνει.

Α) $\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \sigma\tau\alpha\theta = \upsilon_0 \cos\beta = 100 \cdot 0,6 = 60$ m/s

$\upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt = \upsilon_0 \sin\beta - gt = 80 - 10t$ (SI)

Για t=3,5 s

$\upsilon_y = 80 - 10\cdot\ 3,5 = 45$ m/s

$$\tan\varphi = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4} \Rightarrow \varphi = 36,87^{\text{o}}$$

$a_n = g\cos\varphi = 10\cos 36,87^{\text{o}} = 10\cdot\ 0,8 = 8$ m/s

$\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 = 60^2 + 45^2 = 5.625 \Rightarrow 75$ m / s

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a_n} = \frac{5.625}{8} = 703{,}125 \text{ m}$$

Για t=12,5 s

$\upsilon_y = 80 - 10\cdot\ 12,5 = -45$ m/s

$$\tan\varphi = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{-45}{60} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \varphi = -36,87^{\text{o}}$$

$a_n = g\cos\varphi = 10\cos(-36,87^{\text{o}}) = 10\cdot\ 0,8 = 8$ m/s

$\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 = 60^2 + 45^2 = 5.625 \Rightarrow 75$ m / s

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a_n} = \frac{5.625}{8} = 703{,}125 \text{ m}$$

Β) Στο μέγιστο ύψος η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι ίση με g και το μέτρο της ταχύτητας ίσο με $\upsilon=\upsilon_x$

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a_n} = \frac{\upsilon_{0x}^2}{g} = \frac{60^2}{10} = 360 \text{ m}$$

Το μέγιστο ύψος είναι ίσο με $h = \dfrac{\upsilon_{0y}^2}{2g} = \dfrac{80^2}{20} = 320$ m άρα το στιγμιαίο κέντρο καμπυλότητας βρίσκεται 40 m κάτω από την επιφάνεια του εδάφους.

Γ) Όταν $\upsilon_y = \pm\upsilon_x \Rightarrow \tan\varphi = \pm 1 \Rightarrow \varphi = \pm 45^{\text{o}}$

Άρα η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει μέτρο $a_n = g\cos\varphi = g\cos(\pm 45^{\text{o}}) = \dfrac{g}{\sqrt{2}} = \dfrac{10}{\sqrt{2}}$ m/s^2

Η ακτίνα καμπυλότητας είναι ίση με

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a_n} = \frac{2\upsilon_{0x}^2}{g/\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,\frac{60^2}{10} = 1.018,2 \text{ m}$$

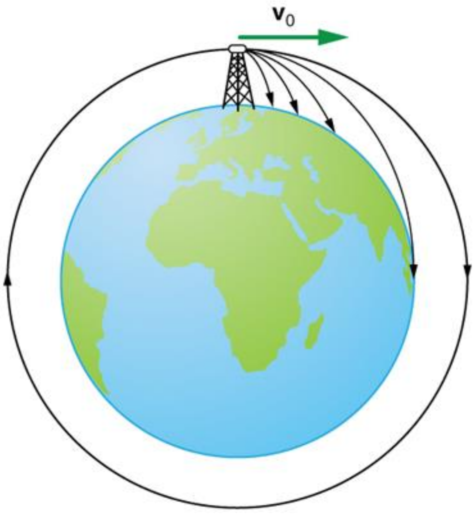
Δ) Τη χρονική στιγμή t = 0 s $\upsilon = \upsilon_0$ και $\varphi = \beta$

$a_n = g\cos\beta = 10\cdot\ 0,6 = 6$ m/s^2

$$\rho = \frac{\upsilon_0^2}{a_n} = \frac{100^2}{6} = 1.666,7 \text{ m}$$

Για βολές σε πολύ μεγάλο βεληνεκές η καμπυλότητα της Γης πρέπει να ληφθεί υπόψη καθώς και η μεταβολή του g με το ύψος. Το βλήμα μπορεί να επιστρέψει στη Γη ή να μπει σε τροχιά γύρω της (κυκλική ή ελλειπτική) ή να ξεφύγει εντελώς από τη Γη (σε τροχιά παραβολική ή υπερβολική).

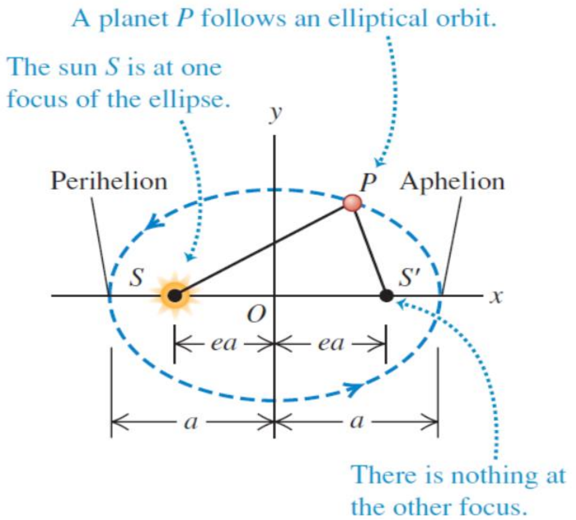
Για τις περιπτώσεις που το βλήμα δεν επιστρέφει στη Γη το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα της εύρεσης της τροχιάς των πλανητών



ΤΡΟΧΙΕΣ ΠΛΑΝΗΤΩΝ

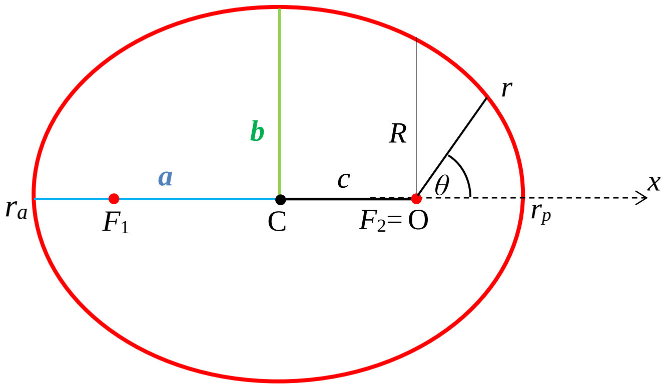
Για τις τροχιές των πλανητών ισχύουν οι τρεις εμπειρικοί νόμοι του Kepler (1621) τους οποίους ανακάλυψε εξετάζοντας τα αστρονομικά δεδομένα του Tycho Brahe (1546-1601) :

1ος νόμος Kepler : Οι τροχιές των πλανητών είναι ελλείψεις με τον Ήλιο στη μια εστία της έλλειψης



$SP+S'P = 2a = σταθ.$

Η γεωμετρία της έλλειψης δίνεται στο παρακάτω σχήμα



a , $0<e<1$

$$b = a\sqrt{1-e^2}$$

$$c=ea$$

$$R= a\,(1-e^2)$$

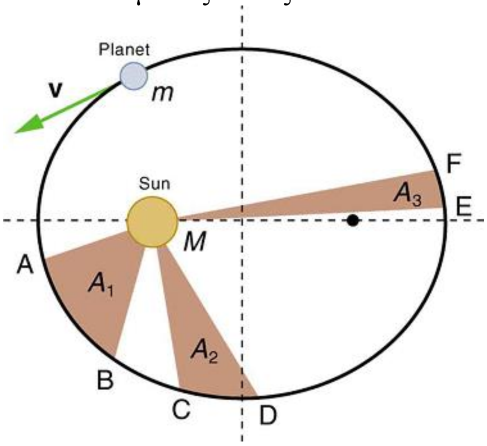
$$a = \frac{r_a + r_p}{2}$$

$$b = \sqrt{r_a r_p}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$r = \frac{R}{1+e\cos\theta}$$

2ος νόμος Kepler : Το εμβαδική ταχύτητα είναι σταθερή. Δηλαδή το εμβαδά που σαρώνει η επιβατική ακτίνα σε ίσα χρονικά διαστήματα είναι ίσα μεταξύ τους.



Οι επιφάνειες A_1, A_2, A_3 σαρώνονται σε ίσα χρονικά διαστήματα $\Delta t = t_B - t_A = t_D - t_C = t_F - t_E$

3ος νόμος Kepler : $a^3 = 3\times 10^{-19}\cdot T^2$ (SI)

Οι νόμοι αυτοί μπορούν να αποδειχθούν από το νόμο της βαρύτητας του Νεύτωνα (1687).

Η βαρυτική δύναμη, σε έναν πλανήτη μάζας m από το αστέρι μάζας $M>>m$ γύρω από το οποίο περιστρέφεται, δίνεται από τον νόμο της παγκόσμιας βαρύτητας του Νεύτωνα

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} \quad (1)$$

Αυτό δεν είναι παρά το πρόβλημα των δύο σωμάτων. Άρα η εξίσωση που πρέπει να λύσουμε για να βρούμε την τροχιά του πλανήτη είναι :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{\mu} \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{Mm}{\mu}\frac{1}{r^2}\hat{r} \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{k}{r^2}\hat{r} \quad (2)$$

όπου μ ανηγμένη μάζα του συστήματος $\mu = mM/(m+M) \approx m$ για $M>>m$

Επιλογή συστήματος συντεταγμένων
Η δύναμη είναι κεντρική, δηλαδή εξαρτάται μόνο από την απόσταση r και είναι στην ακτινική διεύθυνση $\hat{r}$, οπότε βολεύουν οι σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ). Το σημείο αναφοράς και αρχή των αξόνων είναι το κέντρο μάζας CM των δύο σωμάτων (πρακτικά κέντρο του αστεριού O για $M>>m$).

6) Δείξτε ότι η τροχιά είναι επίπεδη και άρα αρκούν μόνο δύο συντεταγμένες για να την περιγράψουν.
Λύση

Δείχνουμε ότι το διάνυσμα $\vec{h}=\vec{r}\times\vec{\upsilon}$ είναι σταθερό $\dfrac{d\vec{h}}{dt}=0$ (3) .

Το διάνυσμα αυτό δεν είναι παρά η στροφορμή ανά μονάδα μάζας του πλανήτη $\vec{h}=\dfrac{\vec{r}\times m\vec{\upsilon}}{m}=\dfrac{\vec{L}}{m}$

Όμως το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στο διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$:

$\vec{r}\cdot\vec{h}=\vec{r}\cdot(\vec{r}\times\vec{\upsilon})=(\vec{r}\times\vec{r})\cdot\vec{\upsilon}=0\Rightarrow\vec{r}\perp\vec{h}$. Οπότε το διάνυσμα θέσης θα κείται πάντα στο επίπεδο που είναι κάθετο στο $\vec{h}$ και άρα η τροχιά θα είναι επίπεδη.

Πράγματι : $\dfrac{d\vec{h}}{dt}=\dfrac{d(\vec{r}\times\vec{\upsilon})}{dt}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{\upsilon}+\vec{r}\times\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{\upsilon}\times\vec{\upsilon}+\vec{r}\times\vec{a}=0$

Και οι δύο όροι είναι μηδέν. Ο πρώτος ταυτοτικά. Ο δεύτερος επίσης, επειδή η επιτάχυνση είναι κεντρική από τη (2): $\vec{r}\times\vec{a}=-\dfrac{k}{r^2}\vec{r}\times\hat{r}=0$

Οπότε επιλέγουμε την διεύθυνση του $\vec{h}=h\hat{z}$ να είναι ο άξονας $\hat{z}$ και έτσι η τροχιά βρίσκεται στο επίπεδο *x*-*y*. Επειδή η δύναμη είναι κεντρική θα χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες *r* και *θ*.
Οπότε θα έχουμε :

Παραμετρικές εξισώσεις κίνησης : $r=r(t),\quad \theta=\theta(t)$, με παράμετρο το χρόνο *t*

Εξίσωση τροχιάς : $r=r(\theta)$

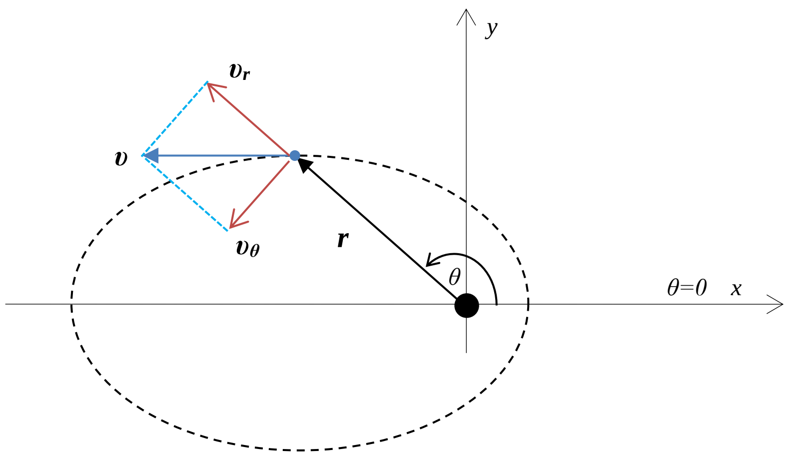
7) Δείξτε ότι $h=r^2\dot{\theta}$ (4)

Λύση

Η έκφραση της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες είναι $\vec{\upsilon}=\upsilon_r\hat{r}+\upsilon_\theta\hat{\theta}=\dfrac{dr}{dt}\hat{r}+r\dfrac{d\theta}{dt}\hat{\theta}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}$

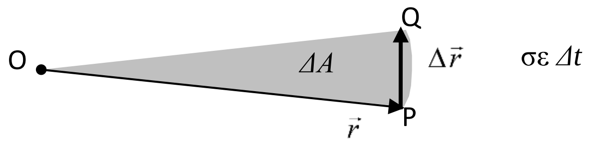
Οπότε : $\vec{h}=\vec{r}\times\vec{\upsilon}=r\hat{r}\times(\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta})=r\dot{r}\hat{r}\times\hat{r}+r^2\dot{\theta}\hat{r}\times\hat{\theta}=r^2\dot{\theta}\hat{z}$

Άρα $\dot{\theta}=\dfrac{h}{r^2}$



8) Δείξτε ότι $r^2\dot{\theta}=2\dot{A}$ (4΄) όπου $\dot{A}$ είναι η εμβαδική ταχύτητα δηλαδή το εμβαδόν της επιφάνειας που σαρώνει το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ στη μονάδα του χρόνου. Άρα η εμβαδική ταχύτητα είναι σταθερή. Δηλαδή η ακτίνα από το κέντρο της δύναμης Ο προς το σωματίδιο σαρώνει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους. Αυτός είναι ο 2^{ος} νόμος της κίνησης των πλανητών του Kepler που λέγεται και νόμος των εμβαδών.

Λύση



Έστω ότι σε χρονικό διάστημα Δt το σώμα μετακινείται από το σημείο P στο σημείο Q . Το εμβαδόν που έχει σαρώσει είναι περίπου το μισό του παραλληλογράμου με πλευρές $\vec r$ και $\Delta\vec r$ το οποίο δίνεται από το διανυσματικό γινόμενο : $\Delta A = \frac{1}{2}\left|\vec r \times \Delta\vec r\right|$. Διαιρώντας με Δt και παίρνοντας το όριο $\Delta t \to 0$ έχουμε :

$$\dot A = \frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\left|\vec r \times \frac{\Delta\vec r}{\Delta t}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec r \times \vec\upsilon\right| = \frac{1}{2}r^2\dot\theta$$

Άρα $\dot A = \frac{L}{2m}$

9) Γράψτε το νόμο κίνησης του Νεύτωνα, εξίσωση (2), σε πολικές συντεταγμένες και δείξτε ότι με την αλλαγή μεταβλητής $r = 1/u$, μπορεί τελικά να έρθει στη μορφή : $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{h^2}$

Λύση

Η επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες είναι : $\vec a = \left(\ddot r - \dot\theta^2 r\right)\hat r + \left(r\ddot\theta + 2\dot\theta\dot r\right)\hat\theta$

Άρα η εξίσωση (2) γίνεται : $\vec a = \frac{\vec F}{\mu} \Rightarrow \left(\ddot r - \dot\theta^2 r\right)\hat r + \left(r\ddot\theta + 2\dot\theta\dot r\right)\hat\theta = -\frac{k}{r^2}\hat r \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \ddot r - \dot\theta^2 r = -\frac{k}{r^2} & (5) \\ r\ddot\theta + 2\dot\theta\dot r = 0 & (6) \end{array}}$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (6) είναι ισοδύναμη με την (3) και δεν μας δίνει κάποια νέα πληροφορία:

$$r\ddot\theta + 2\dot\theta\dot r = \frac{1}{r}\left(r^2\ddot\theta + 2r\dot r\dot\theta\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot\theta\right) = \frac{1}{r}\frac{dh}{dt} = 0$$

Λύνουμε την (5) κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $r = 1/u$ και χρησιμοποιούμε την (4) για να αντικαθιστούμε πάντα τη γωνιακή ταχύτητα με μια συνάρτηση του r:

$$h = r^2\dot\theta \Rightarrow \dot\theta = \frac{h}{r^2} = hu^2 \Rightarrow \dot\theta^2 = \frac{h^2}{r^4} = h^2u^4$$

Αρχικά η (5) γίνεται : $\ddot r - \frac{h^2}{r^4}r = -\frac{k}{r^2} \Rightarrow \ddot r - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{k}{r^2}$ (7)

Υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο

$$r = \frac{1}{u} \Rightarrow dr = -\frac{du}{u^2}$$

$$\dot r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = hu^2\left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\right) = -h\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot r = \frac{d\dot r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = -h\frac{d^2u}{d\theta^2}hu^2 \Rightarrow \ddot r = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

Αντικαθιστούμε στην (7)

$$-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - h^2u^3 = -ku^2 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{h^2}} \quad (8)$$

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0}$$

10) Λύστε την εξίσωση (8) και βρείτε τη μορφή των τροχιών των πλανητών

Λύση

Την εξίσωση (8): $\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{k}{h^2}$ μπορούμε να την λύσουμε εύκολα. Είναι η γνωστή εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή αλλά μη ομογενής (επειδή το δεύτερο μέλος δεν είναι μηδέν αλλά ίσο με τη σταθερά k/h^2). Επίσης η ανεξάρτητη μεταβλητή δεν είναι εδώ ο χρόνος αλλά η γωνία *θ*.

Η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι κατά τα γνωστά η : $u_{ομογ}=A\cos(\theta+\theta_0)$

Τη μερική λύση τη βρίσκουμε εύκολα βλέποντας ότι είναι απλά η σταθερά του δεύτερου μέλους αφού τότε η *u* είναι σταθερή και η δεύτερη παράγωγος γίνεται μηδέν : $u_{μερ}=k/h^2$

Οπότε η γενική λύση είναι : $u=u_{ομογ}+u_{μερ}\Rightarrow u=A\cos(\theta+\theta_0)+\frac{k}{h^2}$

Όπου η σταθερά *A* καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες

Και άρα η εξίσωση της τροχιάς είναι : $r=\frac{1}{k/h^2+A\cos(\theta+\theta_0)}$

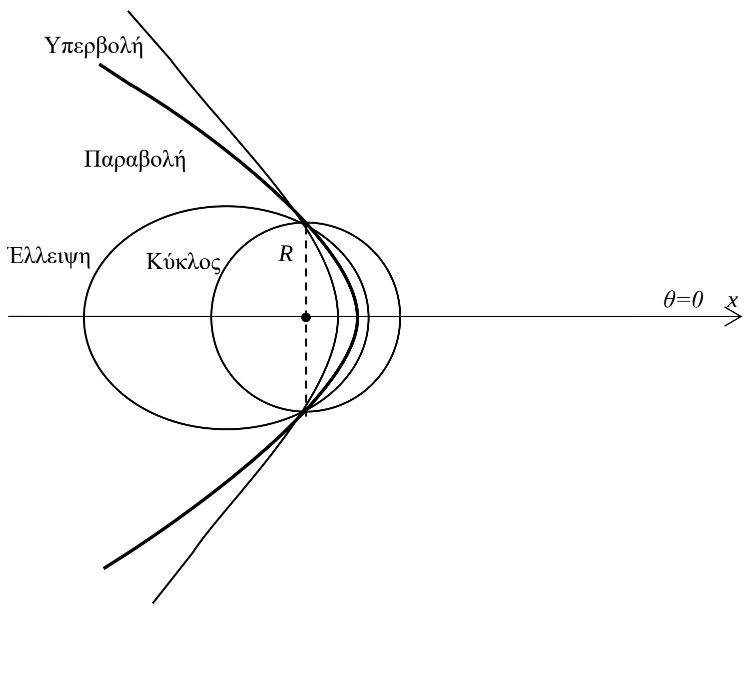
Μπορούμε πάντα να επιλέξουμε τους άξονες έτσι ώστε θ_0=0. Αυτό σημαίνει ότι θεωρούμε *θ*=0 όταν το *r* γίνεται ελάχιστο (περιήλιο). Οπότε τελικά

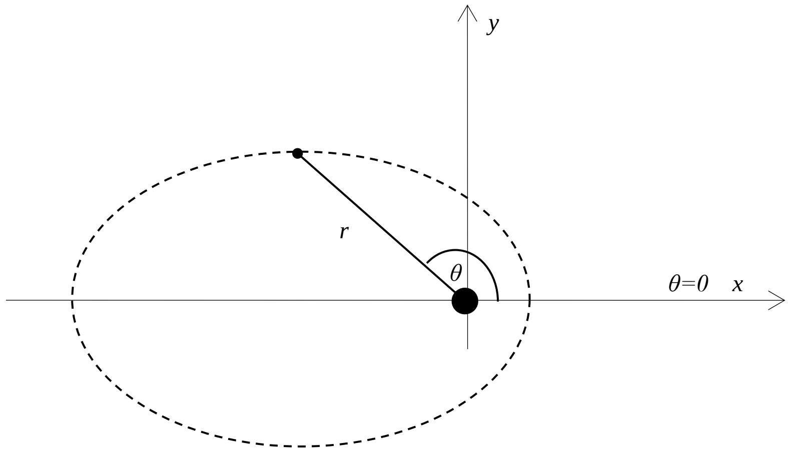
$$r=\frac{1}{k/h^2+A\cos\theta}\Rightarrow r=\frac{\left(h^2/k\right)}{1+\left(Ah^2/k\right)\cos\theta}\Rightarrow \qquad \boxed{r=\frac{R}{1+e\cos\theta}}$$

με $R=h^2/k$ και $e=Ah^2/k$

Αυτή είναι η εξίσωση των κωνικών τομών :

e=0 κύκλος
0<*e*<1 έλλειψη
e=1 παραβολή
1<*e* υπερβολή




y
r
θ
θ=0
x