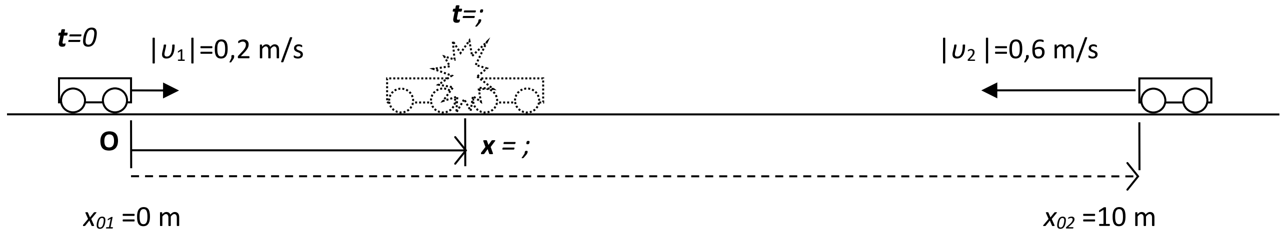
1) Απλή συνάντηση με σταθερές ταχύτητες

Τη χρονική στιγμή t=0, ένα κινητό ξεκινάει με ταχύτητα υ_1=0,2 m/s προς τα δεξιά <u>ταυτόχρονα</u> με ένα άλλο που ξεκινάει προς τα αριστερά με ταχύτητα υ_2= – 0,6 m/s. Τα δύο κινητά κινούνται με σταθερή ταχύτητα και τη στιγμή που ξεκινάνε απέχουν 10 m. Πότε και που θα συγκρουστούν ;



1ος τρόπος: Εξισώσεις κίνησης

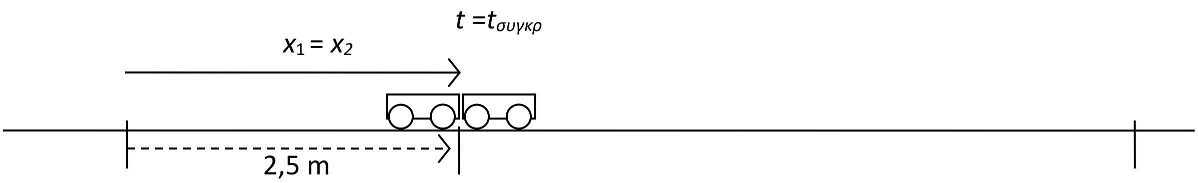
Αρχή των αξόνων **O** η θέση του 1. Αρχική θέση του 2: x_{02}=10 m. Ταχύτητα του 2: αρνητική.

Κάθε τυχαία χρονική στιγμή το πρώτο κινητό έχει θέση: $x_1 = \upsilon_1 \cdot t = 0{,}2 \cdot t$

και το δεύτερο : $x_2 = x_{02} + \upsilon_2 \cdot t = 10\text{-}0{,}6 \cdot t$

Τη στιγμή της σύγκρουσης όταν το ρολόι γράφει $t = t_{συγκρ}$, βρίσκονται στην ίδια θέση.

Δηλαδή σύγκρουση σημαίνει $x_1 = x_2$



Οπότε : $x_1 = x_2 \;\Rightarrow\; 0{,}2 \cdot t_{συγκρ} = 10\text{-}0{,}6 \cdot t_{συγκρ} \;\Rightarrow\; 0{,}8 \cdot t_{συγκρ} = 10 \;\Rightarrow\; t_{συγκρ} = 12{,}5$ s

Αφού βρήκαμε το χρόνο, τον αντικαθιστούμε στις εξισώσεις κίνησης και βρίσκουμε τα x_1 και x_2, δηλαδή, το που έγινε η σύγκρουση: $x_1 = \upsilon_1 \cdot t_{συγκρ} = 0{,}2 \cdot 12{,}5 = 2{,}5$ m

Επαλήθευση : πράγματι $x_2 = x_{02} + \upsilon_2 \cdot t_{συγκρ} = 10\text{-}0{,}6 \cdot 12{,}5 = 10\text{-}7{,}5 = 2{,}5 \text{ m} = x_1$

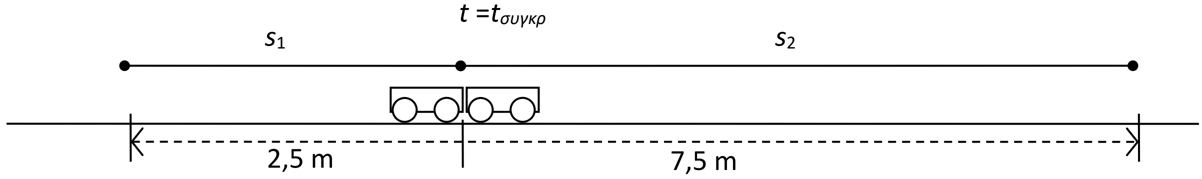
2ος τρόπος: Διαστήματα

Κάθε τυχαία χρονική στιγμή το πρώτο αυτοκίνητο έχει διανύσει διάστημα : $s_1 = |\upsilon_1| \cdot t = 0{,}2 \cdot t$

και το δεύτερο : $s_2 = |\upsilon_2| \cdot t = 0{,}6 \cdot t$

Τη στιγμή της σύγκρουσης τα δύο διαστήματα αθροίζουν 10 m.

Δηλαδή σύγκρουση σημαίνει $s_1 + s_2 = 10$



Από αυτό βρίσκουμε το χρόνο σύγκρουσης $t_{συγκρ}$:

$$s_1 + s_2 = 10 \Rightarrow 0{,}2t_{συγκρ} + 0{,}6t_{συγκρ} = 10 \Rightarrow 0{,}8t_{συγκρ} = 10 \Rightarrow t_{συγκρ} = \frac{10}{0{,}8} = \frac{100}{8} = 12{,}5 \text{ s}$$

Αφού βρήκαμε το χρόνο, τον αντικαθιστούμε στις εξισώσεις για τα s_1 και s_2 και βρίσκουμε :

$s_1 = |\upsilon_1| \cdot t_{συγκρ} = 0{,}2 \cdot 12{,}5 = 2{,}5$ m και $s_2 = |\upsilon_2| \cdot t_{συγκρ} = 0{,}6 \cdot 12{,}5 = 7{,}5$ m

Επαλήθευση : πράγματι 2,5+7,5=10

3ος τρόπος: Χρονική στιγμή σύγκρουσης από σχετική ταχύτητα

Η σχετική τους απόσταση $x_{1/2} = x_1 - x_2$ που αρχικά ήταν $-d = -10$ m μειώνεται από αριστερά με ρυθμό υ_1=0,2 m/s και από δεξιά με ρυθμό $|\upsilon_2|$ =0,6 m/s, δηλαδή συνολικά με ρυθμό που δίνεται από το άθροισμα των μέτρων των ταχυτήτων. Αυτή είναι και η σχετική τους ταχύτητα, δηλαδή η ταχύτητα με την οποία το ένα (το 2) βλέπει το άλλο (το 1) να το πλησιάζει: $\upsilon_{1/2} = \upsilon_1 - \upsilon_2 = 0,2 - (-0,6) = 0,8 \text{ m/s}$

Οπότε η σχετική απόσταση μεταξύ τους δίνεται από την εξίσωση : $x_{1/2} = -d + \upsilon_{1/2} \cdot t$ και θα γίνει μηδέν μετά από χρόνο :

$$t_\sigma = \frac{d}{\upsilon_1 - \upsilon_2} = \frac{10}{0,8} \text{ s} = 12,5 \text{ s}$$

Έτσι : $s_1 = \upsilon_1 \cdot t_\sigma = 0,2 \cdot 12,5 = 2,5$ m και $s_2 = 10 - s_1 = 7,5$ m

4ος τρόπος : Θέση σύγκρουσης από διαστήματα

Αφού τα κινητά ξεκινούν ταυτόχρονα, μέχρι να συγκρουστούν θα κινηθούν για το ίδιο χρονικό διάστημα.
Συγκρούονται όταν καλύψουν την μεταξύ τους απόσταση : $s_1 + s_2 = 10$ (1)

Σε αυτό το χρονικό διάστημα το δεύτερο κινητό που έχει τριπλάσια ταχύτητα από το πρώτο θα διανύσει και τριπλάσιο διάστημα : $s_2 = 3s_1$ (2)
Οπότε αντικαθιστούμε το s_2 από την εξίσωση (2) στην εξίσωση (1) και λύνουμε για το s_1 :

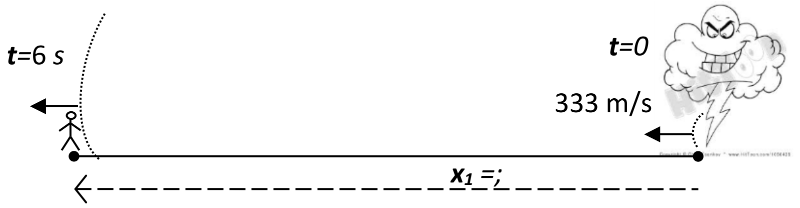
$$s_1 + s_2 = 10 \;\Rightarrow\; s_1 + 3s_1 = 10 \;\Rightarrow\; 4s_1 = 10 \;\Rightarrow\; s_1 = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ m}$$

Τη χρονική στιγμή της σύγκρουσης τη βρίσκουμε από :

$$s_1 = |\upsilon_1| t \;\Rightarrow\; t = \frac{s_1}{\upsilon_1} = \frac{2,5}{0,2} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ s}$$

2) Καταιγίδα

Πεζοπόρος βλέπει μακριά του να πέφτουν αστραπές και ακούει τις βροντές. Προσπαθεί να εκτιμήσει πόσο μακριά είναι η καταιγίδα, αν τον πλησιάζει και με τι ταχύτητα. Ξέρει ότι η ταχύτητα του ήχου είναι περίπου 1000/3 m/s, δηλαδή σε τρία δευτερόλεπτα ο ήχος διανύει ένα χιλιόμετρο.
Μόλις βλέπει την πρώτη αστραπή ξεκινάει το χρονόμετρό του και μετράει χρόνο 6 s έως να ακούσει τη βροντή. Πόσο μακριά βρίσκεται η καταιγίδα; (x_1=?)
Στη συνέχεια δεν βλέπει καμία αστραπή για Δt= 3 min. οπότε βλέπει τη δεύτερη αστραπή. Αυτή τη φορά περνούν 9 s μέχρι να ακούσει τη βροντή. Πόσο μακριά βρίσκεται τώρα η καταιγίδα; (x_2=?)
Η καταιγίδα απομακρύνεται από αυτόν ή τον πλησιάζει;
Με τι ταχύτητα κινείται η καταιγίδα;



Λύση

$$x_1 = \upsilon_{\eta\chi\cdot} \cdot t_1 = \frac{1000}{3} 6 = 2 \text{ km}$$

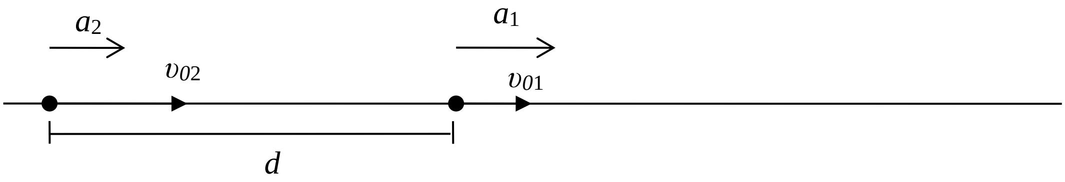
$$x_2 = \upsilon_{\eta\chi\cdot} \cdot t_2 = \frac{1000}{3} 9 = 3 \text{ km}$$

Η απόσταση είναι μεγαλύτερη από της πρώτης αστραπής άρα η καταιγίδα απομακρύνεται με ταχύτητα

$$\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1 \text{ km}}{3 \text{ min}} = 20 \text{ km/h}$$

3) Πλησιέστερη προσέγγιση

Το προπορευόμενο κινητό 1 επιταχύνεται με μεγαλύτερη επιτάχυνση ($a_1 > a2$) από το κινητό 2 που το ακολουθεί με μεγαλύτερη ταχύτητα $\upsilon_2 > \upsilon_1$.



1) Πόση είναι η μέγιστη επιτάχυνση του δεύτερου ώστε να συναντηθούν αλλά να μην συγκρουστούν ?
2) Πόση πρέπει να είναι η επιτάχυνση του δεύτερου ώστε η ελάχιστη απόσταση που θα προσεγγίσουν το ένα το άλλο να είναι s?
3) Με τι ταχύτητες θα συγκρουστούν αν η επιτάχυνση του δεύτερου έχει τιμή διπλάσια του ερωτήματος 1?
Αριθμητική εφαρμογή: $d = 100 \text{ m}$ $\upsilon_{01} = 10 \text{ m/s}$, $a_1 = 2 \text{ m/s}^2$, $\upsilon_{02} = 20 \text{ m/s}$, $s = 20 \text{ m}$

Λύση

Θέτουμε το σημείο αναφοράς εκεί που βρίσκεται το κινητό 2. Τότε : $x_{01} = d$ και $x_{02} = 0$

Οι κινήσεις περιγράφονται από τις εξισώσεις :

$$x_1 = d + \upsilon_{01}t + \frac{1}{2}a_1 t^2 = 100 + 10t + t^2 \qquad x_2 = \upsilon_{02}t + \frac{1}{2}a_2 t^2 = 20t + \frac{1}{2}a_2 t^2$$

$$\upsilon_1 = \upsilon_{01} + a_1 t = 10 + 2t \qquad \upsilon_2 = \upsilon_{02} + a_2 t = 20 + a_2 t$$

1) Συνάντηση σημαίνει: $x_1 = x_2$ (1)

Αποφυγή σύγκρουσης σημαίνει ότι τη στιγμή της επαφής τα κινητά έχουν ίσες ταχύτητες: $\upsilon_1 = \upsilon_2$ (2)

Άρα έχουμε δυο εξισώσεις για να βρούμε δύο αγνώστους : τη χρονική στιγμή συνάντησης t_σ και την απαιτούμενη επιτάχυνση a_2.

Όταν $t = t_\sigma$ ισχύουν : (1) $\upsilon_{01} + a_1 t_\sigma = \upsilon_{02} + a_2 t_\sigma \Rightarrow a_2 t_\sigma = \upsilon_{01} - \upsilon_{02} + a_1 t_\sigma$ και

(2) $d + \upsilon_{01}t_\sigma + \frac{1}{2}a_1 t_\sigma^2 = \upsilon_{02}t_\sigma + \frac{1}{2}a_2 t_\sigma^2 \Rightarrow d + \upsilon_{01}t_\sigma + \frac{1}{2}a_1 t_\sigma^2 = \upsilon_{02}t_\sigma + \frac{1}{2}(\upsilon_{01} - \upsilon_{02} + a_1 t_\sigma)t_\sigma \Rightarrow$

$$d + \upsilon_{01}t_\sigma + \frac{1}{2}a_1 t_\sigma^2 = \upsilon_{02}t_\sigma + \frac{1}{2}(\upsilon_{01} - \upsilon_{02})t_\sigma + \frac{1}{2}a_1 t_\sigma^2 \Rightarrow d = -(\upsilon_{01} - \upsilon_{02})t_\sigma + \frac{1}{2}(\upsilon_{01} - \upsilon_{02})t_\sigma \Rightarrow$$

$$\boxed{t_\sigma = \frac{2d}{(\upsilon_{02} - \upsilon_{01})}} \quad t_\sigma = \frac{2 \cdot 100}{(20 - 10)} = 20 \text{ s}$$

Παρατηρήστε τη διαφορά του παράγοντα 2 με την περίπτωση της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης που ο χρόνος συνάντησης ήταν η αρχική απόσταση δια την σχετική ταχύτητα. Στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ισχύει $x = x_0 + \upsilon t$ ενώ στην ομαλά μεταβαλλόμενη $x = x_0 + \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2}t$ και ο παράγοντας 2 μεταφέρεται και στην σχετική απομάκρυνση και στη σχετική ταχύτητα.

Η απαιτούμενη επιτάχυνση προκύπτει από την (1)

$$a_2 = \frac{\upsilon_{01} - \upsilon_{02}}{t_\sigma} + a_1 \Rightarrow \boxed{a_2 = a_1 - \frac{(\upsilon_{02} - \upsilon_{01})^2}{2d}} \quad a_2 = 2 - \frac{(20-10)^2}{2 \cdot 100} = 2 - \frac{100}{200} = 1{,}5 \text{ m/s}^2$$

Αριθμητικά από την αρχή

(2) : $10 + 2t_\sigma = 20 + a_2 t_\sigma \Rightarrow a_2 t_\sigma = 2t_\sigma - 10$

(2)→(1) : $100 + 10t_\sigma + t_\sigma^2 = 20t_\sigma + \frac{1}{2}a_2 t_\sigma^2 \Rightarrow 100 + t_\sigma^2 = 10t_\sigma + (t_\sigma - 5)t_\sigma \Rightarrow 100 = 5t_\sigma \Rightarrow t_\sigma = 20 \text{ s}$

$a_2 \cdot 20 = 2 \cdot 20 - 10 \Rightarrow a_2 = 30/20 = 1{,}5 \text{ m/s}^2$

2) Μέγιστη προσέγγιση s σημαίνει ότι η ταχύτητες των κινητών γίνονται ίσες όταν : $x_1 - x_2 = s$ **.**

Ξαναδουλεύοντας την άλγεβρα βρίσκουμε : $\boxed{t_\sigma = \frac{2(d-s)}{(\upsilon_{02}-\upsilon_{01})}}$, που δίνει το προηγούμενο αποτέλεσμα για s=0 και αντίστοιχα $\boxed{a_2 = a_1 - \frac{(\upsilon_{02}-\upsilon_{01})^2}{2(d-s)}}$

$$t_\sigma = \frac{2(100-20)}{(20-10)} = \frac{2\cdot 80}{10} = 16\text{ s} \qquad \boxed{a_2 = 2 - \frac{(20-10)^2}{2(100-2)} = 2 - \frac{100}{2\cdot 80} = 2 - 0,625 = 1,375\ \text{m/s}^2}$$

3) a_2=3 m/s^2

$$x_1 = x_2 \Rightarrow d + \upsilon_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2 = \upsilon_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2 \Rightarrow 100 + 10t + t^2 = 20t + \frac{1}{2}3t^2 \Rightarrow \frac{1}{2}t^2 + 10t - 100 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 10^2 - 4\cdot\frac{1}{2}(-100) = 300$$

$$t_\sigma = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-10 \pm \sqrt{300}}{2\cdot 1/2} \Rightarrow t_\sigma = 10\sqrt{3} - 10 = 7,32\text{ s}$$

Η αρνητική λύση απορρίφθηκε

Οι ταχύτητες των κινητών όταν συγκρούονται είναι ίσες με :

$$\upsilon_{1\sigma} = \upsilon_{01} + a_1t_\sigma = 10 + 2\cdot 7,32 = 24,64\ \text{m/s} \quad \text{και} \quad \upsilon_{2\sigma} = \upsilon_{02} + a_2t_\sigma = 20 + 3\cdot 7,32 = 41,96\ \text{m/s}$$

4) Βάθος φρεατίου

Ζητούμενο: το βάθος *h* ενός βαθιού φρεατίου το οποίο προσδιορίζουμε από το χρονικό διάστημα που κάνει ο ήχος μιας πέτρας να φτάσει στα αυτιά μας από τη στιγμή που την αφήσαμε.
Δεδομένα : 1) ταχύτητα ήχου *c* , 2) συνολικός χρόνος *t* από την απελευθέρωση της πέτρας έως την επιστροφή ήχου από το χτύπημα της στον πυθμένα

Λύση

t_1 = χρονικό διάστημα ελεύθερης πτώσης πέτρας
t_2 = χρονικό διάστημα επιστροφής του ήχου από το χτύπημα της πέτρας στον πυθμένα

$$t = t_1 + t_2\ , \qquad h = \frac{1}{2}gt_1^2\ , \qquad h = ct_2$$

$$t_2 = t - t_1$$

$$\frac{1}{2}gt_1^2 = c(t - t_1) \Rightarrow \frac{g}{2}\left(t_1^2 + \frac{2c}{g}t_1 - \frac{2c}{g}t\right) = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \frac{4c^2}{g^2} - 4\left(\frac{2c}{g}t\right) \Rightarrow \Delta = \frac{4c^2}{g^2}\left(1 + \frac{2g}{c}t\right)$$

$$t_1 = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\frac{2c}{g} \pm \frac{2c}{g}\sqrt{1 + 2\frac{g}{c}t}}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{c}{g}\left(\sqrt{1 + 2\frac{g}{c}t} - 1\right)$$

Η αρνητική λύση απορρίφτηκε

Προσέγγιση ρίζας:

$$t_1 = \frac{c}{g}\left(\sqrt{1 + 2\frac{g}{c}t} - 1\right) = \frac{c}{g}\left[1 + \frac{1}{2}\left(2\frac{g}{c}t\right) - \frac{1}{8}\left(2\frac{g}{c}t\right)^2 + O(t^3) - 1\right] \Rightarrow t_1 = t - \frac{c}{g}\frac{1}{8}4\frac{g^2}{c^2}t^2 + O(t^3) \Rightarrow$$

$$t_1 = t - \frac{g}{2c}t^2 + O(t^3)$$

Πρέπει να πάρουμε και τον δεύτερο όρο της ανάπτυξης της ρίζας γιατί κρατώντας μόνο τον πρώτο (γραμμικοποίηση) παίρνουμε $t_1 = t + O(t^2)$ την απλή προσέγγιση της ελεύθερης πτώσης όπου η ταχύτητα του ήχου θεωρείται άπειρη.

Αριθμητική εφαρμογή

Ταχύτητα ήχου : $c = 343\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ στους 20 ºC με 0 % υγρασία, g = 9,80 m/s^2, t= 5 s

Πρώτη προσέγγιση : ταχύτητα ήχου άπειρη άρα t = ο χρόνος ελεύθερης πτώσης της πέτρας

$$t_1 = t = 5\ \mathrm{s}$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \simeq \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 5^2 = 125\ \mathrm{m}$$

$$h = \frac{1}{2}9,8\cdot 5^2 \simeq \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 5^2 = 122,5\ \mathrm{m}$$

Δεύτερη προσέγγιση

$$t_1 = t - \frac{g}{2c}t^2 = 5 - \frac{9,8}{2\cdot 343}\cdot 25 = 5 - 0,357 = 4,643\ \mathrm{s}$$

$$h = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}9,8\cdot 4,643^2 = 105,6\ \mathrm{m}$$

Πλήρης τύπος

$$t_1 = \frac{c}{g}\left(\sqrt{1 + 2\frac{g}{c}t} - 1\right) = \frac{343}{9,8}\left(\sqrt{1 + 2\frac{9,8}{343}5} - 1\right) = 4,686\ \mathrm{s}$$

$$h = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}9,8\cdot 4,686^2 = 107,6\ \mathrm{m}$$

5) **Χρονομετρητής ακίδας (Ticker-tape timer).** Οι θέσεις ενός κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, δίνονται ανά δευτερόλεπτο από τις μαύρες κουκίδες του σχήματος. Το κινητό είχε τη χρονική στιγμή t=0 θέση x_0 και ταχύτητα υ_0.

Α) Δείξτε ότι η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή n είναι ίση με : $\dfrac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2}$ που υπολογίζεται από την προηγούμενη και την επόμενη θέση

Β) Δείξτε ότι η επιτάχυνση του κινητού είναι ίση με την έκφραση $x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}$ που προκύπτει μεταξύ οποιονδήποτε τριών διαδοχικών σημείων

Γ) Δείξτε ότι αν υ_0=0, οι διαδοχικές μετατοπίσεις έχουν λόγους διαδοχικών περιττών αριθμών 1:3:5:7… κλπ.

Α), Β) απλή επαλήθευση με εφαρμογή του τύπου : $x_n = x_0 + \upsilon_0 n + \dfrac{1}{2}an^2$. Η στιγμιαία ταχύτητα είναι $\upsilon_n = \upsilon_0 + na$

Γ) $\Delta x_n = x_n - x_{n-1} = x_0 + \dfrac{1}{2}an^2 - x_0 - \dfrac{1}{2}a(n-1)^2 = \dfrac{1}{2}[2n-1]a = \dfrac{1}{2}[2(n-1)+1]a = [2(n-1)+1]\Delta x_1$

$\Delta x_2 = 3\Delta x_1$, $\Delta x_3 = 5\Delta x_1$, $\Delta x_4 = 7\Delta x_1$, $\Delta x_5 = 9\Delta x_1$, κλπ. (Γαλιλαίος)

6) Πτώση με αντίσταση αέρα – οριακή ταχύτητα αλεξιπτωτιστή (sky diver).

Το βάρος, κατά την ελεύθερη πτώση ενός σώματος, το επιταχύνει και αυξάνει την ταχύτητά του. Όσο όμως αυξάνεται η ταχύτητά του αυξάνεται και η αντίσταση του αέρα ή οπισθέλκουσα, την οποία συνήθως αγνοούμε. Η δύναμη αυτή δεν είναι σταθερή και εξαρτάται από την ταχύτητα του σώματος. Όταν το σώμα αποκτήσει μεγάλη ταχύτητα η αντίσταση του αέρα δεν μπορεί πλέον να αγνοηθεί. Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνει η αντίσταση του αέρα θα γίνει κάποια στιγμή ίση με το βάρος. Οπότε από το σημείο εκείνο και μετά το σώμα θα ισορροπεί και θα κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_{o\rho}$ η οποία ονομάζεται οριακή ή τερματική ταχύτητα.Επειδή ο αέρας είναι σχετικά αραιός με πυκνότητα περίπου ίση με ρ= 1 kg/m^3 (π.χ. το νερό έχει ρ=1000 kg/m^3) θα αγνοήσουμε την δύναμη της άνωσης θεωρώντας σώματα με μικρό όγκο.

Να υπολογίσετε την οριακή ταχύτητα δύο ανθρώπων με μάζα m_1 =62,5 kg και m_2 =90 kg κατά την πτώση τους στον αέρα. Θεωρείστε τη διαφορά στο μέγεθος και στο σχήμα τους αμελητέα. Η αντίσταση του αέρα είναι πάντα αντίθετη της ταχύτητας και το μέτρο της δίνεται από τον τύπο:

$$F_d = D\upsilon^2$$

Για έναν άνθρωπο που πέφτει σε οριζόντια στάση κατά μέτωπο στον αέρα με τα χέρια και τα πόδια ανοιχτά (spread eagle) η σταθερά D είναι περίπου ίση με D=0,25 kg/m.

Λύση :

Όταν το σώμα αποκτήσει οριακή ταχύτητα θα πάψει να επιταχύνεται και άρα η ολική δύναμη θα είναι ίση με μηδέν. Επιλέγουμε ως θετική τη φορά προς τα κάτω. Εφαρμόζουμε τον 1ο νόμο του Νεύτωνα:

$$\vec{F}_{o\lambda} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{F}_D + \vec{B} = 0 \Rightarrow -F_D + B = 0 \;\Rightarrow\; -D\upsilon_{o\rho}^2 + mg = 0 \;\Rightarrow\; \upsilon_{o\rho} = \sqrt{\frac{mg}{D}}$$

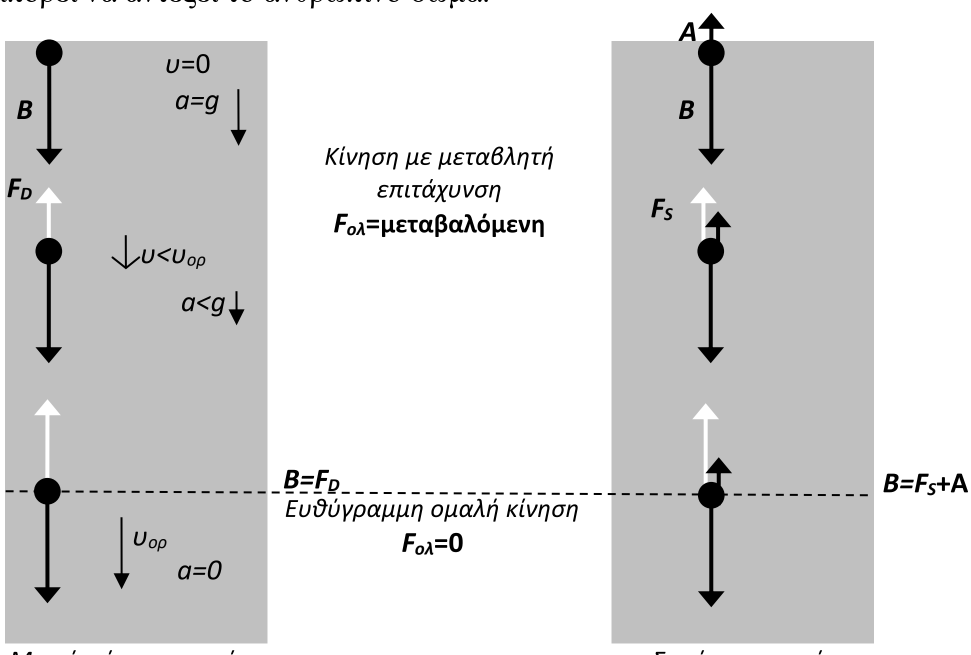
Παρατηρούμε ότι όταν η αντίσταση του αέρα δεν είναι αμελητέα, από δύο σώματα που έχουν το ίδιο D (σχήμα, μέγεθος) αυτό με την πιο μεγάλη μάζα θα πέσει πράγματι πιο γρήγορα (όπως έλεγε ο Αριστοτέλης).

Για τον πρώτο άνθρωπο (m_1 =62,5 kg) έχουμε :

$$\upsilon_{o\rho} = \sqrt{\frac{62{,}5 \cdot 10}{0{,}25}} = \sqrt{\frac{625}{1/4}} = \sqrt{625 \cdot 4} = \sqrt{2500} = 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 180\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

και για τον δεύτερο (m_2 =90 kg) : $\upsilon_{o\rho} = \sqrt{\frac{90\cdot 10}{0{,}25}} = \sqrt{3600} = 60\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 216\ \mathrm{km/h}$

Με αυτήν την ταχύτητα θα συγκρουστούν με το έδαφος αν δεν ανοίξει το αλεξίπτωτό τους. Το αλεξίπτωτο θα προκαλέσει μεγαλύτερη αντίσταση από τον αέρα και θα επιβραδύνει τα σώματα. Η οριακή τους ταχύτητα θα μειωθεί σε πολύ μικρότερη τιμή ώστε η σύγκρουση με το έδαφος να γίνει με μικρή ταχύτητα, τέτοια που να μπορεί να αντέξει το ανθρώπινο σώμα.



Μικρό σώμα στον αέρα
Σφαίρα σε υγρό

7) Σφαίρα που βυθίζεται σε υγρό – μέτρηση ιξώδους υγρού

Από την προηγούμενη άσκηση συμπεραίνουμε ότι αν μετρήσουμε την ορική ταχύτητα ενός σώματος μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για το συντελεστή D που καθορίζει την αντίσταση του ρευστού (οπισθέλκουσα). Αυτό ακριβώς κάνουμε για να μετρήσουμε το συντελεστή απόσβεσης b στα υγρά όπου οι ταχύτητες καταβύθισης είναι μικρές και μπορούμε εύκολα να τις μετρήσουμε στο εργαστήριο με απλό εξοπλισμό (χάρακα και χρονόμετρο). Η αντίσταση του υγρού (οπισθέλκουσα) δίνεται από τον τύπο :

$$\vec{F}_D = -b\vec{v}$$

Αν το σώμα που βυθίζεται είναι σφαίρα ακτίνας r τότε ο συντελεστής απόσβεσης είναι:

$$b = 6\pi\eta r \quad \text{Stokes}$$

όπου η είναι ο συντελεστής ιξώδους του υγρού.

Υπολογίστε το συντελεστή ιξώδους ενός υγρού αν μια σιδερένια σφαίρα ακτίνας r=0,001 m όταν αφεθεί ελεύθερη στην επιφάνειά του καταλήγει να βυθίζεται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_{o\rho}$= 0,18 m/s. Η πυκνότητα του υγρού είναι ρ= 920 kg/m^3 και η πυκνότητα του σιδήρου ρ_{Fe} = 7874 kg/m^3. Ο όγκος μιας σφαίρας δίνεται από τον τύπο $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Λύση :

Στο σώμα ασκούνται τρεις δυνάμεις : το βάρος B προς τα κάτω, η άνωση A προς τα πάνω και η αντίσταση του υγρού F_D επίσης προς τα πάνω (αφού η ταχύτητα είναι προς τα κάτω). Επιλέγουμε ως θετική τη φορά προς τα κάτω.

Όταν η σφαίρα κινείται με σταθερή ταχύτητα έχει πετύχει την ορική ταχύτητα μέσα στο υγρό. Η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν και στη συνέχεια θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση μέχρι να χτυπήσει στον πυθμένα.

Ολόκληρος ο όγκος της σφαίρας είναι βυθισμένος, οπότε η άνωση είναι :

$$\vec{A} = -A = -\rho g V_{\beta\upsilon\theta} = -\frac{4}{3}\rho g \pi r^3$$

Η μάζα του σώματος δεν μας δίνεται. Μπορούμε όμως να την υπολογίσουμε από την πυκνότητα και τον όγκο του : $m = \rho_{Fe} V = \frac{4}{3}\rho_{Fe}\pi r^3$. Οπότε το βάρος της σφαίρας είναι :

$$\vec{B} = B = mg = \frac{4}{3}\rho_{Fe} g \pi r^3$$

Η οπισθέλκουσα είναι: $\vec{F}_D = -b\vec{v} = -b\upsilon_{o\rho} = -6\pi\eta r \cdot \upsilon_{o\rho}$

Εφαρμόζουμε τον 1° νόμο του Νεύτωνα:

$$\vec{F}_{o\lambda} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{A} + \vec{F}_D + \vec{B} = 0 \Rightarrow -A - F_D + B = 0 \;\Rightarrow -A - 6\pi\eta r \cdot \upsilon_{o\rho} + B = 0 \Rightarrow$$

$$\eta = \frac{B - A}{6\pi r \upsilon_{o\rho}}$$

Αντικαθιστούμε τις αναλυτικές εκφράσεις για την άνωση και το βάρος και βγάζουμε κοινό παράγοντα τον όρο $\frac{4}{3} g\pi r^3$

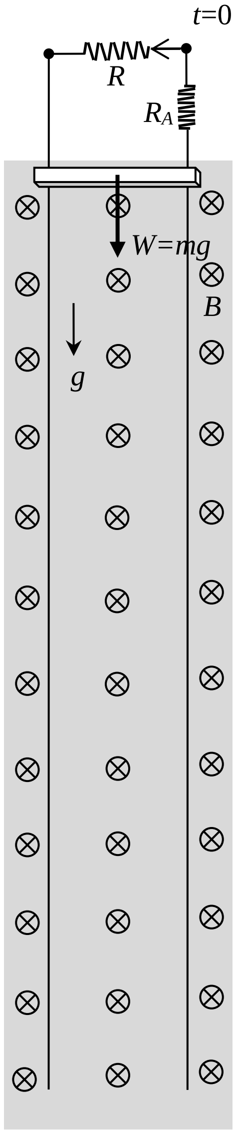
$$\eta = \frac{\frac{4}{3} g\pi r^3(\rho_{Fe} - \rho)}{6\pi r \upsilon_{o\rho}} \Rightarrow \eta = \frac{2}{9}\frac{g r^2}{\upsilon_{o\rho}}(\rho_{Fe} - \rho)$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές παίρνουμε :

$$\eta = \frac{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}001^2}{9 \cdot 0{,}18}(7874 - 920) \Rightarrow \eta = 0{,}084\ \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

Ιξώδες 0,084 και πυκνότητα 920 έχει στους 20 °C το ελαιόλαδο.

8) Βαρυτική γραμμική γεννήτρια



Η γραμμική ηλεκτρική μηχανή του σχήματος χρησιμοποιεί την δύναμη της βαρύτητας ως κινητήρια δύναμη για να παράγει ηλεκτρική ενέργεια. Η ράβδος πέφτει λόγω του βάρους της σε σταθερό βαρυτικό πεδίο g, κινούμενη πάνω σε μεταλλικές ράγες κάθετα σε σταθερό μαγνητικό πεδίο B. Το επαγωγικό ηλεκτρικό ρεύμα που θα δημιουργηθεί θα τροφοδοτήσει την εξωτερική αντίσταση R. Θεωρήστε επίσης γνωστά την μάζα m, την απόσταση ανάμεσα στις ράγες ℓ και την αντίσταση R_A της μηχανής (ράβδος και ράγες).

Α) Να γράψετε το νόμο του Νεύτωνα για τη ράβδο και να περιγράψετε την κίνηση της από την στιγμή t=0 που θα την αφήσουμε να πέσει ελεύθερα (αγνοήστε τριβές και αντίσταση του αέρα)
Β) Να βρείτε την τερματική (ορική) ταχύτητα υ_t της ράβδου, το τελικό ρεύμα στο κύκλωμα και την τελική τερματική τάση της γεννήτριας στα άκρα της R.

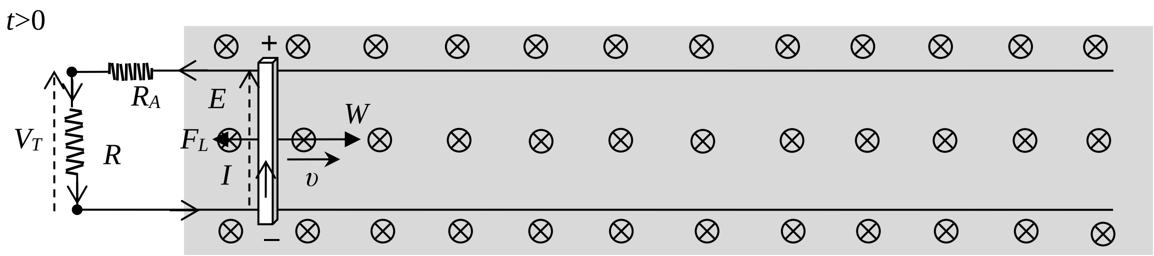
Γ) Να φέρετε το νόμο του Νεύτωνα στη μορφή $\frac{d\upsilon}{\upsilon_t-\upsilon}=\frac{dt}{\tau}$ και να υπολογίσετε τη σταθερά χρόνου τ.

Δ) Να ολοκληρώσετε την εξίσωση του Νεύτωνα και να βρείτε τη χρονική εξέλιξη όλων των χρονικά μεταβαλλόμενων μεγεθών (υ, a, x, I, E, V_T, F_L)
Ε) Στη μόνιμη κατάσταση να υπολογίσετε την παρεχόμενη μηχανική ισχύ από το βάρος P_{in}, την ισχύ που καταναλώνεται στις ωμικές αντιστάσεις της μηχανής $P_{απωλ}$ και την λαμβανόμενη ισχύ στην έξοδο της γεννήτριας στο ωμικό φορτίο R.

Λύση

Α) Το βάρος θα επιταχύνει τη ράβδο δίνοντάς της ταχύτητα.

$$\sum F=ma\Rightarrow a=\frac{W}{m}=g\neq 0\Rightarrow \upsilon\uparrow$$



Η κινούμενη αγώγιμη ράβδος θα εμφανίσει επαγωγική τάση στα άκρα της

$$E = B\upsilon\ell$$

και άρα θα αρχίσει να διαρρέεται από ρεύμα (και όλο το κύκλωμα)

$$I = \frac{E}{R + R_A}\ .$$

Η ρευματοφόρος πλέον ράβδος θα δεχτεί δύναμη Laplace από το μαγνητικό πεδίο, αντίθετη από το βάρος της W που θα ελαττώσει την αρχική της επιτάχυνση g.

$$F_L = BI\ell = B\ell\frac{E}{R+R_A} = \frac{B^2\ell^2}{R+R_A}\cdot\upsilon$$

Ο νόμος του Νεύτωνα είναι :

$$\sum F = ma \Rightarrow W - F_L = ma \Rightarrow mg - \frac{B^2\ell^2}{R+R_A}\cdot\upsilon = ma \Rightarrow a = g - \frac{B^2\ell^2}{m(R+R_A)}\cdot\upsilon$$

Η δύναμη Laplace παίζει το ρόλο δύναμης απόσβεσης : $\vec{F}_L = -b\vec{\upsilon}$ με $b = \dfrac{B^2\ell^2}{R+R_A}$

και το μέτρο της θα αυξάνεται όσο αυξάνεται η ταχύτητα. Όσο το βάρος παραμένει μεγαλύτερο από την επαγόμενη δύναμη Laplace η ράβδος θα επιταχύνεται με διαρκώς μειούμενη επιτάχυνση. Η ράβδος θα σταματήσει να επιταχύνεται και θα κινείται με οριακή ταχύτητα όταν η δύναμη Laplace αυξηθεί ως την τιμή του βάρους W.

Β) Η ορική ταχύτητα της ράβδου επέρχεται όταν οι δύο αντίρροπες δυνάμεις εξισωθούν

$$W = F_L \Rightarrow mg = \frac{B^2\ell^2}{R+R_A}\cdot\upsilon_\tau \Rightarrow \upsilon_t = \frac{mg(R+R_A)}{B^2\ell^2}$$

Το τελικό ρεύμα της ράβδου βρίσκεται της από

$$W = F_L \Rightarrow mg = BI_f\ell \Rightarrow I_f = \frac{mg}{B\ell}$$

Η τελική επαγωγική τάση στα άκρα της ράβδου είναι

$$E_f = B\ell\upsilon_t = \frac{mg(R+R_A)}{B\ell} \quad \text{ή} \quad E_f = I_f(R+R_\mathrm{A}) = \frac{mg(R+R_A)}{B\ell}$$

Ενώ η τάση στα άκρα της αντίστασης R (η τερματική τάση της γεννήτριας) είναι :

$$E_f = IR_A + V_T \Rightarrow V_T = E_f - IR_A \Rightarrow V_T = \frac{mg(R+R_A)}{B\ell} - \frac{mg}{B\ell}R_A \Rightarrow V_T = \frac{mg}{B\ell}R$$

Γ) $a = g - \dfrac{B^2\ell^2}{m(R+R_A)}\cdot\upsilon \Rightarrow \dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{B^2\ell^2}{m(R+R_A)}\left(\dfrac{mg(R+R_A)}{B^2\ell^2} - \upsilon\right) \Rightarrow \dfrac{d\upsilon}{\upsilon_t - \upsilon} = \dfrac{dt}{\tau}$

Η έκφραση $\tau = \dfrac{m}{b} = \dfrac{m(R+R_A)}{B^2\ell^2}$ έχει μονάδες χρόνου και ονομάζεται σταθερά χρόνου :

$$\left[\frac{m(R+R_A)}{B^2\ell^2}\right] = \frac{\mathrm{kg}\cdot\Omega}{\mathrm{T^2m^2}} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\Omega}{\dfrac{\mathrm{N^2}}{\mathrm{A^2m^2}}\cdot\mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\Omega\mathrm{A^2}}{\mathrm{N^2}} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{W}}{\mathrm{N^2}} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{kg}\cdot\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\cdot\mathrm{s}} = \mathrm{s}$$

Παρατηρούμε ότι $\upsilon_t = g\tau$

Δ) Ολοκληρώνουμε τον νόμο του Νεύτωνα : $\dfrac{d\upsilon}{\upsilon_t-\upsilon}=\dfrac{dt}{\tau}\Rightarrow\int_0^{\upsilon}\dfrac{d\upsilon}{\upsilon_t-\upsilon}=\dfrac{1}{\tau}\int_0^t dt$

Αλλάζουμε μεταβλητή στο πρώτο ολοκλήρωμα : $u=\upsilon_t-\upsilon\Rightarrow du=-d\upsilon$

$$-\int_{\upsilon_t}^{\upsilon_t-\upsilon}\frac{du}{u}=\frac{1}{\tau}\int_0^t dt\Rightarrow\ln u\Big|_{\upsilon_t}^{\upsilon_t-\upsilon}=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow\ln(\upsilon_t-\upsilon)-\ln\upsilon_t=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow\ln\left(\frac{\upsilon_t-\upsilon}{\upsilon_t}\right)=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow\frac{\upsilon_t-\upsilon}{\upsilon_t}=e^{-t/\tau}\Rightarrow$$

$$\upsilon(t)=\upsilon_t\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

$$a(t)=\frac{d\upsilon(t)}{dt}=\upsilon_t\frac{d}{dt}\left(1-e^{-t/\tau}\right)=\frac{\upsilon_t}{\tau}e^{-t/\tau}\Rightarrow a(t)=ge^{-t/\tau}$$

$$x(t)=\int_0^t\upsilon(t)dt=\upsilon_t\int_0^t\left(1-e^{-t/\tau}\right)dt=\upsilon_t t-\upsilon_t\int_0^t e^{-t/\tau}dt=$$

$$=\upsilon_t t+\upsilon_t\tau\int_0^{-t/\tau}e^u du=\upsilon_t t+\upsilon_t\left[e^u\right]_0^t=\upsilon_t t+\upsilon_t\tau(e^{-t/\tau}-1)\Rightarrow$$

$$x(t)=\upsilon_t(t-\tau)+\upsilon_t\tau e^{-t/\tau}$$

Όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $u=-t/\tau\Rightarrow dt=-\tau du$

$$E(t)=B\upsilon(t)\ell=B\ell\upsilon_t\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=E_f\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$I(t)=\frac{E(t)}{(R+R_A)}=\frac{E_f}{(R+R_A)}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\Rightarrow\quad I_A(t)=I_f\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$F_L(t)=BI(t)\ell\Rightarrow F_L(t)=W\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Δ)

Στη μόνιμη κατάσταση παρέχεται σταθερά μηχανική ισχύς από την κινητήρια δύναμη (βάρος) που είναι ίση με:

$$P_{in}=W\upsilon_t=\frac{W^2(R+R_A)}{B^2\ell^2}$$

Αυτή μετατρέπεται σε ηλεκτρική ισχύ

$$P_{\varepsilon\pi\alpha\gamma}=E_fI_f=B\upsilon_t\ell\frac{B\upsilon_t\ell}{(R+R_A)}=\frac{B^2\ell^2}{(R+R_A)}\upsilon_t^2=\frac{B^2\ell^2}{(R+R_A)}\frac{W^2(R+R_A)^2}{B^4\ell^4}=\frac{W^2(R+R_A)}{B^2\ell^2}$$

που καταναλώνεται τελικά στις ωμικές αντιστάσεις μετατρεπόμενη σε θερμότητα

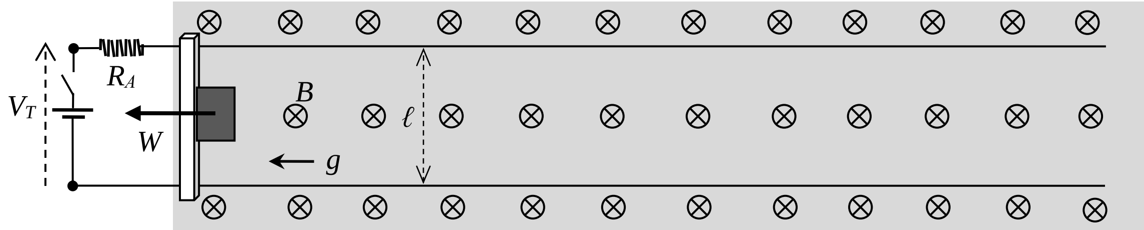
$$P_{\alpha\pi\omega\lambda}(t)=I_f^2R_A=\frac{B^2\upsilon_t^2\ell^2}{(R+R_A)^2}R_A=\frac{B^2\ell^2}{R_A}\upsilon_t^2=\frac{W^2R_A}{B^2\ell^2}$$

$$P_{out}(t)=I_f^2R=\frac{B^2\upsilon_t^2\ell^2}{R^2}R=\frac{B^2\ell^2}{R}\upsilon_t^2=\frac{W^2R}{B^2\ell^2}$$

Ισχύει $P_{in}=P_{\varepsilon\pi\alpha\gamma}=P_{\alpha\pi\omega\lambda}+P_{out}$.

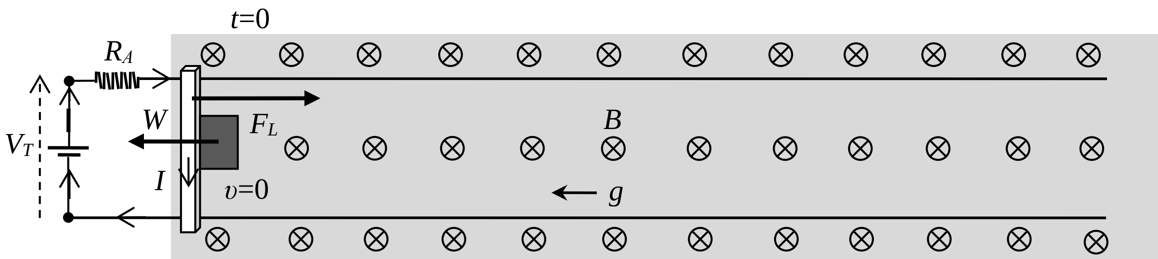
9) Γραμμικός ανελκυστήρας

Η αγώγιμη ράβδος ενεργού μήκους ℓ μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές στις λείες αγώγιμες κατακόρυφες ράγες. Η όλη διάταξη θεωρούμε ότι παρουσιάζει ωμική αντίσταση R_A και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B και ομογενές βαρυτικό πεδίο έντασης g. Στους ακροδέκτες της διάταξης εφαρμόζουμε ηλεκτρική τάση V_T , κλείνοντας τον διακόπτη, ώστε να σηκώσουμε το βάρος του φορτίου του σχήματος. Το φορτίο μαζί με τη ράβδο έχουν μάζα M. Το σχήμα έχει σχεδιαστεί οριζόντια για οικονομία χώρου. Η κατεύθυνση της βαρύτητας (το κάτω) είναι προς τα αριστερά.



Α) Να γράψετε το νόμο του Νεύτωνα για τη ράβδο και το φορτίο και να περιγράψετε την κίνηση τους από την στιγμή t=0 που θα κλείσουμε το διακόπτη (αγνοήστε τριβές και αντίσταση του αέρα)
Β) Να βρείτε την τελική ταχύτητα με την οποία θα ανυψώνεται το φορτίο και το τελικό ρεύμα που θα διαρρέει το κύκλωμα.
Γ) Δείξτε ότι αν η μηχανή λειτουργούσε χωρίς φορτίο και η μάζα της ράβδου ήταν αμελητέα το τελικό ρεύμα θα ήταν μηδέν
Δ) Να φέρετε το νόμο του Νεύτωνα στη μορφή $\frac{d\upsilon}{\upsilon_t-\upsilon}=\frac{dt}{\tau}$ και να υπολογίσετε τη σταθερά χρόνου τ.
Ε) Να ολοκληρώσετε την εξίσωση του Νεύτωνα και να βρείτε τη χρονική εξέλιξη όλων των χρονικά μεταβαλλόμενων μεγεθών (υ, a, x, I, E, F_L)
ΣΤ) Δείξτε το ισοζύγιο της ενέργειας στη μόνιμη κατάσταση: ότι αναπτυσσόμενη επαγωγική ισχύς είναι ιση με την μηχανική ισχύ της δύναμης Laplace που πρέπει να ισοσταθμίζει την ισχύ του βάρους του φορτίου και ότι ισχύει η διατήρηση της ενέργειας $P_{in}=P_{out}+P_{\alpha\pi\omega\lambda}$ όπου $P_{\alpha\pi\omega\lambda}$ οι ωμικές απώλειες σε θερμότητα

Λύση
Α) Όταν τη χρονική στιγμή t=0 κλείσουμε τον διακόπτη η ράβδος θα αρχίσει να διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα : $V_T=I_0R_A \Rightarrow I_0=\frac{V_T}{R_A}$, που ονομάζουμε ρεύμα εκκίνησης (start).

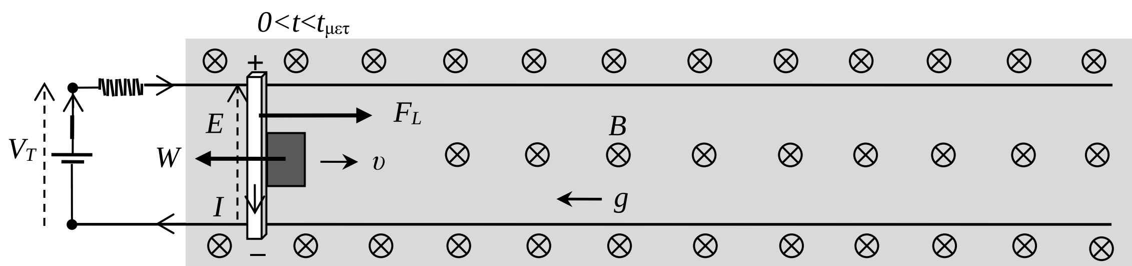


Σε αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα μέσα σε μαγνητικό πεδίο εμφανίζεται δύναμη Laplace από το μαγνητικό πεδίο
$F_L=BI\ell$
Αν η αρχική δύναμη Laplace είναι μεγαλύτερη από το βάρος του φορτίου θα το επιταχύνει προς τα πάνω (δεξιά):

$$\sum F=F_{L0}-W>0 \Rightarrow a_0>0$$

Αν δεν είναι, όλη η ισχύς της πηγής θα μετατρέπεται σε θερμότητα μέχρι να λιώσουν τα καλώδια και να καταστραφεί η μηχανή.
Η αρχική επιτάχυνση (t=0) είναι

$$\sum F=Ma_0 \Rightarrow F_{L0}-W=Ma_0 \Rightarrow BI_0\ell-Mg=Ma_0 \Rightarrow a_0=\frac{V_TB\ell}{MR_A}-g$$



Εφόσον η ράβδος αποκτά ταχύτητα έχουμε πλέον αγώγιμη ράβδο που κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο και συνεπώς εμφανίζεται στα άκρα της ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή (νόμος Faraday):

$E = B\upsilon\ell$

Την πολικότητα της επαγωγικής ΗΕΔ μπορούμε να τη βρούμε από τη δύναμη Lorenz που θα δεχτεί ένα ελεύθερο θετικό φορτίο της ράβδου που κινείται προς τα δεξιά μαζί με τη ράβδο $\vec{F} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B}$. Το θετικό φορτίο θα δεχτεί δύναμη προς το πάνω μέρος της σελίδας. Άρα το πάνω άκρο της ράβδου θα είναι ο θετικός πόλος και το κάτω ο αρνητικός. Επίσης μπορούμε να βρούμε την πολικότητα της επαγωγικής ΗΕΔ από το νόμο του Lenz: *Το επαγωγικό αποτέλεσμα έχει τέτοια φορά ώστε να αναιρεί την αιτία που το προκάλεσε*. Η αιτία που προκάλεσε την επαγωγική τάση είναι το ρεύμα I που δημιουργεί η πηγή V_T στο κύκλωμα με τις ράγες και τη ράβδο. Η ράβδος πρέπει να γίνει πηγή που θα δημιουργεί σε αυτό το κύκλωμα αντίθετο ρεύμα. Δηλαδή πηγή αντίθετης πολικότητας από την V_T.

Ως αποτέλεσμα της εμφάνισης της επαγωγικής τάσης, το ρεύμα της ράβδου θα μειωθεί (έχουμε δύο αντίθετες μπαταρίες στο κύκλωμα)

$$V_T = E + IR_A \Rightarrow I = \frac{V_T - E}{R_A} \Rightarrow I_A \downarrow$$

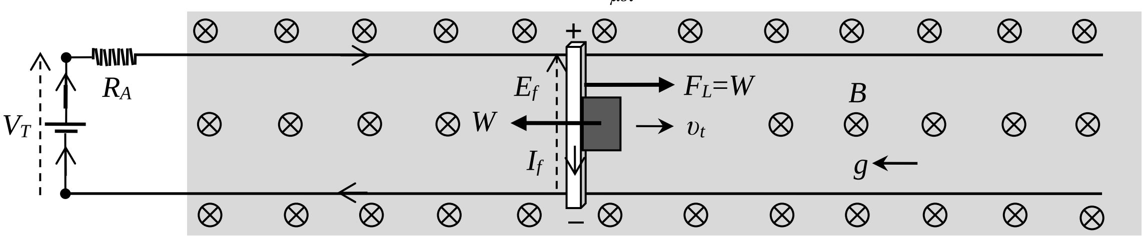
και άρα και η δύναμη Laplace θα μειωθεί

$$F_L = BI\ell \Rightarrow F_L \downarrow$$

Για κάποιο μεταβατικό χρονικό διάστημα $t_{\mu\varepsilon\tau}$, η δύναμη Laplace συνεχώς θα μειώνεται και η ράβδος θα κάνει επιταχυνόμενη κίνηση με μεταβλητή και διαρκώς μειούμενη επιτάχυνση

Β) Η δύναμη Laplace τελικά θα εξισωθεί με το βάρος του φορτίου και στο εξής η ράβδος θα πάψει να επιταχύνεται και θα κινείται με σταθερή ταχύτητα. Όταν συμβεί αυτό, δηλαδή η ράβδος ισορροπήσει a=0, λέμε ότι η μηχανή βρίσκεται στη μόνιμη ή σταθερή κατάσταση. Την σταθερή ταχύτητα που απέκτησε τελικά την λέμε οριική ή τερματική υ_t.

$t_{\mu\varepsilon\tau} << t$



Η επαγωγική ηλεκτρεγερτική δύναμη στη μόνιμη κατάσταση θα είναι

$$E_f = B\upsilon_t\ell$$

που θα οδηγεί σε τελικό ρεύμα

$$V_T = E + I_f R_A \Rightarrow I_f = \frac{V_T - E_f}{R_A} = \frac{V_T - B\upsilon_t\ell}{R_A}$$

και δύναμη Laplace

$$F_L = BI_f\ell = B\ell \cdot \frac{V_T - B\upsilon_t\ell}{R_A}$$

Την τερματική ταχύτητα τη βρίσκουμε από το μηδενισμό της συνισταμένης δύναμης :

$$F_L = W \Rightarrow B\ell \cdot \frac{V_T - B\upsilon_t\ell}{R_A} = Mg \Rightarrow V_T - B\ell\upsilon_t = \frac{MgR_A}{B\ell} \Rightarrow \upsilon_t = \frac{V_T}{B\ell} - \frac{MgR_A}{B^2\ell^2}$$

Μπορείτε να ελέγξετε ότι οι εκφράσεις έχουν μονάδες ταχύτητας

$$\left[\frac{V_T}{B\ell}\right] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{T}\cdot\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{V}}{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}}\cdot\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{V}\cdot\mathrm{A}}{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{N}} = \frac{\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\left[\frac{mgR_A}{B^2\ell^2}\right]=\frac{\mathrm{N}\cdot\Omega}{\mathrm{T}^2\mathrm{m}^2}=\frac{\mathrm{N}\cdot\Omega}{\dfrac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{A}^2\mathrm{m}^2}\cdot\mathrm{m}^2}=\frac{\Omega\mathrm{A}^2}{\mathrm{N}}=\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{N}}=\frac{\mathrm{J/s}}{\mathrm{N}}=\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}}=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Η τελική επαγωγική ΗΕΔ θα είναι

$$E_f=B\upsilon_t\ell=B\ell\left(\frac{V_T}{B\ell}-\frac{MgR_A}{B^2\ell^2}\right)\Rightarrow E_f=V_T-\frac{MgR_A}{B\ell}$$

Και το τελικό ρεύμα

$$I_f=\frac{V_T-E_f}{R_A}\Rightarrow I_f=\frac{Mg}{B\ell}$$

Γ) Αν η μηχανή λειτουργούσε χωρίς φορτίο $M=0$, η συνθήκη ισορροπίας θα ήταν

$$F_L=0\Rightarrow BI_f\ell=0\Rightarrow B\ell\cdot\frac{V_T-B\upsilon_t\ell}{R_A}=0\Rightarrow V_T-B\upsilon_t\ell=0\Rightarrow \upsilon_t=\frac{V_T}{B\ell}$$

και στη μόνιμη κατάσταση θα είχαμε : $E=V_T$ και $I_f=0$

Δηλαδή όταν η μηχανή λειτουργεί χωρίς φορτίο τότε η επαγωγική τάση είναι ίση με την τερματική τάση και η μηχανή δεν διαρρέεται από ρεύμα.

Δ) Μπορούμε να υπολογίσουμε τη χρονική εξάρτηση των μεταβλητών και τον χρόνο αποκατάστασης έως τη μόνιμη κατάσταση λύνοντας την εξίσωση του νόμου του Νεύτωνα. Η συνισταμένη δύναμη είναι:

$$\sum F=F_L-W=BI_A\ell-Mg=B\ell\cdot\frac{V_T-B\upsilon\ell}{R_A}-Mg=\frac{B\ell V_T}{R_A}-Mg-\frac{B^2\ell^2}{R_A}\cdot\upsilon\Rightarrow\sum F=F-b\cdot\upsilon$$

όπου $F=\dfrac{B\ell V_T}{R_A}-Mg$, $b=\dfrac{B^2\ell^2}{R_A}$ και $\upsilon_t=\dfrac{F}{b}=\dfrac{V_T}{B\ell}-\dfrac{MgR_A}{B^2\ell^2}$ από $\sum F=0$

Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την ελεύθερη πτώση λαμβάνοντας υπόψη και την αντίσταση του αέρα : σταθερή δύναμη επιτάχυνσης F (αντί του βάρους), δύναμη απόσβεσης ανάλογη με την ταχύτητα (αντί αντίστασης αέρα).

$$\sum F=Ma\Rightarrow F-b\cdot\upsilon=M\frac{d\upsilon}{dt}\Rightarrow\frac{b}{M}\left(\frac{F}{b}-\upsilon\right)=\frac{d\upsilon}{dt}\Rightarrow\frac{\upsilon_t-\upsilon}{\tau}=\frac{d\upsilon}{dt}\Rightarrow\boxed{\frac{d\upsilon}{\upsilon_t-\upsilon}=\frac{dt}{\tau}}$$

Η έκφραση $\tau=\dfrac{M}{b}=\dfrac{MR_A}{B^2\ell^2}$ έχει μονάδες χρόνου και είναι η γνωστή σταθερά χρόνου. Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\upsilon_t}{\tau}=\left(\frac{V_T}{B\ell}-\frac{MgR_A}{B^2\ell^2}\right)\cdot\frac{B^2\ell^2}{MR_A}=\frac{V_TB\ell}{MR_A}-g\Rightarrow\frac{\upsilon_t}{\tau}=a_0$$

Ε) Οι δύο πλευρές μπορούν να ολοκληρωθούν απευθείας και ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon_t-\upsilon}=\frac{dt}{\tau}\Rightarrow\int_0^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon_t-\upsilon}=\frac{1}{\tau}\int_0^t dt$$

Αλλάζουμε μεταβλητή στο πρώτο ολοκλήρωμα : $u=\upsilon_t-\upsilon\Rightarrow du=-d\upsilon$

$$-\int_{\upsilon_t}^{\upsilon_t-\upsilon}\frac{du}{u}=\frac{1}{\tau}\int_0^t dt\Rightarrow\ln u\Big|_{\upsilon_t}^{\upsilon_t-\upsilon}=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow\ln(\upsilon_t-\upsilon)-\ln\upsilon_t=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow\ln\left(\frac{\upsilon_t-\upsilon}{\upsilon_t}\right)=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow\frac{\upsilon_t-\upsilon}{\upsilon_t}=e^{-\frac{t}{\tau}}\Rightarrow$$

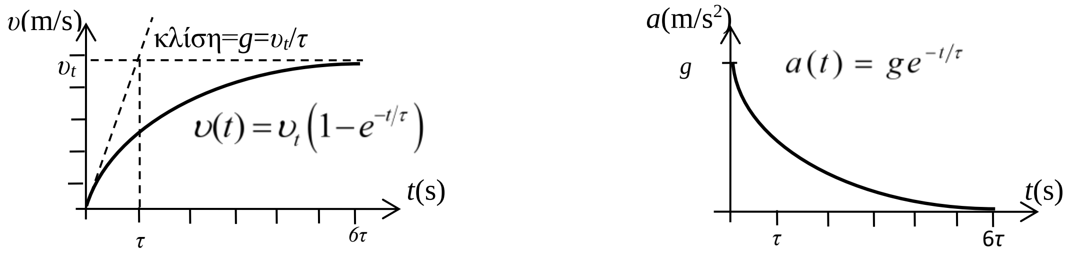
$$\upsilon(t)=\upsilon_t\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\Rightarrow\boxed{\upsilon(t)=\left(\frac{V_T}{B\ell}-\frac{MgR_A}{B^2\ell^2}\right)\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

Παραγωγίζοντας και ολοκληρώνοντας, όπως και πριν, βρίσκουμε

$$a(t)=\frac{d\upsilon(t)}{dt}=\upsilon_t\frac{d}{dt}\left(1-e^{-t/\tau}\right)=\frac{\upsilon_t}{\tau}e^{-t/\tau}\Rightarrow a(t)=a_0e^{-t/\tau}$$

$$x(t)=\int_0^t \upsilon(t)dt=\upsilon_t\int_0^t\left(1-e^{-t/\tau}\right)dt=\upsilon_t t-\upsilon_t\int_0^t e^{-t/\tau}dt=$$
$$=\upsilon_t t+\upsilon_t\tau\int_0^{-t/\tau}e^u du=\upsilon_t t+\upsilon_t\left[e^u\right]_0^t=\upsilon_t t+\upsilon_t\tau(e^{-t/\tau}-1)\Rightarrow$$
$$x(t)=\upsilon_t(t-\tau)+\upsilon_t\tau e^{-t/\tau}$$

Οι γραφικες παραστάσεις είναι :



$$E(t)=B\upsilon(t)\ell=B\ell\upsilon_t\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=E_f\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\Rightarrow\boxed{E(t)=\left(V_T-\frac{MgR_A}{B\ell}\right)\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$
$$I(t)=\frac{V_T-E(t)}{R_A}=\frac{V_T}{R_A}-\frac{E_f}{R_A}(1-e^{-t/\tau})=\frac{V_T}{R_A}-\left(\frac{V_T}{R_A}-\frac{Mg}{B\ell}\right)(1-e^{-t/\tau})$$
$$=I_0-(I_0-I_f)(1-e^{-t/\tau})=I_0e^{-t/\tau}+I_f(1-e^{-t/\tau})$$
$$\boxed{I_A(t)=\frac{V_T}{R_A}e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{Mg}{B\ell}(1-e^{-t/\tau})}$$
$$F_L(t)=BI(t)\ell=B\ell\left[\frac{V_T}{R_A}e^{-t/\tau}+\frac{Mg}{B\ell}(1-e^{-t/\tau})\right]\Rightarrow\boxed{F_L(t)=\frac{V_TB\ell}{R_A}e^{-t/\tau}+Mg(1-e^{-t/\tau})}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ως χρόνο μετάβασης στη μόνιμη κατάσταση τις 6 σταθερές χρόνου: $t_{\mu\varepsilon\tau}=6\tau$

Τότε $e^{-\frac{6\tau}{\tau}}=e^{-6}=0,00248$ και $1-e^{-\frac{6\tau}{\tau}}=1-e^{-6}=1-0,00248=0,99752$. Μετά τη διέλευση αυτού του χρονικού διαστήματος τα μεγέθη της ταχύτητας και της επαγωγικής τάσης έχουν φτάσει στο 99,752% της τελικής τους τιμής. Στο ρεύμα και στη δύναμη οι πρώτοι όροι έχουν πέσει στο 0,248 % της αρχικής τους τιμής και οι δεύτεροι όροι έχουν ανέβει στο 99,752% της τελικής τους τιμής. Ήδη από τις τρεις σταθερές χρόνου $e^{-\frac{3\tau}{\tau}}=e^{-3}=0,04979$ και $1-e^{-\frac{3\tau}{\tau}}=1-e^{-3}=1-0,04979=0,95021$ η ταχύτητα και η επαγωγική τάση έχουν ανέβει στο 95% της τελικής τους τιμής.

Για να βρούμε την απόσταση x που καλύπτει η ράβδος μέχρι να βρεθεί σε κατάσταση ισορροπίας, ολοκληρώνουμε την εξίσωση της ταχύτητας :

$$\frac{dx}{dt}=\upsilon(t)=\upsilon_t\left(1-e^{-t/\tau}\right)\Rightarrow\int_0^x dx=\upsilon_t\int_0^t(1-e^{-t/\tau})dt\Rightarrow$$
$$x(t)=\upsilon_t t-\upsilon_t\int_0^t e^{-t/\tau}dt=\upsilon_t t+\upsilon_t\tau\int_0^{-t/\tau}e^y dy\Rightarrow x(t)=\upsilon_t t+\upsilon_t\tau\, e^y\Big|_0^{-t/\tau}\Rightarrow\boxed{x(t)=\upsilon_t(t-\tau)+\upsilon_t\tau e^{-t/\tau}}$$

Υπολογίζοντας την απόσταση που καλύπτει η ράβδος $x(t)$ για t=6τ βρίσκουμε το διάστημα που θα πρέπει να διανύσει η ράβδος για να βρεθεί η μηχανή στη μόνιμη κατάσταση

$$\boxed{x(6\tau)=\upsilon_t(6\tau-\tau)+\upsilon_t\tau e^{-6\tau/\tau}=5\cdot\upsilon_t\tau+0,00248\cdot\upsilon_t\tau\simeq5\cdot\upsilon_t\tau}$$