3. SJ 4.89

Μέχρι ποια απόσταση από την πίσω ακτή είμαστε ασφαλείς από τα βλήματα.

Δεδομένα

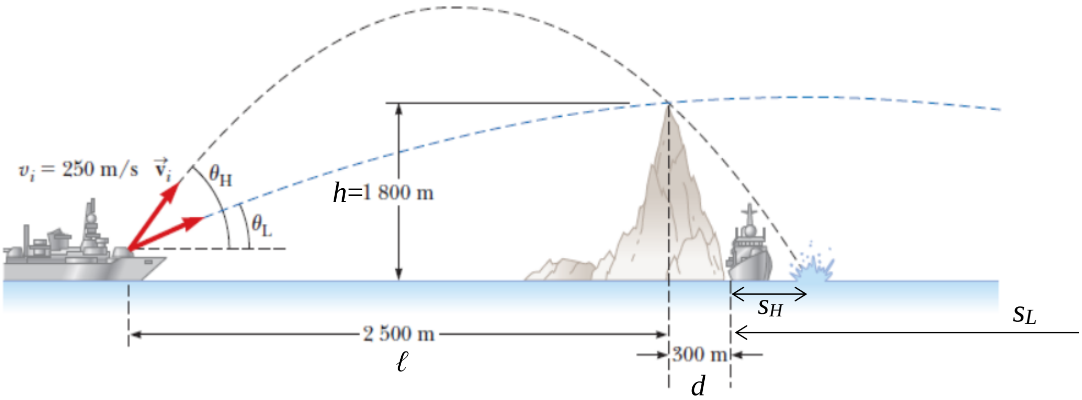
Ταχύτητα εκτόξευσης βλημάτων: $\upsilon_i = 250\ \mathrm{m/s}$

Απόσταση από κορυφή βουνού: $\ell = 2.500\,\mathrm{m}$

Ύψος βουνού : $h = 1.800\,\mathrm{m}$

Απόσταση ακτής από κορυφή βουνού $d = 300\,\mathrm{m}$

Ένταση πεδίου βαρύτητας: $g = 9{,}80\ \mathrm{N/kg}$



Λύση

Τα βλήματα των βολών σε γωνία μικρότερη από θ_L θα χτυπήσουν το βουνό ανεβαίνοντας και δεν θα περάσουν στο πίσω μέρος του νησιού.
Τα βλήματα των βολών σε γωνία μεγαλύτερη από θ_H θα χτυπήσουν το βουνό κατεβαίνοντας και επίσης δεν θα περάσουν στο πίσω μέρος του νησιού.
Κινδυνεύουμε μόνο από βολές σε ενδιάμεσες γωνίες $\theta_L < \theta < \theta_H$ επειδή αυτές περνάνε πάνω από την κορυφή του βουνού στο πίσω μέρος του νησιού. Στις γωνίες θ_L, θ_H το βλήμα περνάει ξυστά από την κορυφή του βουνού, άρα θεωρούμε ότι η κορυφή του βουνού είναι σημείο των αντίστοιχων τροχιών.
Οπότε από την εξίσωση της τροχιάς βρίσκουμε τις γωνίες θ_L, θ_H

Παρατήρηση : Τα περισσότερα δεδομένα δίνονται σε τέσσερα σημαντικά ψηφία αλλά η ένταση του πεδίου βαρύτητας g δίνεται σε τρία (3). Αυτό σημαίνει ότι και τα τελικά αποτελέσματα πρέπει να στρογγυλοποιηθούν στα τρία (3) σημαντικά ψηφία. Το αποτέλεσμα δεν μπορεί να έχει μεγαλύτερη ακρίβεια από τα δεδομένα από τα οποία καθορίζεται. Βέβαια σε ενδιάμεσους υπολογισμούς μπορούμε να κρατάμε όσα ψηφία θέλουμε.
Π.χ. όταν γράφουμε $\ell = 1.800$ m εννοούμε ότι γνωρίζουμε και τα τελευταία δύο μηδενικά του αριθμού (έχουμε ακρίβεια 1 m) άρα έχουμε 4 σημαντικά ψηφία ενώ όταν γράφουμε $\ell = 18\times10^2$ m έχουμε δύο σημαντικά ψηφία και εννοούμε ότι γνωρίζουμε την απόσταση με ακρίβεια εκατοντάδας μέτρων (100 m). Η απόσταση μπορεί να είναι οτιδήποτε μεταξύ 1750 m και 1849 m τα οποία στρογγυλοποιούνται στο 1800 σε δύο σημαντικά ψηφία.

Στην Κοζάνη σε τέσσερα σημαντικά ψηφία η ένταση του πεδίου βαρύτητας είναι 9,800 N/kg

Παρατήρηση : Ενώ όλα τα σύμβολα των φυσικών μεγεθών γράφονται με πλάγια γραφή (π.χ. *υ, y, x, t, d, ℓ, m, g, F* και όχι υ, y, x, t, d, ℓ, m, g, F) οι μονάδες του SI γράφονται αποκλειστικά και αυστηρά με όρθια γραφή του καθορισμένου συμβόλου. Το μέτρο είναι m και ποτέ *m*. Το

λίτρο είναι L και όχι *L* ή ακόμα χειρότερα *ℓt*. Το νιούτον είναι N και όχι *N* ή ακόμα χειρότερα *Nt*. Υπάρχει ολόκληρη σειρά σχετικών προτύπων (ISO/IEC 80000).
Δείτε την αμερικάνικη οδηγία (NIST) https://physics.nist.gov/cuu/pdf/sp811.pdf που είναι δωρεάν.

Την εξίσωση της τροχιάς δεν χρειάζεται να τη θυμόμαστε (πέραν του ότι θα είναι παραβολή). Την βρίσκουμε από τις εξισώσεις του *x* και του *y* (τις οποίες πρέπει να τις θυμόμαστε) απαλείφοντας τον χρόνο *t*.

$$x = \upsilon_i \cos\theta \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{\upsilon_i \cos\theta}$$

$$y = \upsilon_i \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad y = \upsilon_i \sin\theta \cdot \left(\frac{x}{\upsilon_i \cos\theta} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{\upsilon_i \cos\theta} \right)^2$$

Άρα η εξίσωση της τροχιάς είναι

$$y = -\left(\frac{g}{2\upsilon_i^2} \right) \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot x^2 + \tan\theta \cdot x \quad (1)$$

και ξέρουμε ότι περνάει από το σημείο $(x,\ y) = (\ell,\ h) = (2.500,\ 1.800)\ \mathrm{m}$.
Άρα το ζεύγος $(\ell,\ h)$ ικανοποιεί την (1) :

$$h = -\left(\frac{g}{2\upsilon_i^2} \right) \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \ell^2 + \tan\theta \cdot \ell \quad (2)$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$ η (2) γίνεται μια δευτεροβάθμια ως προς την γωνία *θ*.

$$h = -\left(\frac{g}{2\upsilon_i^2} \right) (1 + \tan^2\theta) \cdot \ell^2 + \tan\theta \cdot \ell \Rightarrow$$

$$\left(\frac{g\ell^2}{2\upsilon_i^2} \right) \tan^2\theta + (-\ell) \tan\theta + \left(\frac{g\ell^2}{2\upsilon_i^2} + h \right) = 0$$

με $\alpha = \frac{g\ell^2}{2\upsilon_i^2} = \frac{(9{,}80)(2.500)^2}{2(250)^2} = \frac{(9{,}80)(10)^2}{2} = 490\,\mathrm{m}$

$$\beta = -\ell = -2.500\ \mathrm{m}$$

$$\gamma = \frac{g\ell^2}{2\upsilon_i^2} + h = 490 + 1.800 = 2.290\ \mathrm{m}$$

$$\boxed{490 \tan^2\theta - 2.500 \tan\theta + 3.290 = 0}$$

Την λύνουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2.500)^2 - 4(490)(2.290) = 6.250.000 - 4.488.400 = 1.761.600\ \mathrm{m}^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 1.327{,}253... \simeq 1.327\ \mathrm{m}$$

$$\tan\theta_H = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2.500 + 1.327}{2(490)} = 3{,}905102... = 3{,}905 \quad \Rightarrow \theta_H = \tan^{-1}(3{,}905) = 75{,}6^{\mathrm{o}}$$

$$\tan\theta_L = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2.500 - 1.327}{2(490)} = 1{,}1969387... = 1{,}197 \quad \Rightarrow \theta_L = \tan^{-1}(1{,}197) = 50{,}1^{\mathrm{o}}$$

Παρατήρηση : Στρογγυλοποιούμε, δεν αποκόπτουμε το αποτέλεσμα της αριθμομηχανής
Π.χ. $1{,}1969... = 1{,}197$ $\quad\quad$ $1{,}1969... \neq 1{,}196$

Τα βεληνεκή των βολών είναι:

$$R_H = \frac{\upsilon_i^2 \sin(2\theta_1)}{g} = \frac{(250)^2 \sin(2\times 75{,}6^{\circ})}{9{,}80} = 3.072{,}40863... = 3{,}07\times 10^3\ \mathrm{m}$$ από το πλοίο

$s_H = R_H - \ell - d = 3{,}07\times 10^3 - 2.500 - 300 = 270\ \mathrm{m}$ από την πίσω ακτή

$$R_L = \frac{\upsilon_i^2 \sin(2\theta_2)}{g} = \frac{(250)^2 \sin(2\times 50{,}1^{\circ})}{9{,}80} = 6.276{,}7577... = 6{,}28\times 10^3\ \mathrm{m}$$ από το πλοίο

$s_L = R_L - \ell - d = 6{,}28\times 10^3 - 2.500 - 300 = 3{,}48\times 10^3\ \mathrm{m}$ από την πίσω ακτή

Άρα για να είμαστε ασφαλείς πρέπει να είμαστε σε απόσταση *s* από την ακτή :

$$\boxed{s < 270\,\mathrm{m} \quad ή \quad s > 3{,}48\times 10^3\,\mathrm{m}}$$

Σκέψη φοιτητή : Να βρούμε τις τροχιές που έχουν μέγιστο ύψος μεγαλύτερο από το ύψος του βουνού.
Δεν οδηγεί σε σωστό αποτέλεσμα. Υπάρχουν βολές σε μεγάλη γωνία $\theta > \theta_H$ που φτάνουν σε πολύ μεγάλο ύψος $H > h$ αλλά δεν πέφτουν πίσω από το βουνό αλλά μπροστά του. Από αυτές δεν κινδυνεύουμε.
Η λύση της άσκησης δεν έχει να κάνει με το μέγιστο ύψος της βολής και το ύψος του βουνού αλλά έχει να κάνει με το ότι η κορυφή του βουνού αποτελεί σημείο της τροχιάς.