Φαινόμενα Μεταφοράς Μάζας – θερμότητας

12η Διάλεξη

Πολυδιάστατη αγωγή θερμότητας

Εμμανουήλ Σουλιώτης

Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Ακαδημαϊκό Έτος 2018-2019

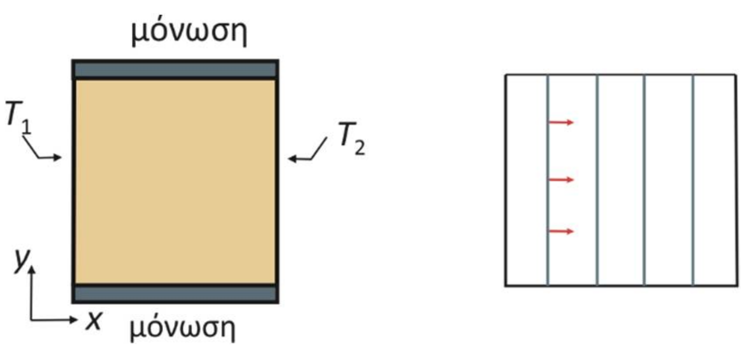
Μαθησιακοί στόχοι

- Εξοικείωση με εξίσωση διατήρησης ενέργειας σε δυο και τρεις διαστάσεις (§6.1)
- Ολοκλήρωση διαφορικής εξίσωσης σε δύο διαστάσεις (§6.2.1)
- Εύρεση αναλυτικής λύσης σε επίπεδη πλάκα (§6.2.2)
- Υπολογισμός ρυθμού μεταφοράς θερμότητας σε συνηθισμένα σχήματα με τη βοήθεια του συντελεστή μορφής (§6.3)

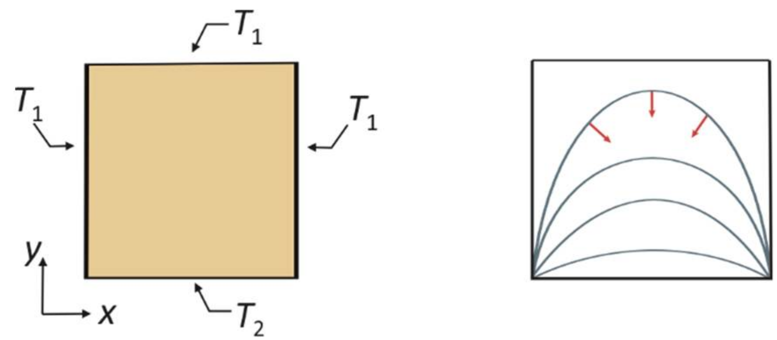
Περιπτώσεις πολυδιάστατης αγωγής

- Μη ομοιόμορφες οριακές συνθήκες

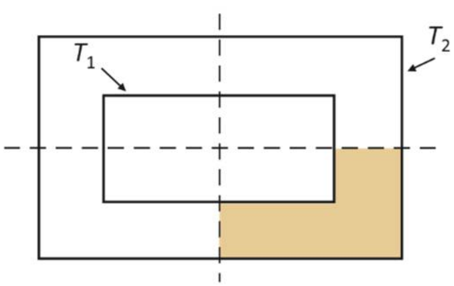
Μονοδιάστατη αγωγή

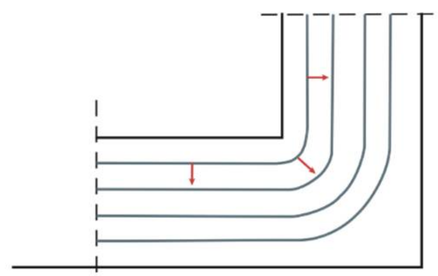


Δισδιάστατη αγωγή



- Μη κανονικές γεωμετρίες





Εξίσωση διατήρησης της ενέργειας

- Γενική μορφή εξίσωσης αγωγής

$$\nabla \cdot k \nabla T + \dot{q}''' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

- Ειδική μορφή για μόνιμη κατάσταση, χωρίς παραγωγή θερμότητας, σταθερό *k*

$$\nabla^2 T = 0$$

- Μορφή για δισδιάστατη αγωγή σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad T = T(x, y)$$

- Ροή θερμότητας (Νόμος Fourier)

$$\dot{\mathbf{q}}'' = \dot{q}''_x \mathbf{e}_x + \dot{q}''_y \mathbf{e}_y = -k \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{e}_x - k \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{e}_y$$

Αναλυτική λύση – Μέθοδος χωρισμού μεταβλητών

- Μορφή αναλυτικής λύσης – Γινόμενο μονοδιάστατων συναρτήσεων

$$T = X(x) \cdot Y(y)$$

- Μορφή μονοδιάστατων συναρτήσεων

$$X = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x)$$

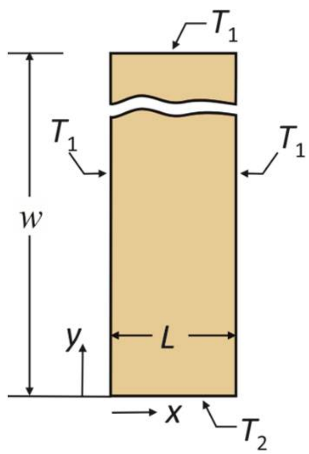
$$Y = c_3 e^{\lambda y} + c_4 e^{-\lambda y}$$

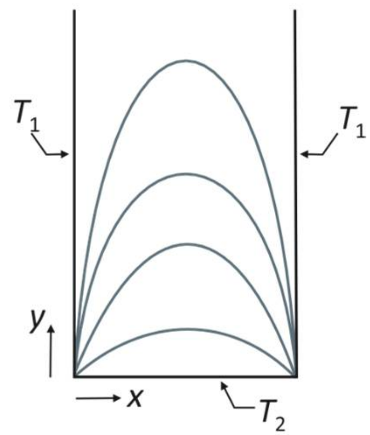
όπου

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \lambda^2$$

και οι σταθερές c_1, c_2, c_3 και c_4 προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες

Δισδιάστατη αγωγή σε επίπεδη πλάκα





- Οριακές συνθήκες (για $L << w$)
  - (α) για $x = 0$ και όλα τα y, $T = T_1$
  - (β) για $x = L$ και όλα τα y, $T = T_1$
  - (γ) για $y = 0$ και όλα τα x, $T = T_2$
  - (δ) για $y \rightarrow \infty$ και όλα τα x, $T = T_1$

- Αναλυτική λύση

$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-(2i+1)\pi y / L}}{2i+1} \sin \frac{(2i+1)\pi}{L} x$$

Συντελεστής μορφής

- Ρυθμός μεταφοράς θερμότητας μεταξύ δύο επιφανειών οι οποίες διατηρούνται σε σταθερές θερμοκρασίες T_1 και T_2

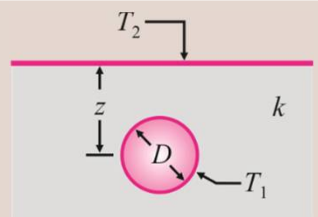
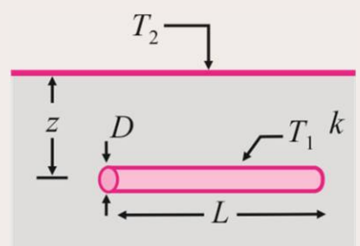
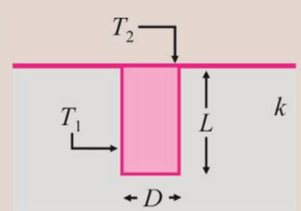
$$\dot{q} = kS\left(T_1 - T_2\right)$$

- k → συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του υλικού μέσω του οποίου γίνεται η αγωγή
- S → **συντελεστής μορφής** (σε m)

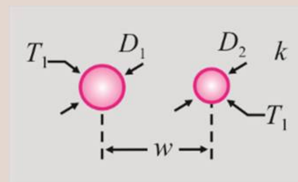
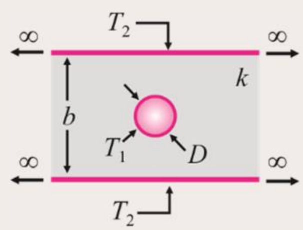
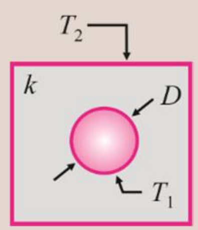
* *Για μονοδιάστατη αγωγή σε επίπεδο τοίχωμα* $S = \dfrac{A}{L}$

** *Σχέση μεταξύ συντελεστή μορφής και θερμικής αντίστασης* $R_\vartheta = \dfrac{1}{kS}$

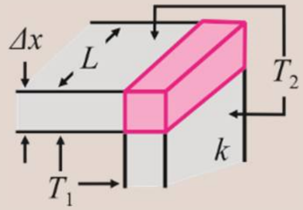
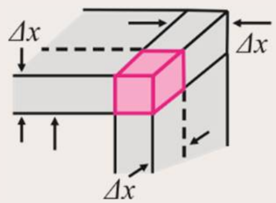
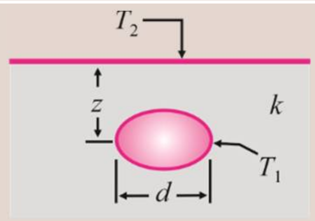
Συντελεστής μορφής συνηθισμένων συστημάτων 1/3

Σύστημα	Σχήμα	Συντελεστής μορφής
Εντοιχισμένη σφαίρα σε ημιάπειρο χώρο ($z > d/2$)		$\dfrac{2\pi D}{1 - D/4z}$
Εντοιχισμένος οριζόντιος (παράλληλος με την επιφάνεια) κύλινδρος		$\dfrac{2\pi L}{\ln\dfrac{2L}{D}\left(1+\dfrac{\ln(2z/L)}{\ln(2L/D)}\right)}$
Εντοιχισμένος οριζόντιος κύλινδρος σε ημιάπειρο χώρο ($L >> D$)		$\dfrac{2\pi L}{\cosh^{-1}(2z/D)}$
Κατακόρυφος κύλινδρος σε ημιάπειρο χώρο ($L >> D$)		$\dfrac{2\pi L}{\ln(4L/D)}$

Συντελεστής μορφής συνηθισμένων συστημάτων 2/3

Σύστημα	Σχήμα	Συντελεστής μορφής
Δύο παράλληλοι εντοιχισμένοι κύλινδροι σε άπειρο χώρο ($L >> D_1$, D_2, w)		$\dfrac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{4w^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1D_2}\right)}$
Κύλινδρος στο κέντρο πλάκας πάχους b (L το μήκος)		$\dfrac{2\pi L}{\ln(4b/\pi D)}$
Κύλινδρος σε ράβδο ορθογωνικής διατομής πλευρά b		$\dfrac{2\pi L}{\ln(1.08b/D)}$

Συντελεστής μορφής συνηθισμένων συστημάτων 3/3

Σύστημα	**Σχήμα**	**Συντελεστής μορφής**
Γωνία κάθετων τοιχωμάτων πάχους *Δx* (ακμή) $L > 5\Delta x$		0.54*L*
Ένωση τριών κάθετων τοιχωμάτων πάχους *Δx* (κορυφή)		0.15*Δx*
Εντοιχισμένος λεπτός δίσκος Για $z >> d$		2*d*

Παράδειγμα 1

Απώλειες θερμότητας από αγωγό νερού

Θερμό νερό μέσης θερμοκρασίας T_w = 80°C και μέσης ταχύτητας ροής u = 0.6 m/s ρέει σε τμήμα αγωγού μήκους 25 m και εξωτερικής διαμέτρου D = 0.05 m.

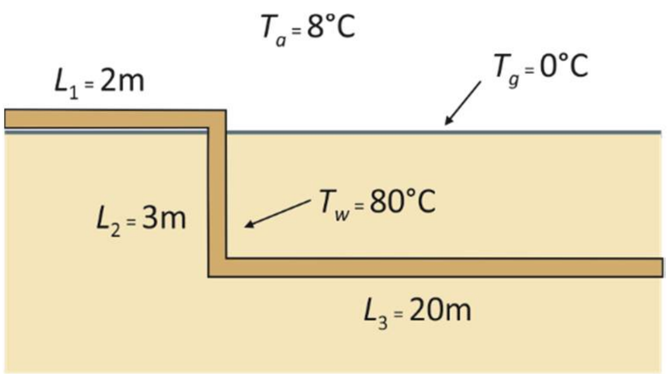
Ο σωλήνας:

- Εκτείνεται πάνω από το έδαφος σε απόσταση L_1 = 2 m εκτειθέμενος στον αέρα της ατμόσφαιρας θερμοκρασίας T_a = 8°C και συντελεστή μεταφοράς με συναγωγή h = 22 W/m^2·K.
- Εισέρχεται κατακόρυφα μέσα στο έδαφος (k = 1.5 W/m·K) για L_2 = 3 m.
- Συνεχίζει οριζόντια στο ίδιο βάθος για L_3 = 20 m, μέχρι να εισέλθει στο επόμενο κτίριο.

Εάν η επιφάνεια του εδάφους είναι καλυμμένη με χιόνι, σε θερμοκρασία T_g = 0°C, να προσδιοριστούν:

(α) Ο συνολικός ρυθμός απωλειών θερμότητας από το θερμό νερό.

(β) Η πτώση θερμοκρασίας του θερμού νερού κατά μήκος του αγωγού.



Ιδιότητες νερού: ρ = 1000 kg/m^3, c_p = 4180 J/kg·K

Παράδειγμα 1 – Λύση 1/4

Ρυθμός απωλειών θερμότητας

Οι συνολικές απώλειες θερμότητας είναι το άθροισμα των απωλειών θερμότητας από τα τρία τμήματα του αγωγού.

$$\dot{q}_{tot} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3$$

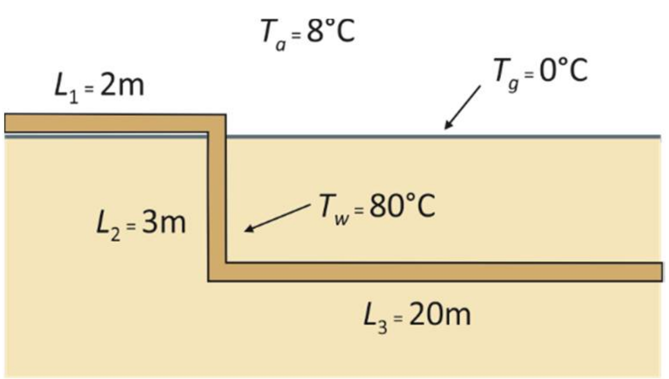
(i) Απώλειες θερμότητας από το πρώτο τμήμα

Στο πρώτο τμήμα, θερμότητα μεταφέρεται από τον αγωγό θερμοκρασίας T_w στον αέρα του περιβάλλοντος θερμοκρασίας T_a με συναγωγή. Επομένως:

$$\dot{q}_1 = hA_1\left(T_w - T_a\right)$$

όπου $A_1 = \pi D L_1 = \pi \times 0.05 \times 2 = 0.314\,\text{m}^2$

Άρα $\dot{q}_1 = 22 \times 0.314 \times (80 - 8) = 497.6\,\text{W}$

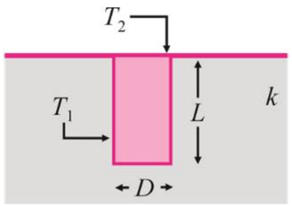


Παράδειγμα **1** – Λύση **2/4**

(ii) Απώλειες θερμότητας από το δεύτερο τμήμα

Στο δεύτερο τμήμα, θερμότητα μεταφέρεται με αγωγή μέσου του εδάφους από τον αγωγό θερμοκρασίας T_w στην επιφάνεια του εδάφους θερμοκρασίας T_g. Επομένως:

$$\dot{q}_2 = k S_2 \left(T_w - T_g\right)$$

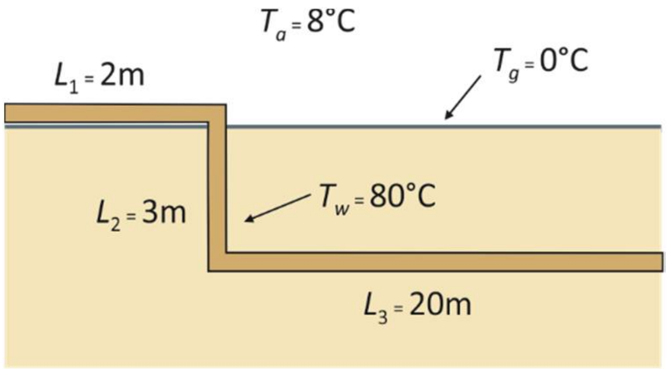


$$\frac{2\pi L}{\ln\left(4L/D\right)}$$

όπου $S_2 = \dfrac{2\pi L_2}{\ln\left(4L_2/D\right)} = \dfrac{2\times\pi\times 3}{\ln\left(4\times 3/0.05\right)} = 3.439\text{m}$

$$L \equiv L_2, D \equiv D, T_1 \equiv T_w, T_2 \equiv T_g$$

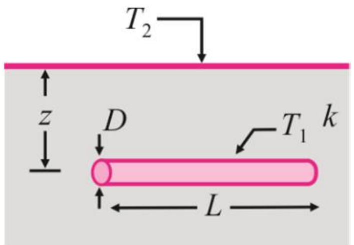
Άρα $\dot{q}_2 = 1.5\times 3.439\times\left(80-0\right) = 412.7\text{W}$



Παράδειγμα **1** – Λύση **3/4**

(iii) Απώλειες θερμότητας από το τρίτο τμήμα

Στο τρίτο τμήμα, θερμότητα μεταφέρεται και πάλι με αγωγή μέσου του εδάφους από τον αγωγό θερμοκρασίας T_w στην επιφάνεια του εδάφους θερμοκρασίας T_g. Επομένως:



$$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}(2z/D)}$$

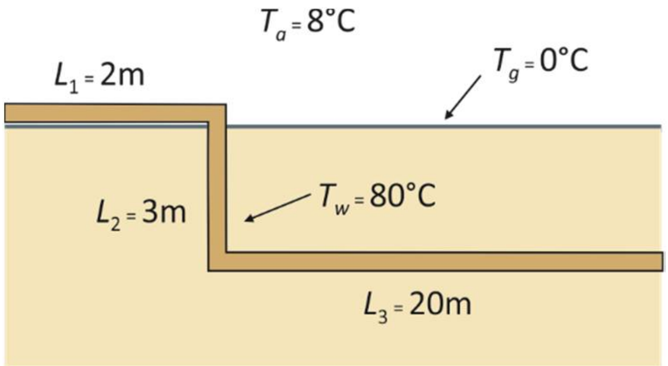
$$\dot{q}_3 = k\,S_3\left(T_w - T_g\right)$$

όπου

$$S_3 = \frac{2\pi L_3}{\cosh^{-1}(2L_2/D)} = \frac{2\times\pi\times 20}{\cosh^{-1}(2\times 3/0.05)} = 22.929\text{m}$$

$$L \equiv L_3\,,\, z \equiv L_2\,,\, D \equiv D\,,\, T_1 \equiv T_w\,,\, T_2 \equiv T_g$$

Άρα $\quad \dot{q}_3 = 1.5\times 22.929\times(80-0) = 2751.4\,\text{W}$



Συνολικές απώλειες από τον αγωγό

$$\dot{q}_{tot} = 497.6 + 412.7 + 2751.4 = 3661.7\,\text{W}$$

Παράδειγμα **1** – Λύση **4/4**

Πτώση θερμοκρασίας νερού

Οι συνολικές απώλειες θερμότητας συνδέονται με την πτώση θερμοκρασίας του νερού με τη σχέση:

$$\dot{q}_{tot} = \dot{m} c_p \Delta T$$

Όπου ο μαζικός ρυθμός ροής του νερού (παροχή) είναι:

$$\dot{m} = \rho u A_c = \rho u \pi D^2 / 4 = 1000 \times 0.6 \times 0.05^2 / 4 = 1.178 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Επομένως

$$\Delta T = \frac{\dot{q}_{tot}}{\dot{m} c_p} = \frac{3661.7}{1.178 \times 4180} = 0.74^\circ \text{C}$$