Φαινόμενα Μεταφοράς Μάζας – θερμότητας

10^{η} Διάλεξη

Εκτεινόμενες επιφάνειες Πτερύγια ψύξης

Εμμανουήλ Σουλιώτης

Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Ακαδημαϊκό Έτος 2018-2019

Μαθησιακοί στόχοι

- Εξοικείωση με την έννοια των εκτεινόμενων επιφανειών – πτερυγίων ψύξης, των μορφών πτερυγίων και των μηχανισμών μεταφοράς θερμότητας (§5.1)
- Κατάστρωση ισοζυγίου ενέργειας σε πτερύγιο ψύξης (§5.2)
- Εύρεση κατανομής θερμοκρασίας σε πτερύγια σταθερής εγκάρσιας διατομής και για διάφορες οριακές συνθήκες (§5.3)

Χρησιμότητα πτερυγίων ψύξης

- Ρυθμός μεταφοράς θερμότητας με συναγωγή (ρυθμός ψύξης) από μια θερμή επιφάνεια (T_s) σε ρευστό (T_∞):

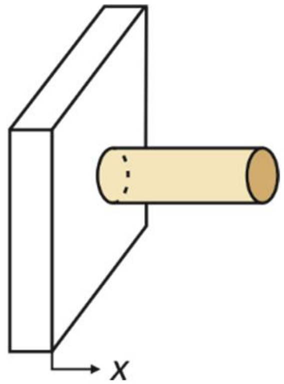
$$\dot{q} = h\,A\left(T_s - T_\infty\right)$$ *νόμος ψύξης του* ***Newton***

- Τρόποι αύξησης του ρυθμού ψύξης:
  1. Αύξηση ($T_s - T_\infty$) → Τοποθέτηση σε ψυχρότερο χώρο (όχι πάντα εφικτό)
  2. Αύξηση h → Εγκατάσταση αντλίας ή ανεμιστήρα (δύσκολη και οικονομικά ακριβή λύση)
  3. Αύξηση A → Προσαρμογή ενός πτερυγίου ψύξης στην επιφάνεια

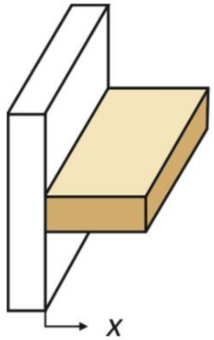
- **Πτερύγια ψύξης** είναι διατάξεις που χρησιμοποιούνται για την αύξηση του ρυθμού μεταφοράς θερμότητας από μια επιφάνεια, αυξάνοντας το εμβαδό της επιφάνειας.

Μορφές απλών πτερυγίων

Σταθερής διατομής

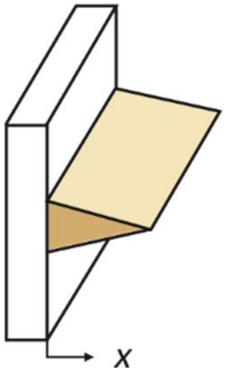


Επίπεδο κυλινδρικό
(ράβδος)

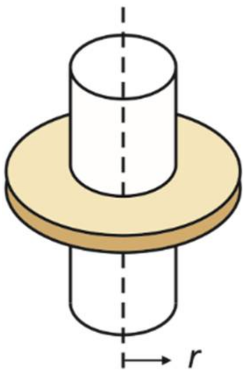


Επίπεδο ορθογωνικό
(έλασμα)

Μεταβλητής διατομής



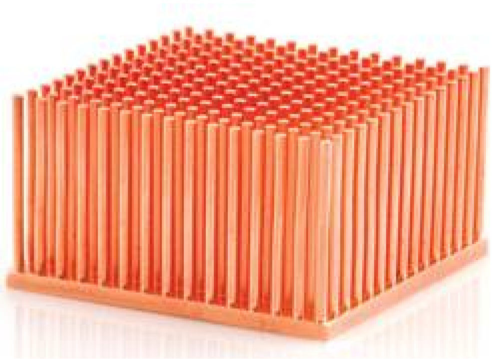
Επίπεδο τριγωνικό



Δακτυλιοειδές

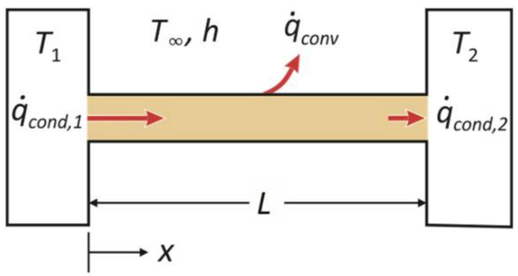
Εμπορικά πτερύγια

Συστοιχίες (απλών) πτερυγίων



Μηχανισμοί μεταφοράς

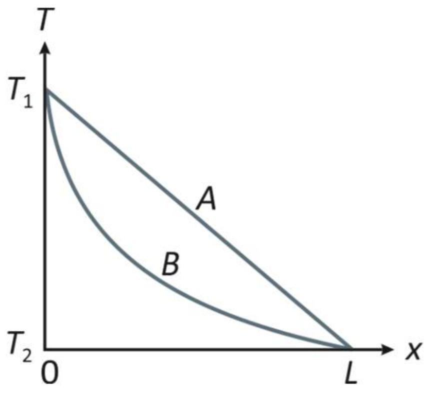
- Μηχανισμοί μεταφοράς
  - **Αγωγή** θερμότητας κατά μήκος της ράβδου
  - **Συναγωγή** θερμότητας στο περιβάλλον από την εξωτερική επιφάνεια



Η διεύθυνση της συναγωγής είναι κάθετη στην κύρια διεύθυνση της αγωγής

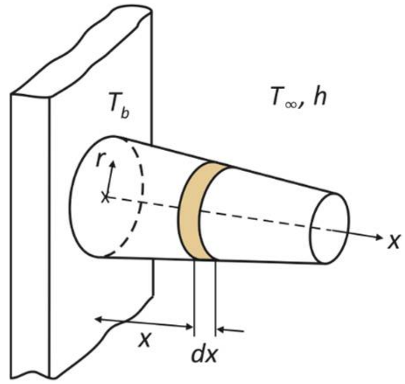
εκτεινόμενη επιφάνεια

- Κατανομή θερμοκρασίας
  A. Αδιαβατική εξωτερική επιφάνεια → Μηδενική συναγωγή → Σταθερός ρυθμός με αγωγή → Γραμμική κατανομή
  B. Μη-μηδενική συναγωγή → Μειούμενος ρυθμός με αγωγή → Μειούμενη κλίση → Μη-γραμμική κατανομή



Ισοζύγιο ενέργειας

- Η βάση του πτερυγίου βρίσκεται σε επαφή με θερμό τοίχωμα θερμοκρασίας T_b (base)
- Περιβάλλον ρευστό θερμοκρασίας (T_∞) και συντελεστή συναγωγής h



Ισοζύγιο ενέργειας σε στοιχειώδες τμήμα

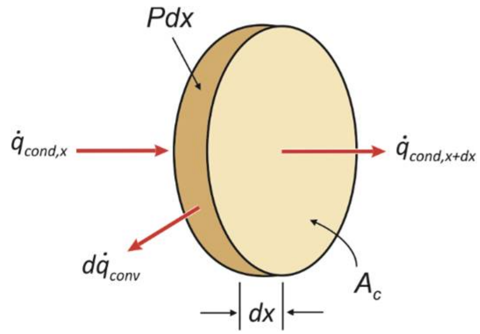
Εισροή ενέργειας = Εκροή ενέργειας

$$\dot{q}_{cond,x} = \dot{q}_{cond,x+dx} + d\dot{q}_{conv}$$

$$\dot{q}_{cond} = -kA_c \frac{dT}{dx}$$ Νόμος Fourier

$$d\dot{q}_{conv} = h(Pdx)(T - T_\infty)$$ Νόμος ψύξης Newton

$$\dot{q}_{cond,x+dx} = \dot{q}_{cond,x} + \left.\frac{d\dot{q}_{cond}}{dx}\right|_x dx$$



A_c	Εμβαδό εγκάρσιας διατομής
P	Περίμετρος
$P\,dx$	Εμβαδό επιφάνειας συναγωγής

Εξίσωση πτερυγίου

Γενική μορφή

$$\frac{d}{dx}\left(kA_c\frac{dT}{dx}\right)=hP\left(T-T_\infty\right)$$

Στη γενική περίπτωση
η A_c και η P μεταβάλλονται με το x

Μορφή για πτερύγιο σταθερής εγκάρσιας διατομής

$$kA_c\frac{d^2T}{dx^2}=hP\left(T-T_\infty\right)$$

ή

$$\frac{d^2\left(T-T_\infty\right)}{dx^2}=\frac{hP}{kA_c}\left(T-T_\infty\right)$$

ή

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2}=m^2\vartheta$$

$$m^2=\frac{hP}{kA_c}$$

m – σταθερά πτερυγίου

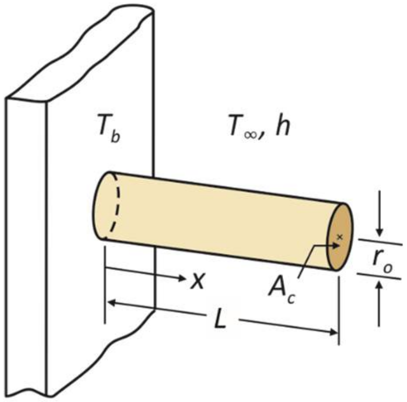
$$\vartheta=T-T_\infty$$

ϑ – διαφορά θερμοκρασίας

Σταθερά πτερυγίου

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA_c}}$$

- Κυλινδρικό πτερύγιο

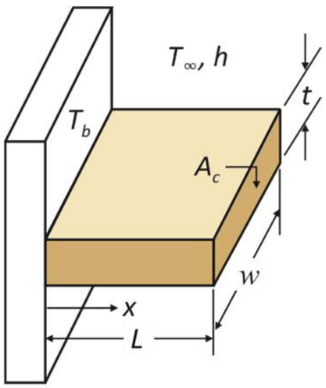


$A_c = \pi r_o^2$

$P = 2\pi r_o$

$$m_{cyl} = \sqrt{\frac{2h}{kr_o}}$$

- Ορθογωνικό πτερύγιο



$A_c = wt$

$P = 2(w + t) \approx 2w$

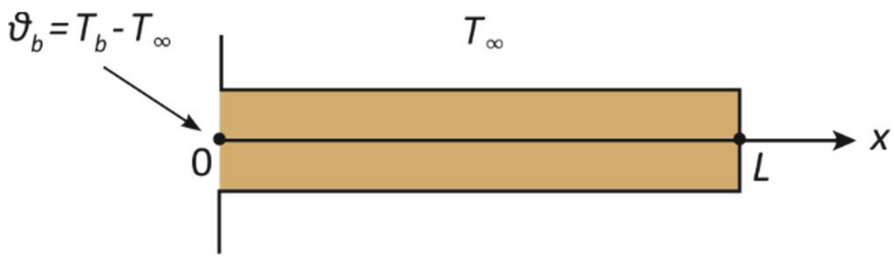
$$m_{rect} = \sqrt{\frac{2h}{kt}}$$

Ολοκλήρωση εξίσωσης πτερυγίου

- Γραμμική ομογενής, δεύτερης τάξης ΔΕ. Λύση:

$$\vartheta(x) = c_1 e^{-mx} + c_2 e^{mx}$$

Οριακές συνθήκες



- $x = 0$, $\vartheta = \vartheta_b = T_b - T_\infty$
- $x = L$
    1. Πτερύγιο απείρου μήκους
    2. Πτερύγιο αδιαβατικού άκρου
    3. Μεταφορά με συναγωγή από το άκρο
    4. Δεδομένη θερμοκρασία στο άκρο

Κατανομή θερμοκρασίας

Συνθήκες στο άκρο	Κατανομή θερμοκρασίας
Άπειρο μήκος $L \to \infty,\ \vartheta(L)=0$	$\vartheta(x)=\vartheta_b e^{-mx}$
Αδιαβατικό άκρο $\left.\frac{d\vartheta}{dx}\right\|_{x=L}=0$	$\vartheta(x)=\vartheta_b \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}$
Συναγωγή $-k\left.\frac{d\vartheta}{dx}\right\|_{x=L}=h\vartheta_L$	$\vartheta(x)=\vartheta_b \frac{\cosh[m(L-x)]+\frac{h}{km}\sinh[m(L-x)]}{\cosh(mL)+\frac{h}{km}\sinh(mL)}$
Δεδομένη θερμοκρασία $\vartheta(L)=\vartheta_L$	$\vartheta(x)=\frac{\vartheta_L \sinh(mx)+\vartheta_b \sinh[m(L-x)]}{\sinh(mL)}$

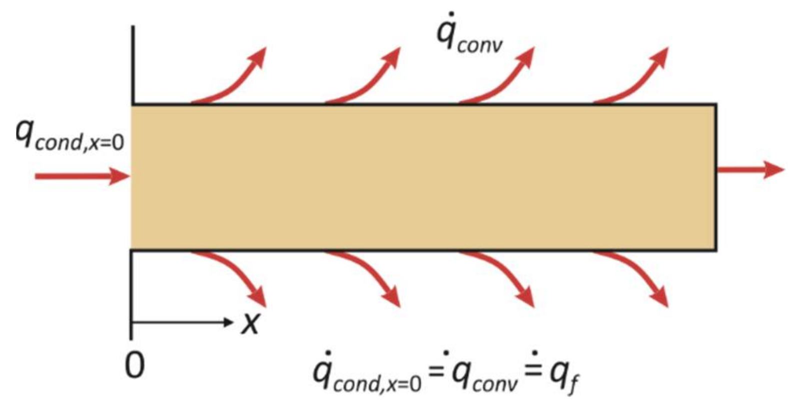
Υπολογισμός ρυθμού μεταφοράς θερμότητας

- 1ος Τρόπος – Ρυθμός απαγωγής θερμότητας από την επιφάνεια συναγωγής του πτερυγίου (A_f)

$$\dot{q}_f = \dot{q}_{conv} = \int_{A_f} h(T - T_\infty)\, dA_f$$

- 2ος Τρόπος – Ρυθμός εισροής θερμότητας με αγωγή στη βάση του πτερυγίου

$$\dot{q}_f = \dot{q}_{cond,x=0} = -kA_c \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}$$



Ρυθμός μεταφοράς θερμότητας

Συνθήκες στο άκρο	**Κατανομή θερμοκρασίας**
Άπειρο μήκος	$\dot{q}_f = M$ $\qquad M = \sqrt{hPkA_c}\,\vartheta_b$
Αδιαβατικό άκρο	$\dot{q}_f = M\tanh(mL)$
Συναγωγή	$\dot{q}_f = M\dfrac{\sinh(mL) + \dfrac{h}{km}\cosh(mL)}{\cosh(mL) + \dfrac{h}{km}\sinh(mL)}$
Δεδομένη θερμοκρασία	$\dot{q}_f = M\dfrac{\cosh(mL) - \dfrac{\vartheta_L}{\vartheta_b}}{\sinh(mL)}$

Παράδειγμα 1

Μεταφορά θερμότητας σε πτερύγιο σταθερής διατομής

Κυλινδρική ράβδος με διάμετρο $D = 5$ cm και μήκος $L = 60$ cm στηρίζεται σε δύο πλάκες χαλκού θερμοκρασίας $T_b = 300°C$ και περιβάλλεται από αέρα θερμοκρασίας $T_\infty = 30°C$.

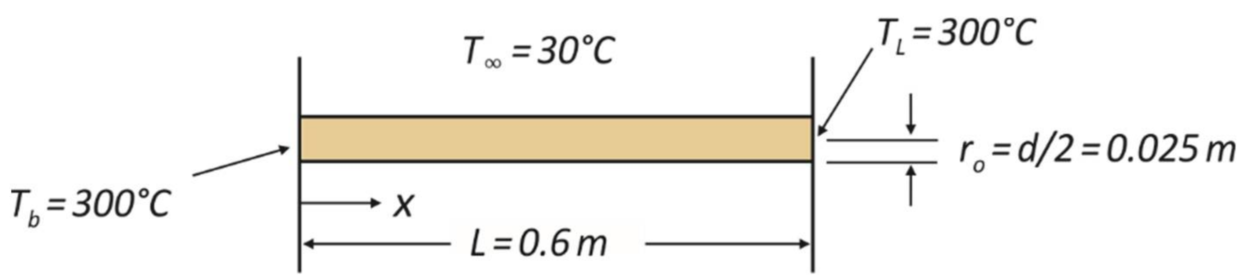
Ο συντελεστής μεταφοράς θερμότητας από την επιφάνεια της ράβδου στο περιβάλλον είναι $h = 5$ W/m²·K και ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας της ράβδου είναι $k = 160$ W/m·K.

Ζητούνται:

(α) Η κατανομή της θερμοκρασίας κατά μήκος της ράβδου

(β) Η ελάχιστη θερμοκρασία της ράβδου

(γ) Ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας μέσω της ράβδου προς το περιβάλλον



Παράδειγμα **1** – Λύση 1/2

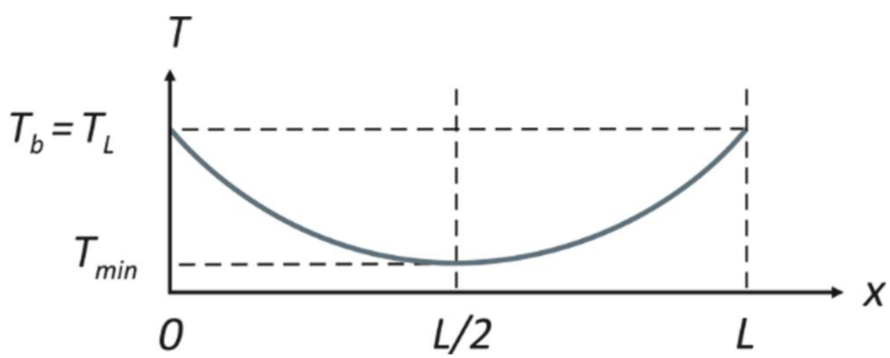
Κατανομή θερμοκρασίας

- Συμμετρική κατανομή θερμοκρασίας
- Εξετάζεται το μισό τμήμα (από $x = 0$ έως $x = L/2$)
- Στη θέση $x = L/2$ δεν υπάρχει αγωγή (η καμπύλη της θερμοκρασίας παρουσιάζει ελάχιστο) και επομένως ισχύει η οριακή συνθήκη αδιάθερμου άκρου

$$T(x) = T_\infty + \vartheta_b \frac{\cosh\left[m(L/2 - x)\right]}{\cosh(mL/2)}$$

$$\vartheta_b = T_b - T_\infty = 300 - 30 = 270^\circ\mathrm{C}$$

$$m = \sqrt{\frac{2h}{kr_o}} = \sqrt{\frac{2 \times 5}{160 \times 0.025}} = 1.581\,\mathrm{m}^{-1}$$



Παράδειγμα **1** – Λύση 2/2

Ελάχιστη θερμοκρασία ράβδου

Η θερμοκρασία γίνεται ελάχιστη στο κέντρο της ράβδου ($x = L/2$):

$$T_{min} = T\left(L/2\right) = 30 + 270 \times \frac{\cosh(0)}{\cosh(1.581 \times 0.3)} = \boxed{272.2^{\circ}\mathrm{C}}$$

Ρυθμός μεταφοράς θερμότητας

$$\dot{q}_f = M \tanh(mL/2) = \sqrt{hPkA_c}\,\vartheta_b \tanh(mL/2)$$

όπου $P = 2\pi r_o = 0.157\,\mathrm{m}$ και $A_c = \pi r_o^2 = 1.963 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$

Άρα $\dot{q}_f = \sqrt{5 \times 0.157 \times 160 \times 1.963 \cdot 10^{-3}} \times 270 \times \tanh(1.581 \times 0.3) = 59.24\,\mathrm{W}$

Συνολικά, από όλη τη ράβδο μήκους L, απομακρύνεται θερμότητα με ρυθμό::

$$2\dot{q}_f = \boxed{118.48\,\mathrm{W}}$$