Φαινόμενα Μεταφοράς ΙΙ

4η Διάλεξη

Εξίσωση αγωγής θερμότητας

Εμμανουήλ Σουλιώτης

Τμήμα Χημικών Μηχανικών
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

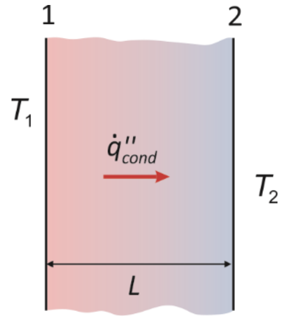
Μαθησιακοί στόχοι

- Ανάπτυξη της εξίσωσης διατήρησης της ενέργειας σε διαφορικό όγκο ελέγχου (§2.3)
- Παραγωγή ειδικών μορφών της εξίσωσης διατήρησης ενέργειας με αγωγή (§2.4)
- Εξοικείωση με τις αρχικές και τις οριακές συνθήκες (§2.5)

Τι έχουμε μάθει – Απαραίτητες επεκτάσεις

Αγωγή

Επίπεδο τοίχωμα, σταθερό *k*, χωρίς παραγωγή, μόνιμη κατάσταση, 1D

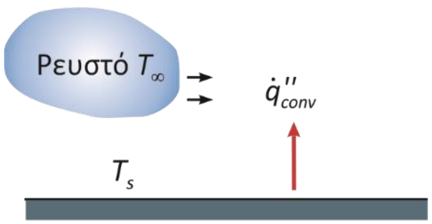


$$\dot{q}''_{cond} = k\frac{T_1 - T_2}{L}$$

Επέκταση σε
- Μη-επίπεδο τοίχωμα
- Μεταβλητό *k*
- Με παραγωγή θερμότητας
- Μη-μόνιμη κατάσταση
- 2D και 3D

Συναγωγή

Εξαναγκασμένη ή φυσική κυκλοφορία

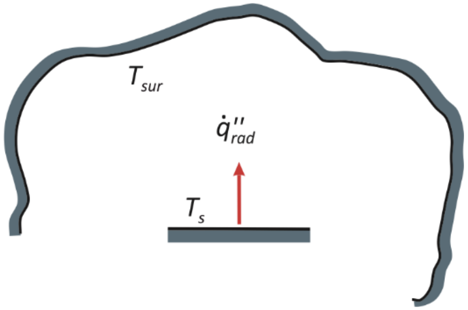


$$\dot{q}''_{conv} = h\left(T_s - T_\infty\right)$$

Υπολογισμός *h*
- Εσωτερική ροή σε αγωγούς
- Εξωτερική ροή
- Φυσική κυκλοφορία
- Βρασμός συμπύκνωση

Ακτινοβολία

Ανταλλαγή θερμότητας με περιβάλλουσα επιφάνεια



$$\dot{q}''_{rad} = \varepsilon\sigma\left(T_s^4 - T_{sur}^4\right)$$

Επέκταση σε
- Φαιές επιφάνειες
- Μεταξύ οποιανδήποτε επιφανειών

Μορφή και ρόλος εξίσωσης αγωγής

Διαφορική εξίσωση

- Έκφραση του ισοζυγίου ενέργειας σε διαφορικό ΟΕ
- Εξαρτημένη μεταβλητή
  - **Θερμοκρασία (*T*)**
- Ανεξάρτητες μεταβλητές
  - **χώρος (*x, y , z*)**
  - **χρόνος (*t*)**
- Αρχικές συνθήκες
  - Θερμοκρασία στην αρχή του φαινομένου
- Οριακές συνθήκες
  - Θερμοκρασία ή ροή θερμότητας στα όρια του συστήματος

Επίλυση (ολοκλήρωση)

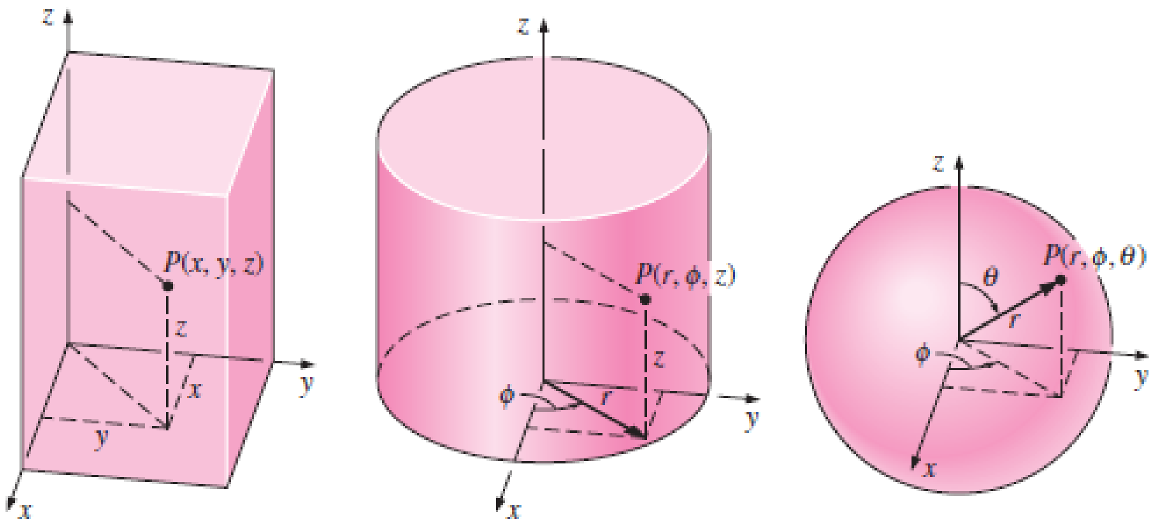
- **Κατανομή θερμοκρασίας**

$$T\left(x,y,z,t\right)$$

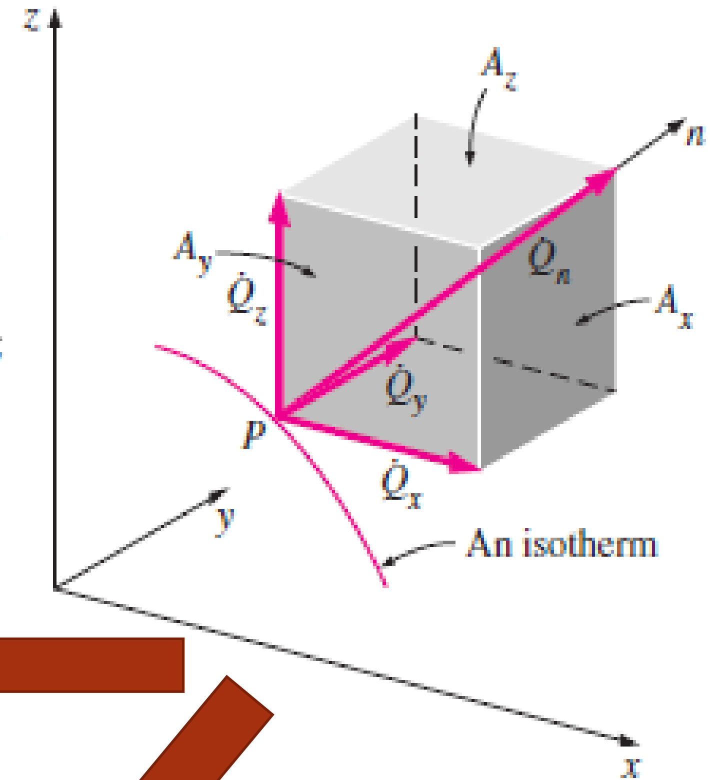
- Ρυθμός μεταφοράς θερμότητας με εφαρμογή του **νόμου Fourier**

$$\dot{\mathbf{q}} = -kA\nabla T$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \dot{\mathbf{q}}(x,y,z,t) \\ &= \mathbf{e_x}\,\dot{q}_x(x,y,z,t) + \mathbf{e}_y\,\dot{q}_y(x,y,z,t) + \mathbf{e}_z\,\dot{q}_{\mathbf{z}}(x,y,z,t)\end{aligned}$$



(a) Rectangular coordinates (b) Cylindrical coordinates (c) Spherical coordinates



$$\vec{\dot{Q}}_n = \dot{Q}_x \vec{i} + \dot{Q}_y \vec{j} + \dot{Q}_z \vec{k}$$

$$\dot{Q}_x = -kA_x \frac{\partial T}{\partial x}, \qquad \dot{Q}_y = -kA_y \frac{\partial T}{\partial y}, \qquad \text{and} \qquad \dot{Q}_z = -kA_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

1D αγωγή σε καρτεσιανές συντεταγμένες

- Τοίχωμα
  - Ακίνητο
  - Επίπεδο
  - Μεγάλου μήκους και πλάτους
  - Πεπερασμένου πάχους (κατά *x*)
- Η θερμοκρασία είναι **συνάρτηση των *x* και *t***

$$T = T(x,t)$$

- Θερμότητα μεταφέρεται με **αγωγή μόνο κατά *x***

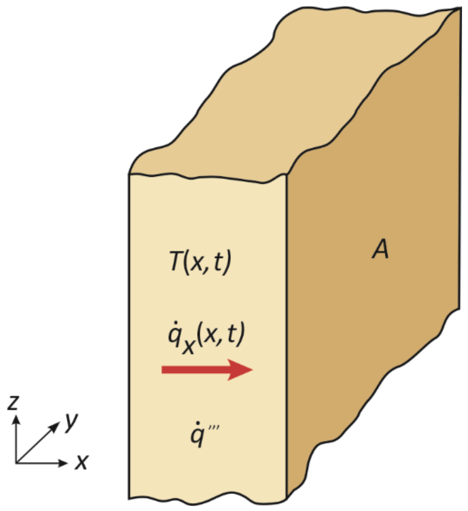
$$\dot{q}_x \neq 0, \quad \dot{q}_y = 0, \quad \dot{q}_z = 0$$

- Ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας είναι **συνάρτηση των *x* και *t***

$$\dot{q}_x = \dot{q}_x(x,t)$$

- **Παραγωγή θερμότητας** στον όγκο του τοιχώματος

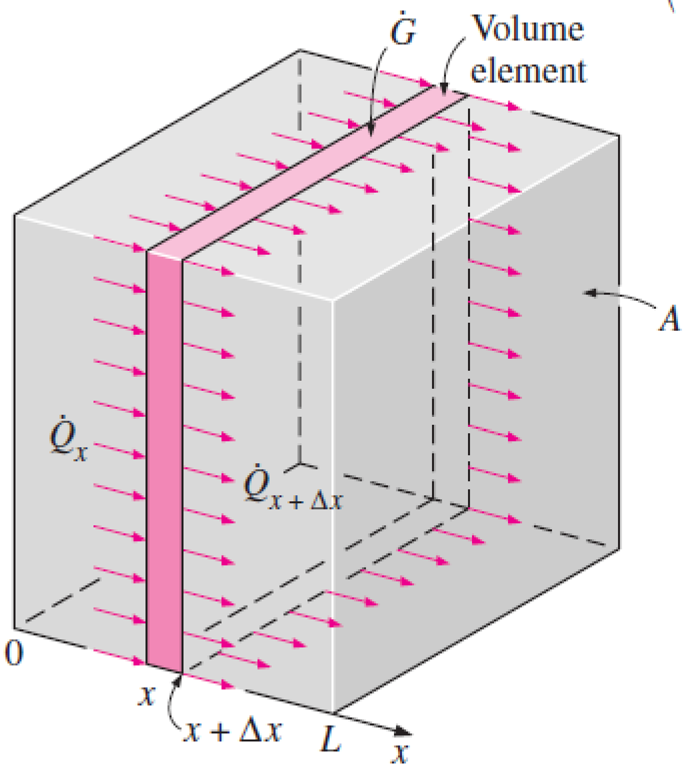
$$\dot{q}''' \sim \mathrm{W/m^3}$$



Ισοζύγιο ενέργειας σε στοιχειώδη 1D ΟΕ

Παραγωγή Θερμότητας

$$\dot{G} = \int_V \dot{g}\, dV$$



$$A_x = A_{x+\Delta x} = A$$

$$\begin{pmatrix}\text{Rate of heat}\\ \text{conduction}\\ \text{at } x\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Rate of heat}\\ \text{conduction}\\ \text{at } x+\Delta x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Rate of heat}\\ \text{generation}\\ \text{inside the}\\ \text{element}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Rate of change}\\ \text{of the energy}\\ \text{content of the}\\ \text{element}\end{pmatrix}$$

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{G}_{\text{element}} = \frac{\Delta E_{\text{element}}}{\Delta t}$$

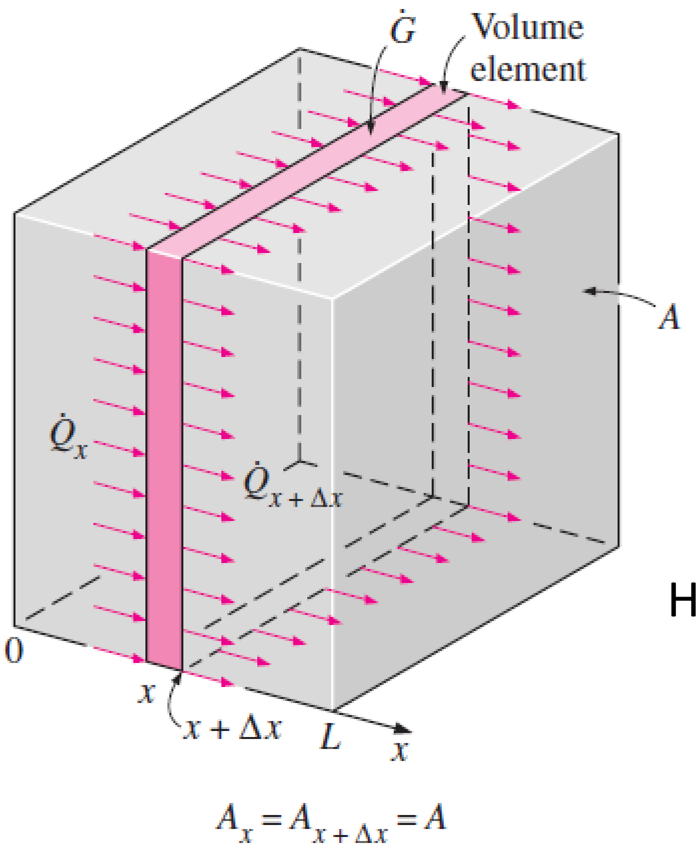
$$\Delta E_{\text{element}} = E_{t+\Delta t} - E_t = mC(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho C A \Delta x (T_{t+\Delta t} - T_t)$$

$$\dot{G}_{\text{element}} = \dot{g} V_{\text{element}} = \dot{g} A \Delta x$$

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{g} A \Delta x = \rho C A \Delta x \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

$$-\frac{1}{A}\frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} + \dot{g} = \rho C \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

Ισοζύγιο ενέργειας σε στοιχειώδη 1D ΟΕ



$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(kA\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{g} = \rho C\frac{\partial T}{\partial t}$$

όπου

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-kA\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

Variable conductivity: $$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{g} = \rho C\frac{\partial T}{\partial t}$$

Constant conductivity: $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Η μεταβλητή α ονομάζεται θερμική διαχυτότητα

$$\alpha = k/\rho C$$

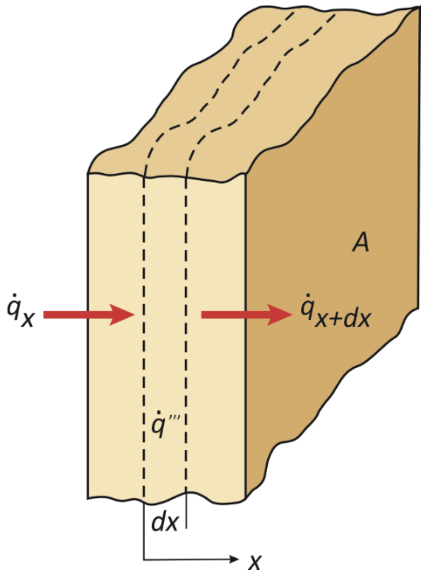
(1) *Steady-state:* ($\partial/\partial t = 0$) $$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0$$

(2) *Transient, no heat generation:* ($\dot{g} = 0$) $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

(3) *Steady-state, no heat generation:* ($\partial/\partial t = 0$ and $\dot{g} = 0$) $$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

Ισοζύγιο ενέργειας σε στοιχειώδη 1D ΟΕ

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st}$$



- Ρυθμός **εισροής** ενέργειας

$$\dot{E}_{in} = \dot{q}_x \qquad \text{Νόμος Fourier:} \quad \dot{q}_x = -kA\frac{\partial T}{\partial x}$$

- Ρυθμός **εκροής** ενέργειας

$$\dot{E}_{out} = \dot{q}_{x+dx} = \dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}dx$$

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} = -\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)Adx$$

- Ρυθμός **παραγωγής** ενέργειας

$$\dot{E}_g = \dot{q}'''dV = \dot{q}'''Adx$$

- Ρυθμός **συσσώρευσης** ενέργειας

$$\dot{E}_{st} = \rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}dV = \rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}Adx$$

Διαφορική εξίσωση

- Αθροίζοντας και διαιρώντας με Adx (= dV: όγκος στοιχειώδους ΟΕ)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\dot{q}'''=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

ρυθμός **συσσώρευσης** ενέργειας
(ανά μονάδα όγκου)

ρυθμός **παραγωγής** ενέργειας
(ανά μονάδα όγκου)

ρυθμός **καθαρής εισροής** ενέργειας (εισροή – εκροή)

(ανά μονάδα όγκου)

Ειδικές μορφές της εξίσωσης

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\dot{q}'''=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

- Σταθερός συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας (*k*)

$$\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho c_p}\dot{q}'''=\frac{\partial T}{\partial t}$$

όπου $\alpha=\dfrac{k}{\rho c_p}$ **συντελεστής θερμικής διαχυτότητας**

- (+) **Μόνιμη κατάσταση** – $T = T(x)$

$$\frac{d^2 T}{dx^2}+\frac{\dot{q}'''}{k}=0$$

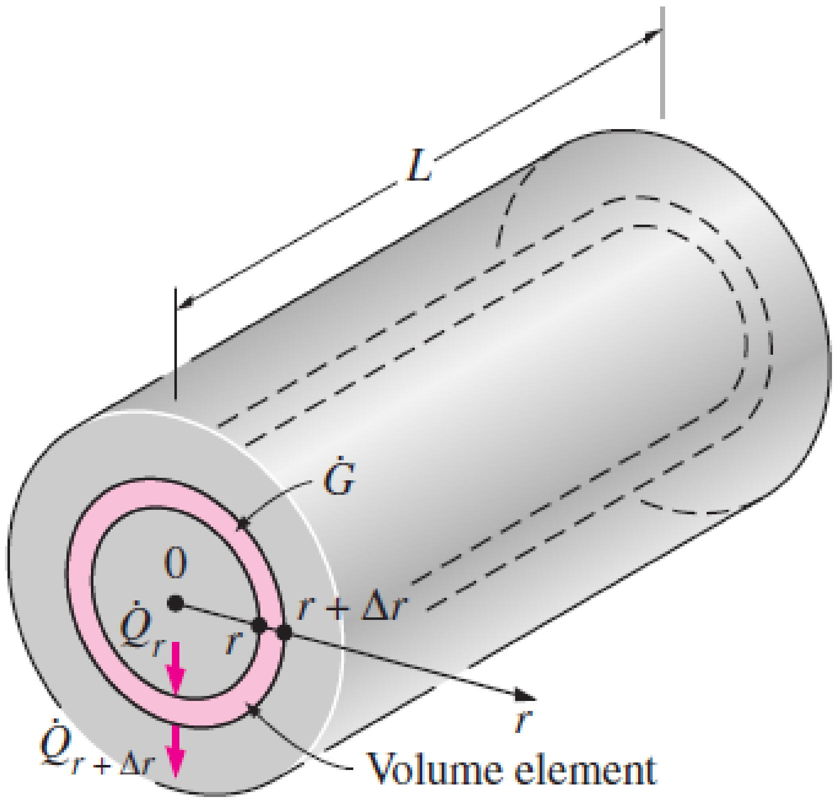
1D εξίσωση **Poisson**

- (+) Χωρίς παραγωγή θερμότητας

$$\frac{d^2 T}{dx^2}=0$$

1D εξίσωση **Laplace**

$$\begin{pmatrix}\text{Rate of heat}\\ \text{conduction}\\ \text{at } r\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Rate of heat}\\ \text{conduction}\\ \text{at } r+\Delta r\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Rate of heat}\\ \text{generation}\\ \text{inside the}\\ \text{element}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Rate of change}\\ \text{of the energy}\\ \text{content of the}\\ \text{element}\end{pmatrix}$$



$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} + \dot{G}_{\text{element}} = \frac{\Delta E_{\text{element}}}{\Delta t}$$

$$\Delta E_{\text{element}} = E_{t+\Delta t} - E_t = mC(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho C A \Delta r (T_{t+\Delta t} - T_t)$$

$$\dot{G}_{\text{element}} = \dot{g} V_{\text{element}} = \dot{g} A \Delta r$$

$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} + \dot{g} A \Delta r = \rho C A \Delta r \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

$$-\frac{1}{A}\frac{\dot{Q}_{r+\Delta r} - \dot{Q}_r}{\Delta r} + \dot{g} = \rho C \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\dot{Q}_{r+\Delta r} - \dot{Q}_r}{\Delta r} = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-kA\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

$$A = 2\pi r L.$$

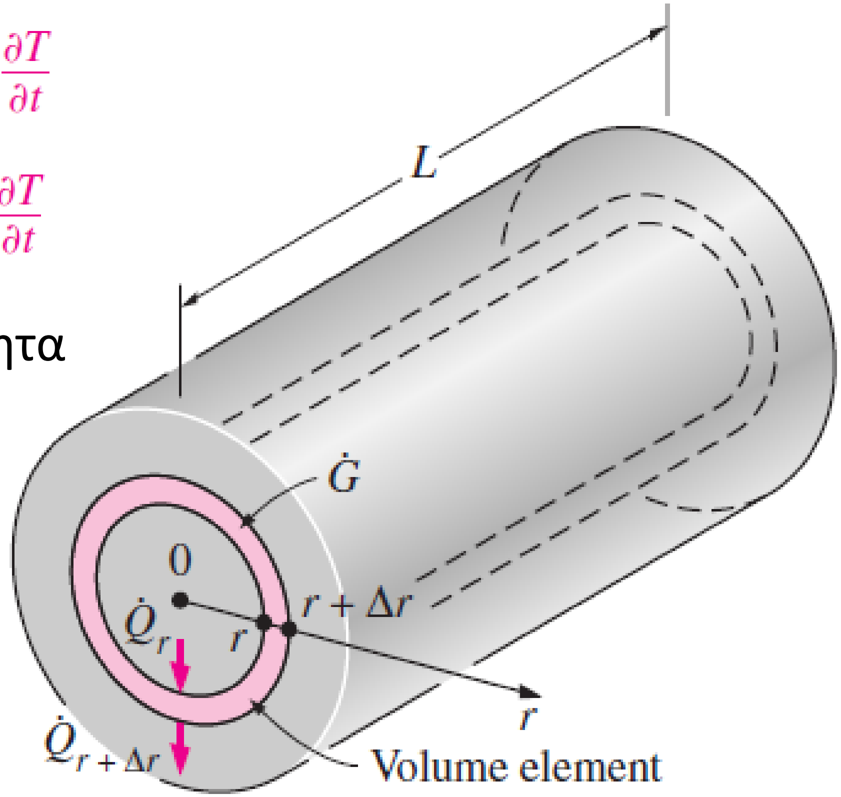
$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial r}\left(kA\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Variable conductivity: $$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\dot{g}=\rho C\frac{\partial T}{\partial t}$$

Constant conductivity: $$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\dot{g}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Η μεταβλητή α ονομάζεται θερμική διαχυτότητα

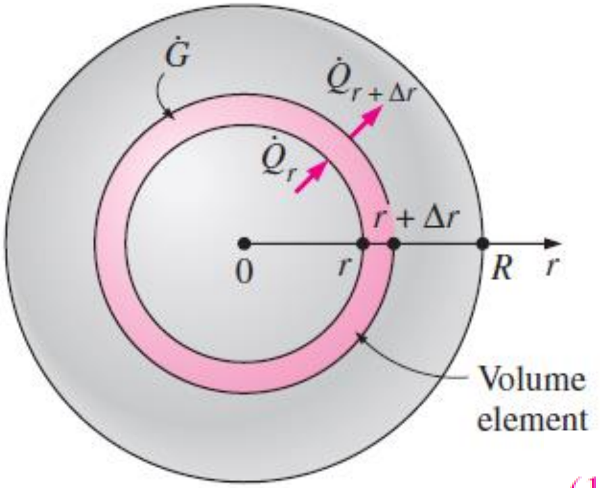
$$\alpha = k/\rho C$$



(1) *Steady-state:* $(\partial/\partial t = 0)$ $$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+\frac{\dot{g}}{k}=0$$

(2) *Transient, no heat generation:* $(\dot{g} = 0)$ $$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

(3) *Steady-state, no heat generation:* $(\partial/\partial t = 0 \text{ and } \dot{g} = 0)$ $$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=0$$



$A = 4\pi r^2$

Variable conductivity: $$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 k \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Constant conductivity: $$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\alpha = k/\rho C$$

(1) *Steady-state:* ($\partial/\partial t = 0$) $$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) + \frac{\dot{g}}{k} = 0$$

(2) *Transient, no heat generation:* ($\dot{g} = 0$) $$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

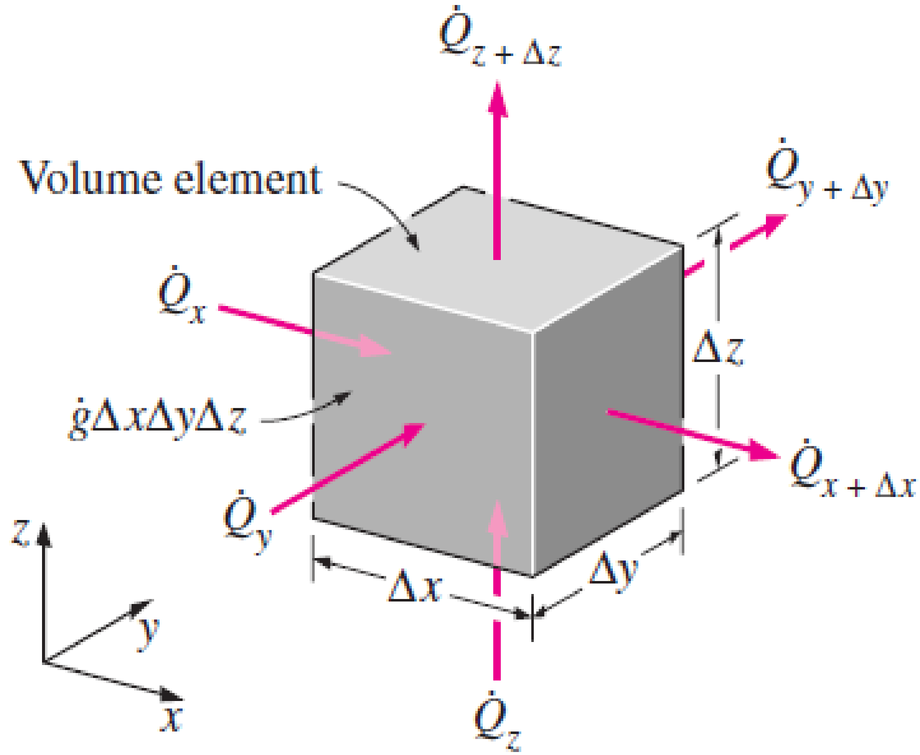
(3) *Steady-state, no heat generation:* ($\partial/\partial t = 0$ and $\dot{g} = 0$) $$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = 0 \quad \text{or} \quad r\frac{d^2T}{dr^2} + 2\frac{dT}{dr} = 0$$

$$\frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n k \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

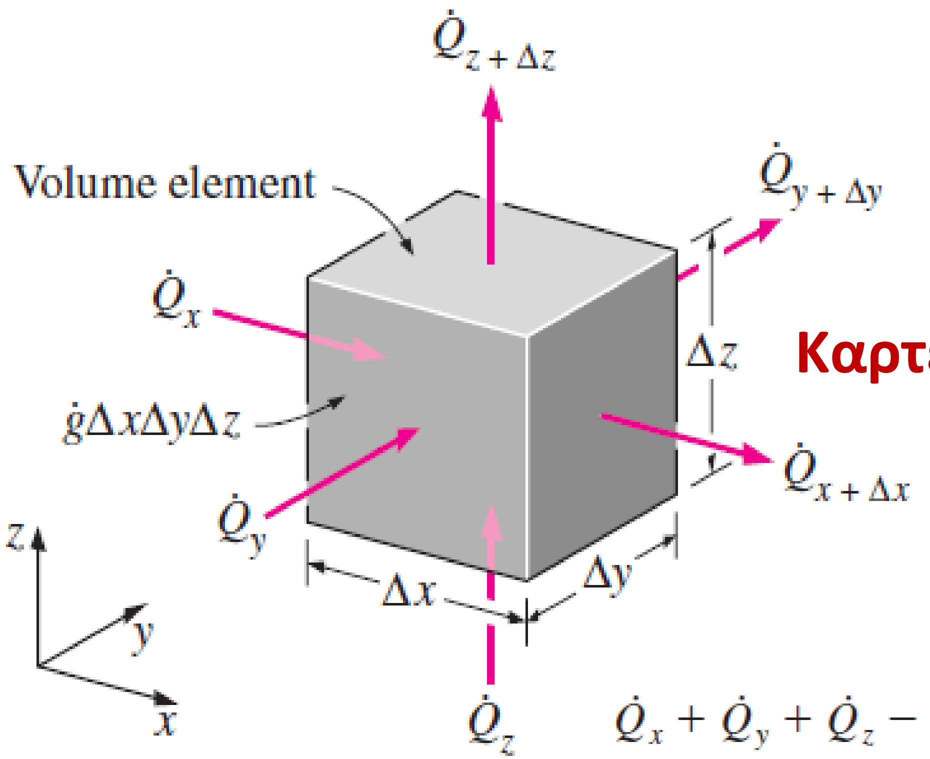
n=0: Επίπεδος τοίχος
n=1: Κύλινδρος
n=2: Σφαίρα

ΓΕΝΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΑΓΩΓΗΣ

Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων



$$\left(\begin{array}{c}\text{Rate of heat}\\ \text{conduction at}\\ x,\ y,\ \text{and } z\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{Rate of heat}\\ \text{conduction}\\ \text{at } x+\Delta x,\\ y+\Delta y,\ \text{and } z+\Delta z\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{Rate of heat}\\ \text{generation}\\ \text{inside the}\\ \text{element}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{Rate of change}\\ \text{of the energy}\\ \text{content of}\\ \text{the element}\end{array}\right)$$



Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{G}_{\text{element}} = \frac{\Delta E_{\text{element}}}{\Delta t}$$

$$\Delta E_{\text{element}} = E_{t+\Delta t} - E_t = mC(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho C\Delta x\Delta y\Delta z(T_{t+\Delta t} - T_t)$$

$$\dot{G}_{\text{element}} = \dot{g}V_{\text{element}} = \dot{g}\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{g}\Delta x\Delta y\Delta z = \rho C\Delta x\Delta y\Delta z\,\frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

Dividing by $\Delta x\Delta y\Delta z$ gives

$$-\frac{1}{\Delta y\Delta z}\frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta x\Delta z}\frac{\dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_y}{\Delta y} - \frac{1}{\Delta x\Delta y}\frac{\dot{Q}_{z+\Delta z} - \dot{Q}_z}{\Delta z} + \dot{g} = \rho C\frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων

$$A_x = \Delta y \Delta z,\ A_y = \Delta x \Delta z, \text{ and } A_z = \Delta x \Delta y,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\partial}{\partial x}\left(-k \Delta y \Delta z \frac{\partial T}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{\dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_y}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{\partial}{\partial y}\left(-k \Delta x \Delta z \frac{\partial T}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{\dot{Q}_{z+\Delta z} - \dot{Q}_z}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{\partial Q_z}{\partial z} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{\partial}{\partial z}\left(-k \Delta x \Delta y \frac{\partial T}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

(1) *Steady-state:*
(called the **Poisson equation**)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0$$

(2) *Transient, no heat generation:*
(called the **diffusion equation**)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

(3) *Steady-state, no heat generation:*
(called the **Laplace equation**)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Ισοζύγιο ενέργειας σε στοιχειώδη 3D ΟΕ

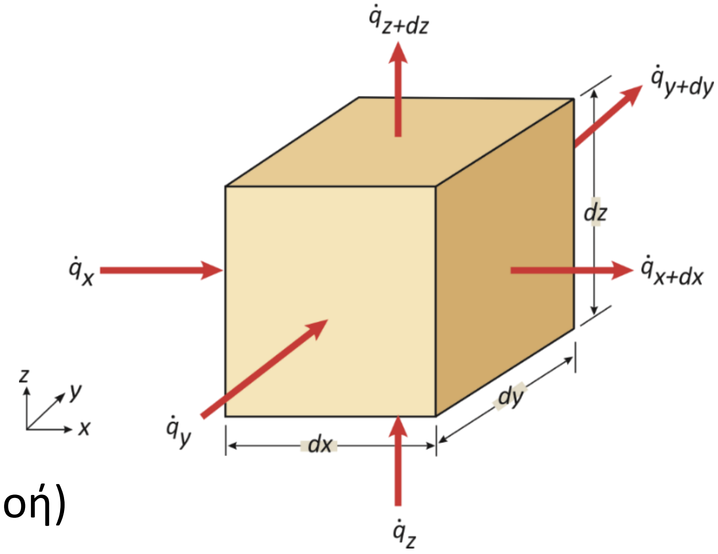
- Ρυθμός **εισροής** ενέργειας

$$\dot{E}_{in} = \dot{q}_x + \dot{q}_y + \dot{q}_z$$

- Ρυθμός **εκροής** ενέργειας

$$\dot{E}_{out} = \dot{q}_{x+dx} + \dot{q}_{y+dy} + \dot{q}_{z+dz}$$

$$= \dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}dx + \dot{q}_y + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}dy + \dot{q}_z + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z}dz$$



- Ρυθμός **καθαρής εισροής** ενέργειας (εισροή – εκροή)

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} = -\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}dx - \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}dy - \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z}dz$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dxdydz + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)dxdydz + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)dxdydz$$

- Ρυθμός **παραγωγής** ενέργειας $\dot{E}_g = \dot{q}'''dxdydz$

- Ρυθμός **συσσώρευσης** ενέργειας $\dot{E}_{st} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}dxdydz$

Διαφορική εξίσωση

- Αθροίζοντας και διαιρώντας με $dx\,dy\,dz$ (όγκος στοιχειώδους ΟΕ)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}'''=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

- Διανυσματική μορφή (ανεξάρτητη συστήματος συντεταγμένων)

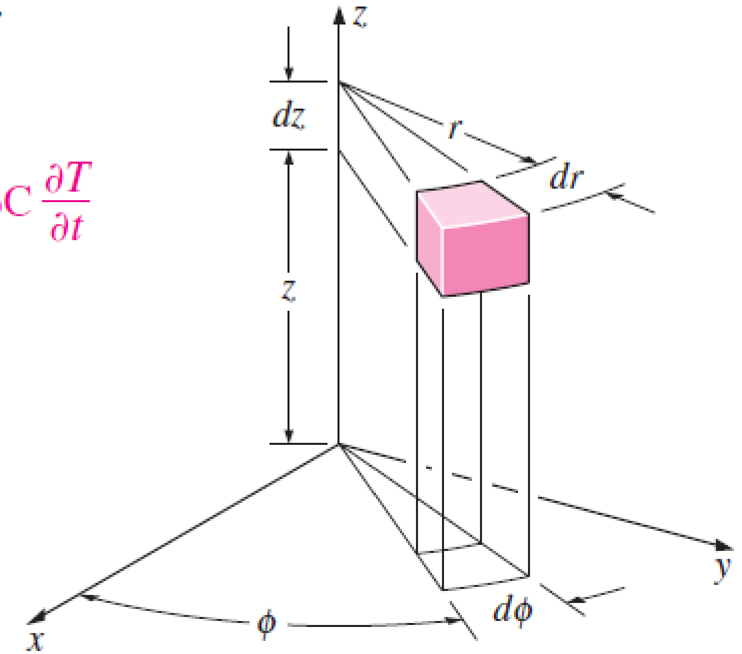
$$\nabla\cdot k\nabla T+\dot{q}'''=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

- Ειδικές μορφές
  - Σταθερό k $$\alpha\nabla^2 T+\frac{1}{\rho c_p}\dot{q}'''=\frac{\partial T}{\partial t}$$
  - (+) Μόνιμη κατάσταση $$\nabla^2 T+\frac{\dot{q}'''}{k}=0$$ εξίσωση **Poisson**
  - (+) Χωρίς παραγωγή θερμότητας $$\nabla^2 T=0$$ εξίσωση **Laplace**

Κυλινδρικό Σύστημα Συντεταγμένων

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi, \qquad \text{and} \qquad z = z$$

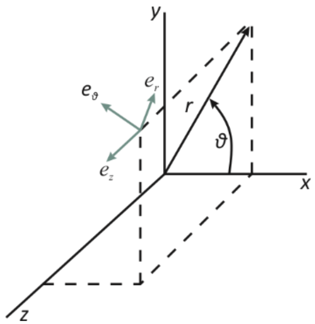
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(kr\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{g} = \rho C\frac{\partial T}{\partial t}$$



Εξαγωγή της βασικής Εξίσωσης

Εξίσωση αγωγής σε κυλινδρικές συντεταγμένες

- Κυλινδρικές συντεταγμένες



Βαθμίδα

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r} e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} e_z$$

Απόκλιση

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r q_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$$

Τελεστής Laplace

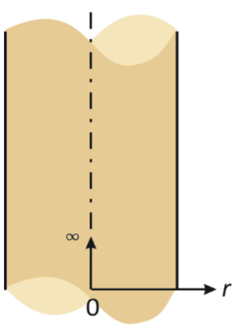
$$\nabla^2 T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

- Διαφορική εξίσωση

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(k\frac{\partial T}{\partial \vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q}''' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

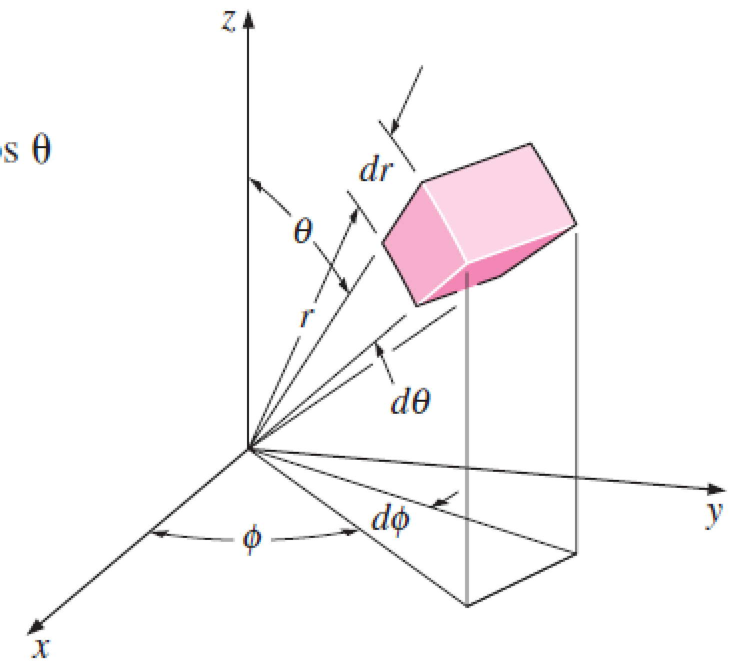
- 1D – Κυλινδρική συμμετρία $T(r, t)$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \dot{q}''' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$



Σφαιρικό Σύστημα Συντεταγμένων

$$x = r\cos\phi\sin\theta, \qquad y = r\sin\phi\sin\theta, \qquad \text{and} \qquad z = \cos\theta$$

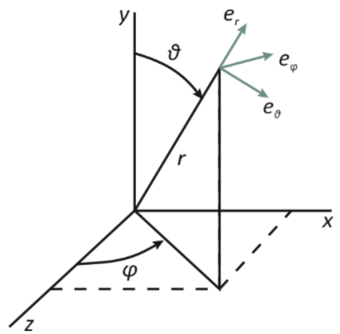


Εξαγωγή της βασικής Εξίσωσης

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \dot{g} = \rho C\frac{\partial T}{\partial t}$$

Εξίσωση αγωγής σε σφαιρικές συντεταγμένες

- Σφαιρικές συντεταγμένες



Βαθμίδα $\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r} e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \varphi} e_\varphi$

Απόκλιση $\nabla \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 q_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(q_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi}$

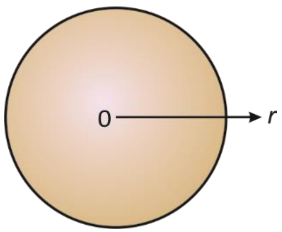
Τελεστής Laplace $\nabla^2 T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}(\sin\theta \frac{\partial T}{\partial \upsilon}) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}$

- Διαφορική εξίσωση

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(k \sin\vartheta \frac{\partial T}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(k \frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) + \dot{q}''' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

- 1D – Σφαιρική συμμετρία $T(r, t)$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 k \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \dot{q}''' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$



Κλείσιμο των εξισώσεων

- Μονοδιάστατη (κατά x) αγωγή θερμότητας σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\dot{q}'''=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t} \qquad T(x,t)$$

- Πρώτης τάξης ως προς το χρόνο $\Rightarrow$ 1 **αρχική συνθήκη**

$$T(x,0)$$

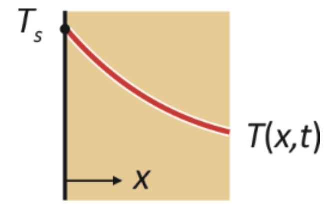
- Δεύτερης τάξης ως προς το χώρο $\Rightarrow$ 2 **οριακές συνθήκες**

$$x=0 \quad \text{και} \quad x=L$$

Τύποι οριακών συνθηκών

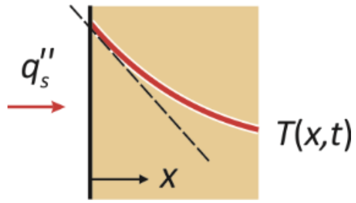
- Δεδομένη θερμοκρασία
  (πρώτου είδους ή **Dirichlet**)

$$T(0,t) = T_s$$



- Δεδομένη ροή θερμότητας
  (δεύτερου είδους ή **Neumann**)

$$-k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = q_s''$$

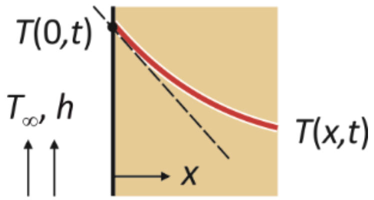


Ειδικές περιπτώσεις
- Μόνωση
- Συμμετρία

$$q_s'' = 0$$

- Μεταφορά σε περιβάλλον γνωστής
  θερμοκρασίας με συναγωγή ή/και ακτινοβολία

$$-k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = h\left[T_\infty - T(0,t)\right]$$



Παράδειγμα 1

Μορφή εξίσωσης αγωγής

Το ισοζύγιο ενέργειας σε διαφορικό όγκο ελέγχου έχει τη μορφή.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\dot{q}'''=0$$

(α) Το σύστημα βρίσκεται σε μόνιμη ή μη-μόνιμη κατάσταση;
(β) Η μεταφορά θερμότητας είναι μονοδιάστατη, δισδιάστατη ή τρισδιάστατη;
(γ) Υπάρχει παραγωγή θερμότητας στο συγκεκριμένο μέσο;
(δ) Ο συντελεστής αγωγιμότητας είναι σταθερός ή μεταβλητός;

Παράδειγμα 1 – Λύση

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\dot{q}'''=0$$

(α) Το σύστημα βρίσκεται σε μόνιμη γιατί απουσιάζει ο όρος της συσσώρευσης (ο όρος της χρονικής παραγώγου)

(β) Η μεταφορά θερμότητας είναι μονοδιάστατη, καθώς η μόνη χωρική συντεταγμένη που εμφανίζεται είναι η r
** Πρόκειται για κυλινδρικό σύστημα

(γ) Υπάρχει παραγωγή θερμότητας που εκφράζεται από τον όρο $\dot{q}'''$

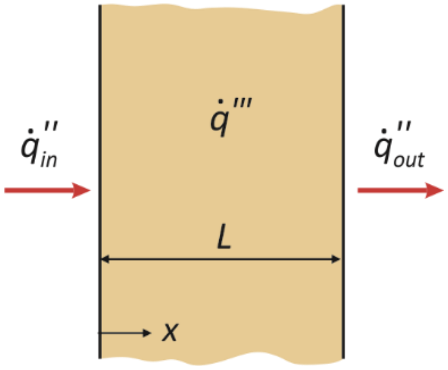
(δ) Ο συντελεστής αγωγιμότητας μπορεί να είναι μεταβλητός γιατί βρίσκεται εντός της πρώτης παραγώγου.

Παράδειγμα 2

Πληροφορίες από την κατανομή της θερμοκρασίας

Η κατανομή της θερμοκρασίας σε ένα επίπεδο τοίχωμα ($L = 1$ m) σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή δίνεται από τη σχέση:

$$T(x) = a + bx + cx^2$$



Όπου T η θερμοκρασία σε °C, x η απόσταση από το αριστερό άκρο σε m και a, b σταθερές ($a = 900$°C, $b = -300$°C/m, $c = -50$°C/m^2).

Στο τοίχωμα παράγεται ομοιόμορφα θερμότητας με ρυθμό $\dot{q}''' = 1000\,\mathrm{W/m^3}$

Να υπολογιστούν:

(α) Η ροή θερμότητας που εισέρχεται στο τοίχωμα ($x = 0$) και εξέρχεται από το τοίχωμα ($x = L$)

(β) Ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας του τοιχώματος στις θέσεις $x = 0$, $x = L$ και $x = L/2$

Ιδιότητες υλικού τοιχώματος: $\rho = 1600$ kg/m^3, $k = 40$ W/m·K, $c_p = 4000$ J/kg·K

Παράδειγμα 2 – Λύση 1/2

Ροή θερμότητας

Η ροή θερμότητας δίνεται από τον νόμο του Fourier:

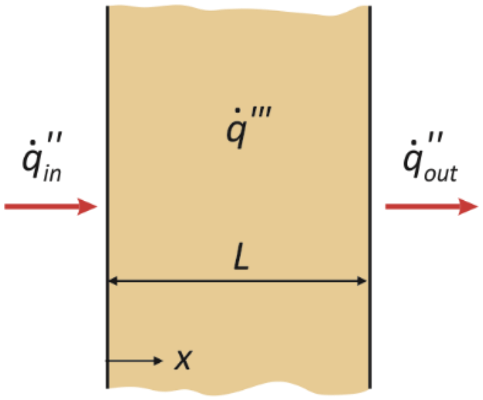
$$\dot{q}''_x = -k\frac{\partial T}{\partial x}$$

Η παράγωγος της θερμοκρασίας υπολογίζεται από την κατανομή:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a + bx + cx^2\right) = b + 2cx$$

Άρα:

$$\dot{q}''_x = -k\left(b + 2cx\right)$$



Εφαρμογή στις θέσεις ($x = 0$) και ($x = L$):

$$\dot{q}''_{in} = \dot{q}''_x(0) = -kb = -40\times(-300) = 12000\,\text{W/m}^2$$

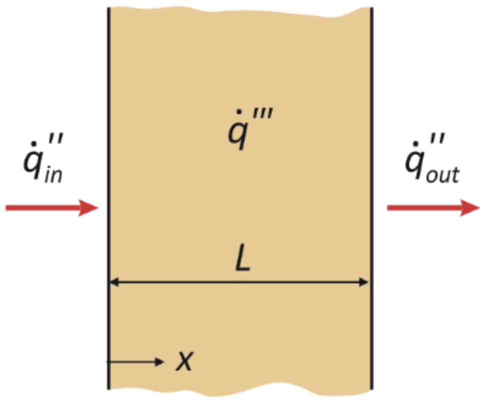
$$\dot{q}''_{out} = \dot{q}''_x(L) = -k\left(b + 2cL\right) = -40\times\left(-300 + 2\times(-50)\times 1\right) = 16000\,\text{W/m}^2$$

Παράδειγμα 2 – Λύση 2/2

Ρυθμός μεταβολής θερμοκρασίας

Η εξίσωση αγωγής (1D, καρτεσιανές συντεταγμένες, σταθερό *k*) έχει τη μορφή:

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\dot{q}'''=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial T}{\partial t}=\frac{k}{\rho c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\dot{q}'''}{\rho c_p}$$



Δεύτερη παράγωγος της θερμοκρασίας:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(b+2cx\right)=2c \qquad \textit{ανεξάρτητη από το } x$$

Επομένως και η χρονική παράγωγος της θερμοκρασίας είναι ανεξάρτητη από το *x* (ίδια σε κάθε θέση):

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{k}{\rho c_p}2c+\frac{\dot{q}'''}{\rho c_p}=\frac{2kc+\dot{q}'''}{\rho c_p}=\frac{2\times 40\times\left(-50\right)+1000}{1600\times 4000}=-4.69\cdot 10^{-4}\,{}^\circ\mathrm{C/s}$$