ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

τμ. Μηχανικών Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών — Μαθηματική Ανάλυση Ι

τμ. Μηχανολόγων Μηχανικών — Μαθηματικά Ι

ΣΕΙΡΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Να δειχτεί ότι οι σειρές α) $\frac{1}{4}+\frac{2}{6}+\frac{3}{8}+\frac{4}{10}+\ldots$, β) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{15}{16}+\ldots$ δεν είναι συγκλίνουσες.

Απάντηση

Οι δύο σειρές είναι οι α) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+2}$ και β) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{2^n}$. Είναι

$$\lim\frac{n}{2n+2}=\frac{1}{2}\neq 0$$

και

$$\lim\frac{2^n-1}{2^n}=1\neq 0$$

οπότε οι σειρές δεν είναι συγκλίνουσες.

Αν το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ είναι ίσο με $s_n=\frac{n-1}{n+1}$, να υπολογιστούν το a_n και το $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Απάντηση

Είναι

$$a_n=s_n-s_{n-1}=\frac{2}{n^2+n}$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim s_n=1$$

Να ελεγχθεί η σύγκλιση των σειρών και να υπολογιστούν τα αθροίσματα α) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{3^{n-1}}$, β) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n}{3^{n+1}}$, γ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{5^n}$, δ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^n x}{2^n}$.

Απάντηση

α) Είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{3^{n-1}}=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^n$$

δηλαδή η σειρά είναι γεωμετρική με πρώτο όρο $a = \frac{e}{3}$ και λόγο για τον οποίο είναι $|\lambda| = \frac{e}{3} < 1$. Άρα είναι συγκλίνουσα, οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}} = \frac{3e}{3-e}$$

β) Είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^n$$

δηλαδή η σειρά είναι γεωμετρική με πρώτο όρο $a = \frac{\pi}{3}$ και λόγο για τον οποίο είναι $|\lambda| = \frac{\pi}{3} > 1$. Άρα η σειρά απειρίζεται θετικά.

γ) Είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

όπου οι δύο σειρές είναι γεωμετρικές με λόγους για τους οποίους είναι $|\lambda_1| = \frac{3}{5} < 1$ και $|\lambda_2| = \frac{4}{5} < 1$, δηλαδή είναι συγκλίνουσες. Τελικά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n} = \frac{11}{2}$$

δ) Είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n x}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos x}{2}\right)^n$$

δηλαδή η σειρά είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $|\lambda| = \left|\frac{\cos x}{2}\right| \leq \frac{1}{2} < 1$, οπότε συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n x}{2^n} = \frac{\cos x}{2 - \cos x}$$

Να λυθεί η εξίσωση $2 + 2 \cdot 10^x + 2 \cdot 10^{2x} + 2 \cdot 10^{3x} + \ldots = 3$.

Απάντηση

Το α΄ μέλος γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 10^{(n-1)x} = \frac{2}{1 - 10^x}$$

υπό την προϋπόθεση $x < 0$. Τελικά η λύση της εξίσωσης είναι $x = -\log 3$.

Να βρεθούν οι τιμές του ρ για τις οποίες η σειρά $1 + 2\rho + \rho^2 + 2\rho^3 + \rho^4 + 2\rho^5 + ...$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$. Σε αυτήν την περίπτωση, να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς.

Απάντηση

Είναι

$$1 + 2\rho + \rho^2 + 2\rho^3 + \rho^4 + 2\rho^5 + \ldots = (1 + 2\rho) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\rho^2\right)^{n-1}$$

Η γεωμετρική σειρά συγκλίνει όταν $-1 < \rho < 1$. Τότε

$$1 + 2\rho + \rho^2 + 2\rho^3 + \rho^4 + 2\rho^5 + \ldots = \frac{1 + 2\rho}{1 - \rho^2}$$

Να υπολογιστεί η παράσταση $\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\ldots$.

Απάντηση

Είναι

$$\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

δηλαδή η σειρά είναι τηλεσκοπική. Τελικά ο γενικός όρος της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων είναι

$$s_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}$$

και

$$\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots=\frac{1}{3}$$

Να βρεθούν τα αθροίσματα α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$, β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\sqrt{n\,(n+1)}}$.

Απάντηση

Και στις δύο περιπτώσεις οι σειρές είναι τηλεσκοπικές:

α) Είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\,(2n-1)}-\frac{1}{2\,(2n+1)}\right]$$

οπότε $s_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}$$

β) Είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\sqrt{n\,(n+1)}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

οπότε $s_n=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\sqrt{n\,(n+1)}}=1$$

Να ελεγχθεί η σύγκλιση των σειρών α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$, β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$, γ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+1}$.

Απάντηση

Γίνεται εφαρμογή του κριτηρίου σύγκρισης και στις τρεις περιπτώσεις:

α) Είναι

$$\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ είναι συγκλίνουσα γεωμετρική, οπότε εξασφαλίζεται ότι και η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ είναι συγκλίνουσα.

β) Είναι

$$\frac{2n}{n^2+1} \geq \frac{1}{n}$$

οπότε προκύπτει ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$ απειρίζεται θετικά, αφού τέτοια συμπεριφορά έχει και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

γ) Είναι

$$\frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+1} > \frac{1}{2} \frac{1}{n^{1/3}}$$

Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{n^{1/3}}$ απειρίζεται θετικά, ομοίως θα συμπεριφέρεται και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+1}$.

Να ελεγχθεί η σύγκλιση των σειρών α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$, β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+5}}{\left(\sqrt[3]{n}+3\right)^4}$.

Απάντηση

Κάνουμε εφαρμογή του κριτηρίου οριακής σύγκρισης:

α) Αν $a_n = \frac{1}{n^{1+1/n}}$ και $b_n = \frac{1}{n}$, διαπιστώνεται ότι $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$. Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ απειρίζεται θετικά, άρα το ίδιο θα κάνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$.

β) Αν $a_n = \frac{\sqrt{n^2+5}}{\left(\sqrt[3]{n}+3\right)^4}$ και $b_n = \frac{1}{n^{1/3}}$, διαπιστώνεται ότι $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$. Εφόσον $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}} = +\infty$, θα είναι και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+5}}{\left(\sqrt[3]{n}+3\right)^4} = +\infty$.

Να δειχτεί ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ είναι συγκλίνουσα, χρησιμοποιώντας το κριτήριο σύγκρισης.

Απάντηση

Προκύπτει ότι

$$\frac{1}{(\log n)^{\log n}} < \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow n > 10^{100}$$

Επομένως, οι προϋποθέσεις του κριτηρίου σύγκρισης ικανοποιούνται όταν $n > 10^{100}$. Εφόσον η $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ είναι συγκλίνουσα, η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Να ελεγχθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$, β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$, γ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$, δ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)\,4^{2n+1}}$.

Απάντηση

Εφαρμόζουμε σε κάθε περίπτωση του κριτήριο λόγου:

α) Είναι

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n^2}{n+1} = +\infty > 1$$

οπότε η σειρά απειρίζεται θετικά.

β) Είναι

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} \lim \frac{n^2+2n+1}{n^2} = \frac{1}{3} < 1$$

οπότε η σειρά είναι συγκλίνουσα.

γ) Είναι

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4 \lim \left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \right]^2 = \frac{4}{e^2} < 1$$

οπότε η σειρά είναι συγκλίνουσα.

δ) Είναι

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10}{16} \lim \frac{n+1}{n+2} = \frac{10}{16} < 1$$

οπότε η σειρά είναι συγκλίνουσα.

Να ελεγχθεί η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Απάντηση

Εφαρμογή του κριτηρίου του λόγου:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)^{n+1} n!}{n^n \, (n+1)!} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

Άρα η σειρά απειρίζεται θετικά.

Να εξεταστεί η σύγκλιση των σειρών α) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$, β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$, γ) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Απάντηση

Εφαρμόζουμε και στις τρεις περιπτώσεις το κριτήριο της n-οστής ρίζας.

α) Είναι

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right) \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

και η σειρά είναι συγκλίνουσα.

β) Είναι

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \left[(n-2)! \frac{n-1}{n} \right] = +\infty$$

οπότε η σειρά απειρίζεται θετικά.

γ) Είναι

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = 4 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{4}{e} > 1$$

Άρα η σειρά απειρίζεται θετικά.

Να εξεταστεί η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^{2n} a}{n^2}$ για $0 < a < \pi/2$.

Απάντηση

Με εφαρμογή του κριτηρίου της ρίζας, διαπιστώνεται ότι

$$\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$$

όταν $0 < a < \frac{\pi}{4}$ και

$$\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$$

όταν $\frac{\pi}{2} > a > \frac{\pi}{4}$. Επιπλέον, για $a = \frac{\pi}{4}$ η σειρά παίρνει τη μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ που είναι συγκλίνουσα. Επομένως, η σειρά συγκλίνει για $0 < a \leq \frac{\pi}{4}$ και απειρίζεται θετικά για $\frac{\pi}{2} > a > \frac{\pi}{4}$.

Να δειχτεί ότι οι σειρές α) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots$, β) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{17} + \ldots$ είναι συγκλίνουσες.

Απάντηση

Οι σειρές είναι οι α) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ και β) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+1}$ και είναι εναλλασσόμενες, οπότε η σύγκλισή τους αποδεικνύεται με το κριτήριο του Leibniz.

Να ελεγχθεί η σύγκλιση της σειράς $1 - \frac{1 \cdot 3}{3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{5!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{7!} + \ldots$

Απάντηση

Η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(2n-1)!}$, με $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2n}$.

Α΄ τρόπος

Η σειρά είναι απολύτως συγκλίνουσα (αποδεικνύεται εύκολα με το κριτήριο του λόγου), άρα είναι και συγκλίνουσα.

Β΄ τρόπος

Η σειρά είναι εναλλασσόμενη, οπότε με εφαρμογή του κριτηρίου Leibniz διαπιστώνεται πως είναι συγκλίνουσα.

Να ελεγχθεί η σύγκλιση των σειρών α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^2 5^n}$, β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi a)}{n^2 + b^2}$.

Απάντηση

α) Είναι

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{3}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 5} = \frac{3}{5} < 1$$

δηλαδή η σειρά είναι απολύτως συγκλίνουσα, άρα και συγκλίνουσα.

β) Είναι

$$|a_n| = \frac{|\cos(n\pi a)|}{n^2 + b^2} \leq \frac{1}{n^2 + b^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Από το κριτήριο σύγκρισης προκύπτει ότι η σειρά είναι απολύτως συγκλίνουσα, άρα και συγκλίνουσα